

## 論文

DOI:10.5139/JKSAS.2010.38.5.445

## 연소시스템의 열음향 불안정 예측을 위한 Helmholtz Solver 개발

김성구\*, 최환석\*, 차동진\*\*

## Development of Helmholtz Solver for Thermo-Acoustic Instability within Combustion Devices

Seong-Ku Kim\*, Hwan Seok Choi\* and Dong Jin Cha\*\*

## ABSTRACT

In order to effectively predict thermo-acoustic instability within real combustors of rocket engines and gas turbines, in the present study, the Helmholtz equation in conjunction with the time lag hypothesis is discretized by the finite element method on three-dimensional hybrid unstructured mesh. Numerical nonlinearity caused by the combustion response term is linearized by an iterative method, and the large-scale eigenvalue problem is solved by the Arnoldi method available in the ARPACK. As a consequence, the final solution of complex valued eigenfrequency and acoustic pressure field can be interpreted as resonant frequency, growth rate, and modal shape for acoustic modes of interest. The predictive capabilities of the present method have been validated against two academic problems with complex impedance boundary and premixed flame, as well as an ambient acoustic test for liquid rocket combustion chamber with/without baffle.

## 초 록

본 연구에서는 실제 로켓엔진 및 가스터빈용 연소기 내부의 열음향 불안정을 효과적으로 예측하기 위하여, 헬름홀츠 방정식과 시간지연모델을 이용한 3차원 유한요소법 해석코드를 개발하였다. 연소응답항에 의해 수치적으로 야기되는 비선형성은 반복법으로 선형화하였으며, Arnoldi 방법을 사용하여 대용량 고유치 문제를 해석하였다. 해석결과인 복소각주파수와 음향 압력장을 통해 각 음향모드의 공진주파수, 진폭의 증폭/감쇠 여부 그리고 모드 형태를 예측할 수 있다. 이론해가 존재하는 두 가지 문제를 통해 출구 임피던스와 예혼합 화염이 종 방향 음향장에 미치는 영향에 대한 예측 정확도를 평가하였으며, 배플 유무에 따른 횡 방향 음향 모드의 주파수 변이를 상온 음향시험 결과와 비교/검증하였다.

**Key Words** : Combustion Instability(연소불안정), Helmholtz Equation(헬름홀츠 방정식), Time-Lag Model(시간지연모델), Eigenvalue Problem(고유치 문제)

## 1. 서 론

† 2009년 12월 1일 접수 ~ 2010년 2월 12일 심사완료

\* 정회원, 한국항공우주연구원 연소기팀  
교신저자, E-mail : kimsk@kari.re.kr  
대전광역시 유성구 과학로 115

\*\* 정회원, 국립한밭대학교 건축설비공학과

고주파 연소불안정 현상은 연소실 내부에 형성되는 공진 음향파와 비정상 연소과정에 의한 열방출률의 섭동이 결합되어 나타나게 된다. 특

히 로켓엔진의 경우 방출되는 에너지 밀도가 매우 높기 때문에 쉽게 고주파 연소불안정을 발생시킬 수 있으며, 이때 벽면으로의 과도한 열유속 증가와 높은 진폭의 압력 섭동을 수반되어 하드웨어에 심각한 열적, 기계적 손상을 초래하게 된다. 1960년대에 아폴로 프로젝트에서 발생한 F-1 엔진의 연소불안정을 해결하기 위해 본격적인 연구가 시작되었으며, 이후에도 연소불안정 현상은 대부분의 로켓엔진 개발 과정에서 커다란 걸림돌이 되어 왔다[1]. 한편 가스터빈을 포함한 산업용 연소시스템 분야에서는 최근에 점차 강화되고 있는 공해물질 배출 규제를 만족하기 위해 다양한 저공해 연소 방식의 연소기 개발이 시도되고 있다. 이 과정에서 연소불안정은 예기치 못한 문제를 일으킬 수 있으며, 특히 희박 영역에서 작동하는 예혼합 연소시스템의 경우에는 연소불안정에 매우 취약하기 때문에 기술선진국에서도 산학연을 막론하고 많은 연구가 진행되고 있다[2]. 그러나 연소불안정은 그 역사와 중요성에 비해 현재까지도 현상학적으로 명확히 규명되지 못한 연구 분야이며, 실제 개발 단계에서는 아직도 상당부분을 경험적 방법에 의존하고 있는 현실이다.

시행착오와 실험적인 방법에 소요되는 개발 비용과 노력을 절감해야 한다는 현실적인 요구로 인해, 초기 설계 단계에서부터 연소불안정을 예측하고 적극적으로 연소안정화 방안을 모색할 수 있는 해석기술에 대한 연구도 꾸준히 진행되어 왔다. 시스템에 따라 연소불안정이 구동/유지되는 메커니즘은 다르지만, 연소실 형상에 의해 모드가 결정되는 특정 음향과와 비정상 연소과정이 결합하여 발생하는 근본적인 현상은 동일하다. 따라서 열음향 불안정을 예측하고 분석하는 측면에서 볼 때, 구동 메커니즘에 대한 모델링이 다를 뿐 연소불안정을 해석하는 전체적인 틀은 동일하게 사용될 수 있다.

연소불안정 해석기술은 크게, 연소시스템의 각 부분을 균일한 음향 요소들로 나누고 각 요소간의 경계에서 일치조건을 통해 전체를 해석하는 lumped network method [3,4], 음향 섭동에 대한 선형 방정식을 시간 영역[5,6] 또는 주파수 영역[7,8]에서 해석하는 acoustic perturbation method, 그리고 LES(Large Eddy Simulation)을 이용한 연소해석으로 나누어 볼 수 있다. 각 해석방법에 대한 장단점은 참고문헌[7]에 잘 설명되어 있다. 이 중에서 LES를 이용한 해석방법은 최근에 발표되는 많은 연구 결과들[9,10]을 통해 연소불안정을 현상학적으로 규명할 수 있는 뛰어난 예측능력을 보여주고 있다. 그러나 과도한 계

산시간이 요구되고, 그 자체 결과만으로는 예측된 연소불안정을 어떻게 억제하고 제어할 것인가에 대한 직접적인 해답을 제시할 수 없다.

최근 프랑스에 위치한 CERFACS(European Center for Research and Advanced Training in Scientific Computing)에서는 AVSP라는 3차원 FEM 기반의 Helmholtz solver를 개발하고, 이를 통해 LES 해석결과를 분석하는 동시에 실제 개발 중인 가스터빈 연소기에 적용하여 연소불안정 문제를 다룰 수 있는 예측기법을 제안하였다[7].

이와 유사한 연구 사례로서, 한국항공우주연구원에서도 Helmholtz 방정식에 기반을 둔 3차원 유한요소법 해석코드(KAA3D)를 개발하였다[11]. 3차원 음향 특성에 대한 조화 해석(harmonic analysis)을 수행함으로써 기존에 수행되던 음향 시험 절차를 대체하였으며, 음향공진기 설계[12], 가스발생기와 터빈 연결 덕트 간의 공진 특성 예측[13], 기체-액체 분사기의 동조[14] 등에 활용되어 왔다. 하지만 KAA3D 코드는 연소응답이 고려되지 않은 순수 음향장만을 다루고 있으며, 시간에 따른 진폭의 변화가 없는 중립 주기 진동에 대해서만 해석이 가능하다. 따라서 연소불안정의 발생 여부에 대해서는 직접적인 예측결과를 제공하지 못하였다.

본 연구에서는 CERFACS의 AVSP 코드 개발 사례[7]를 참고하여, 다차원 형상의 연소실 내부에서 연소응답특성에 의한 연소불안정 발생 여부를 판단할 수 있는 ASCI3D(Acoustic Solver for Combustion Instability in 3-Dimension) 코드를 개발하였다. 먼저 기존의 KAA3D 코드에 적용되었던 3차원 복합 비정렬격자계 기반의 유한요소법을 그대로 채택하여 복잡한 형상에서도 격자 구성의 유연성을 확보하였다. 그리고 ARPACK [15]을 이용하여 대용량 고유치 문제를 해석함으로써, 시간지연 이론에 기반한 연소응답특성[16]에 따라 연소실 내부에서 발생할 수 있는 음향 모드들의 공진주파수, 진폭의 감쇠/증폭 여부, 그리고 모드 형태를 직접적으로 구할 수 있다.

ASCI3D 코드의 직접적인 쓰임새는 현재 75톤급 액체로켓 연소기의 초기 개발모델에 적용되고 있는 이중 허브의 베플 형상을 최적화하는 데 활용될 수 있을 뿐 아니라, 가스터빈 연소기 등에서 최적동조된 음향공진기를 설계하는 데 사용될 수 있다. 또한 다양한 연소응답 모델을 개발하고 평가함으로써 향후 연소불안정 현상을 연구할 수 있는 이론적 기반을 제공할 것으로 기대된다.

본 논문에서는 ASCI3D 코드에서 사용된 물리 모델 및 수치해석방법, 그리고 코드 구성 등에

관련된 자세한 내용을 기술하였으며, 이론해와 음향시험결과를 가지는 세 가지 해석 예제들을 통해 예측 정확도와 적용 가능성을 평가하였다.

## II. 지배 방정식

### 2.1 Helmholtz 방정식

연소실내의 음향학적 거동을 다루기 위해 본 연구에서 사용한 지배방정식은 점성과 열확산을 무시한 이상기체의 보존방정식(질량, 운동량, 에너지)으로부터 유도된다. 그리고 로켓엔진이나 가스터빈의 연소 현상은 대부분 정압 과정으로 일어나므로 추가적으로 평균 압력장이 일정하고 평균속도 역시 음속에 비해 매우 낮다고 가정한다. 이때 음향학적 상태량(압력, 속도, 밀도, 열방출률)은 아래와 같이 시간에 대한 평균값과 섭동량으로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}, t) &= p_0(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x}, t) \\
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) \\
 \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\mathbf{x}) + \rho_1(\mathbf{x}, t) \\
 q(\mathbf{x}, t) &= q_0(\mathbf{x}) + q_1(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

이때 평균값(하첨자 0)에 비해 섭동량(하첨자 1)의 크기가 매우 작다는 선형 가정을 통해, 아래와 같은 파동방정식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \frac{\partial q_1}{\partial t} \tag{2}$$

모든 섭동량들에 대해 식(3)과 같이 복소 각주파수(complex angular frequency)  $\omega = 2\pi f$ 에 따른 조화진동을 도입할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 p_1(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}\{\hat{p}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}\} \\
 \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}\{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}\} \\
 q_1(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}\{\hat{q}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 상첨자  $\hat{\phantom{x}}$ 는 Fourier 변환된 값을 의미한다. 이제 식(3)을 식 (2)에 대입하면, 파동방정식을 주파수 영역으로 변환한 Helmholtz 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} \right) + \frac{\omega^2}{\gamma p_0} \hat{p} = i\omega \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \hat{q}(\mathbf{x}) \tag{4}$$

음속과 비교하여 평균 속도가 무시할 수 있다고

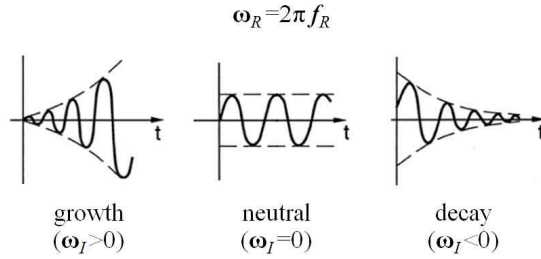


Fig. 1. Harmonic variation of acoustic pressure with angular frequency ( $\omega = \omega_R + i\omega_I$ )

가정하였으므로(zero Mach number assumption), 복소 압력과 속도는 식(5)와 같은 관계를 갖는다.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\nabla \hat{p}}{i\omega \rho_0} \tag{5}$$

식(3)에서 복소 각주파수( $\omega = \omega_R + i\omega_I$ )를 실수부와 허수부로 나누어 보면, 압력파는 아래와 같이 세 부분으로 구분할 수 있다.

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\hat{p}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_R t} e^{\omega_I t}\} \tag{6}$$

식(6)의 우변에서 복소압력장  $\hat{p}(\mathbf{x})$ 는 음향 모드에 따른 공간적 분포를 나타내며 시간과는 무관한 값을 가진다. 반면 복소 각주파수의 실수부  $\omega_R$ 를 포함한 두 번째 항은 진폭의 변화 없이  $f_R (= \omega_R/2\pi [\text{Hz}])$ 의 주파수를 가지고 시간에 대해 주기적으로 진동하는 값을 의미한다. 마지막으로 세 번째 항은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 복소 각주파수의 허수부  $\omega_I$ 의 부호에 따라 진폭이 지수함수적으로 증가 또는 감소하게 된다.

본 연구의 궁극적인 목적은 연소실 형상과 공진되어 나타나는 음향 모드들을 파악해 내고, 주어진 연소응답특성에서 각 음향 모드들의 불안정 여부를 판단하는 것이다. 따라서 문제는 식(4)로 주어진 Helmholtz 방정식을 통해, 각 음향 모드가 갖는 모드 형태(modal shape,  $\hat{p}(\mathbf{x})$ ), 공진주파수(resonant frequency,  $\omega_R/2\pi [\text{Hz}]$ ), 그리고 불안정 발생 여부(growth rate,  $\omega_I/2\pi [\text{Hz}]$ )를 구하는 것으로 귀결될 수 있다.

### 2.2 경계조건

Helmholtz 방정식으로 나타나는 음향학적 문제에 대해서는 일반적으로 아래와 같은 세 가지 형태의 경계조건을 적용할 수 있다.

**Zero pressure:** 유동 입/출구 경계면에서 압력이

고정되어 압력 섭동이 없는 경우 아래와 같은 Dirichlet 경계조건을 사용한다.

$$\hat{p} = 0 \quad \text{on boundary } \partial\Omega_D \quad (7)$$

**Zero normal velocity:** 고체 벽면(rigid wall)이나 유동 속도가 고정된 입/출구 경계에서는 속도섭동의 수직성분이 존재하지 않는다( $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{bc} = 0$ ). 이때 식(5)를 이용하여 속도섭동을 압력섭동의 구배로 나타내면, 식(8)과 같이 경계면에서 복소 압력의 수직 방향 구배가 없는 Von Neumann 경계조건을 얻게 된다.

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n}_{bc} = 0 \quad \text{on boundary } \partial\Omega_N \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{n}_{bc}$ 는 경계면에서 해석 영역의 바깥 방향으로 정의되는 수직 단위 벡터이다.

**Reduced complex impedance:** 위의 경우들보다 일반적인 음향 경계조건은 아래와 같이 정의되는 복소 임피던스(reduced complex impedance)  $Z$ 를 도입하여 표현할 수 있다.

$$Z = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0 (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{bc})} \quad (9)$$

만약  $Z$ 의 값을 알고 있는 경우, 식(9)에 식(5)을 대입하여 정리하면 아래와 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n}_{bc} = \frac{i\omega}{c_0 Z} \hat{p} \quad \text{on boundary } \partial\Omega_Z \quad (10)$$

복소 임피던스  $Z$ 는 경계면의 물리적 특성에 따라 결정되며 복소 각주파수  $\omega$ 에 대한 임의의 함수 형태로 나타날 수 있다. 이로 인해 Helmholtz 방정식을 최종적으로 이산화한 고유치 문제 역시 비선형적이 되는 경우에는  $Z$ 에 대해 선형화하여 반복적으로 풀어야 한다. 만약 복소 임피던스  $Z$ 의 값이 식(11)과 같은 형태로 정의되는 경우에는, 이산화 과정에서 각각의 항들을 식(20)부터 식(22)와 같이  $\omega$ 에 대한 각 차수의 항에 포함시켜 2차 고유치 문제로 국한시킬 수 있다[7].

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_0} + Z_1 \omega + \frac{Z_2}{\omega} \quad (11)$$

### 2.3 연소응답모델

실제 시스템에 대한 연소불안정 해석에 있어 가장 어려운 부분은 연소장이 나타내는 비정상 거동을 어떻게 모델링하는가의 문제이다. 현재까지 가장 널리 사용되는 방법은 연소 파라미터( $n$

과  $\tau$ )를 정의하여 음향학적 상태량(속도 및 압력 섭동)에 대해 화염이 응답하는 특성을 묘사하는 이른바 시간지연 모델(time lag model)이다[16]. 이 모델은 직관적인 반면에, 오랜 시간 동안 많은 분야에서 사용되어 왔으며 연소불안정을 구동시키는 물리적 메커니즘에 따라 여러 형태의 모델이 존재할 수 있다[17].

먼저 예혼합 화염에서 지배적인 연소불안정의 구동 메커니즘[18]은 상대적으로 쉽게 이해될 수 있으며, 이를 통해 화염면 상류 기준점  $\mathbf{x}_{ref}$ 에서의 속도 섭동량과 화염면의 열방출률을 연결하는 속도 감응 시간지연 모델(velocity-sensitive time lag model)이 사용되어 왔다.

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \int_{\Omega} q_1(\mathbf{x}, t) d\Omega \\ &= S_{ref} \frac{\gamma p_0}{\gamma - 1} \times n \times u_1(\mathbf{x}_{ref}, t - \tau) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $n$ 은 음향 섭동에 대해 화염이 반응하는 정도를 나타내는 간섭지수(interaction index)이며  $S_{ref}$ 는 화염면적이다. 그리고  $\tau$ 는 기준점에서의 음향 속도의 변동이 화염면의 열방출률을 변동시키는 데 까지 걸리는 시간지연(time lag)을 의미하며, 크게 대류에 의한 전달시간과 화염면의 연소 반응에 의한 특성시간으로 나눌 수 있다[18]. 식(12)의 관계식은 화염면이 매우 얇은 경우에 성립된다. 최근에 높은 효율을 갖도록 설계되는 고성능 연소기의 경우에는 일반적으로 화염면이 넓은 영역에 걸쳐 존재하게 된다. 따라서 화염면의 국부적인 특성을 묘사하기 위해 좀 더 일반적인 형태의 모델이 제안되었다[7].

$$\frac{q_1(\mathbf{x}, t)}{q_{tot}} = n_u(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{u}_1[\mathbf{x}_{ref}, t - \tau_u(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_{ref}}{U_{bulk}} \quad (13)$$

여기서,  $n_u$ 와  $\tau_u$ 는 공간상의 분포로 나타나는 간섭지수와 시간지연을 의미하며,  $q_{tot}$ 와  $U_{bulk}$ 는 각각 전체 열방출률과 기준점에서의 체적속도이다. 식(3)과 식(5)를 이용하여 식(13)을 주파수 영역으로 변환하면 다음과 같은 형태의 연소응답모델을 구할 수 있다.

$$\hat{q}(\mathbf{x}) = \frac{q_{tot} n_u(\mathbf{x})}{i\omega \rho_0(\mathbf{x}_{ref}) U_{bulk}} e^{i\omega \tau_u(\mathbf{x})} \nabla \hat{p}(\mathbf{x}_{ref}) \cdot \mathbf{n}_{ref} \quad (14)$$

Nicoud 등은 식(14)의 속도 감응 모델과 유사한 방법으로 기준점에서의 음향 압력과 화염면을 연결하는 압력 감응 모델도 함께 제안하였다[7].

$$\hat{q}(\mathbf{x}) = \frac{q_{tot}}{i\omega p_0} n_p(\mathbf{x}) e^{i\omega \tau_p(\mathbf{x})} \hat{p}(\mathbf{x}_{ref}) \quad (15)$$

반면에 액체로켓엔진의 연소불안정에서 나타나는 구동 메커니즘은 또 다른 현상학적 특성을 갖는다. 또한 액체추진제가 분사되는 경우에는 분사면에서의 임피던스가 매우 큰 값을 갖게 된다. 따라서 이 경우에는 아래와 같은 형태의 압력 감응 시간지연 모델이 적용되어 왔다[6,19,20].

$$\frac{q_1(\mathbf{x}, t)}{q_{tot}} = n_p(\mathbf{x}) \frac{p_1(\mathbf{x}, t) - p_1(\mathbf{x}, t - \tau_p(\mathbf{x}))}{p_0} \quad (16)$$

여기서  $n_p$ 와  $\tau_p$ 는 각각 간섭지수와 시간지연을 의미한다. 식(16)은 물리적으로 화염면 내부의 한 지점에서 발생한 압력섭동은  $\tau_p$ 만큼의 시간이 지난 후에 동일 지점에서 열방출률의 변동을 야기하는 것으로 설명된다. 이때  $\tau_p$ 는 개념적으로 추진제의 혼합, 증발 및 화학반응 등이 포함된 총체적인 에너지의 변환과정을 통해 결정된다. 식(3)을 이용하여 식(16)을 주파수 영역으로 변환하면 아래와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\hat{q}(\mathbf{x}) = \frac{q_{tot}}{p_0} n_p(\mathbf{x}) [1 - e^{i\omega\tau_p(\mathbf{x})}] \hat{p}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

이외에도 열방출률과 음향 섭동과의 물리적 현상에 의해 다양한 형태의 연소응답모델이 추가될 수 있을 것이다.

### III. 수치해석 방법

#### 3.1 유한요소법을 이용한 이산화

Helmholtz 방정식을 풀기 위해 일반적인 유한요소법(Galerkin Finite Element Method)을 사용하였다. 해석 영역  $\Omega$ 는 Fig. 2와 같이 네 가지 유한요소를 바탕으로 한 비정렬 격자계(hybrid unstructured grids)로 구성되고, 복소 압력장은 식(18)과 같이 형상함수(shape function)  $\phi_\beta$ 을 통해 격자점에서 정의되는 값인  $\hat{p}_\beta$ 로 이산화된다.

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \hat{p}_\beta \phi_\beta(\mathbf{x}) \quad (18)$$

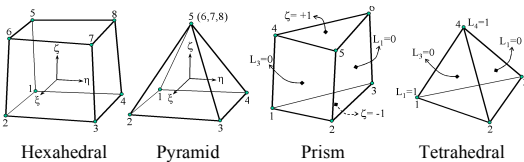


Fig. 2. Four types of linear finite elements available in ASCI3D code

여기서 형상함수  $\phi_\beta$ 는 격자점  $v_\beta$ 에서 1이고 나머지 격자점에서는 0의 값을 갖도록 선형보간된다. 따라서 각 요소에서 요소를 구성하는 격자점과 동일한 수의 형상함수들이 존재하며, 이들은 해당요소 이외의 영역에서는 0의 값을 갖는다.

Helmholtz 방정식에 형상함수와 동일하게 정의되는 시험함수(test function)를 가중하여 전체 영역에 대해 적분한다. 그 후에  $\omega$ 에 대해 정리하면 아래와 같은 이산화된 최종식을 얻을 수 있다.

$$A_{\alpha\beta} \hat{p}_\beta + \omega B_{\alpha\beta} \hat{p}_\beta + \omega^2 C_{\alpha\beta} \hat{p}_\beta = D_{\alpha\beta}(\omega) \hat{p}_\beta \quad (19)$$

여기서,

$$A_{\alpha\beta} = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{i}{\rho_0 c_0} Z_2 \phi_\alpha^* \phi_\beta d\Gamma \quad (20)$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{\partial\Omega} \frac{i}{\rho_0 c_0} \frac{1}{Z_0} \phi_\alpha^* \phi_\beta d\Gamma \quad (21)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma p_0} \phi_\alpha \phi_\beta d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{i}{\rho_0 c_0} Z_1 \phi_\alpha^* \phi_\beta d\Gamma \quad (22)$$

$$D_{\alpha\beta}(\omega) = D_{\alpha\beta}^v(\omega) + D_{\alpha\beta}^p(\omega) \quad (23)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\gamma-1}{\gamma p_0} \frac{q_{tot} n_u(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x}_{ref})} e^{i\omega\tau_u(\mathbf{x})} \phi_\alpha \nabla \phi_\beta(\mathbf{x}_{ref}) \cdot \mathbf{n}_{ref} d\Omega + \int_{\Omega} i\omega \frac{(\gamma-1)q_{tot} n_p(\mathbf{x})}{\gamma p_0^2} [1 - e^{i\omega\tau_p(\mathbf{x})}] \phi_\alpha \phi_\beta d\Omega$$

#### 3.2 반복계산에 의한 비선형 해석

식(23)에서 연소응답모델에 의한 항들은  $\omega$ 에 대한 비선형 관계식을 포함하고 있다. 아직까지는 대용량의 비선형 고유치 문제를 해석할 수 있는 일반적인 수치해석 방법은 존재하지 않는다. 따라서 문제를 해결하기 위해서는 식(19)를 아래 식과 같이 선형화해야 한다[7].

$$[A_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta}(\omega_{k-1})] \hat{p}_\beta + \omega_k B_{\alpha\beta} \hat{p}_\beta + \omega_k^2 C_{\alpha\beta} \hat{p}_\beta = 0 \quad (24)$$

식(24)는  $\omega_k$ 에 대한 2차 고유치 문제(quadratic eigenvalue problem)가 되며, 반복 오차인  $|\omega_k - \omega_{k-1}|/|\omega_0|$ 가 일정 값 이하가 될 때까지 반복 계산을 수행하여 수렴해를 얻는다. 이때 초기값  $\omega_0$ 는 식(24)에서 연소응답모델을 생략한 경우에 얻어지는 고유치를 의미한다.

#### 3.3 대용량 고유치 문제 해석

고유치 문제는 공학적으로 많은 응용 분야에서 나타나고 있으나, 대용량의 고유치 문제를 해석할 수 있는 수치해법에 있어서는 선택의 여지가 그지 많지 않다. CERFACS의 AVSP 코드에서

보듯이, 현재까지는 Arnoldi 기법을 이용한 수치 해석 방법이 가장 일반적으로 사용되고 있으며, ARPACK(ARnoldi PACKage)[15]라는 소프트웨어 패키지가 일반에 공개되어 있다. 본 연구에서도 ARPACK 패키지에서 제공하는 Arnoldi 방법을 통해 고유치 문제를 해석하였다. 우선 식(24)를 행렬식으로 표현하면 아래와 같다.

$$A_0 P + \omega B_1 P + \omega^2 C_2 P = 0 \quad (25)$$

Arnoldi 방법을 적용하기 위해서는 위 식과 같이 주어진 이차 고유치 문제(quadratic eigenvalue problem)를 일반적인 1차 선형 문제로 변환해야만 한다. 이를 위해서 식(26)과 같이 고유치를 곱한 복소 압력 벡터를 추가로 정의한다.

$$P_\omega = \omega P \quad (26)$$

이제 식(25)와 식(26)을 합치면 일반화된 고유치 문제(generalized eigenvalue problem)로 변환할 수 있다.

$$A^* x = \lambda B^* x \quad (27)$$

이때 식(25)의  $N_p \times N_p$  행렬식들은 아래와 같이  $2N_p \times 2N_p$  행렬로 변환된다.

$$A^* = \begin{bmatrix} -B_1 & -A_0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} P_\omega \\ P \end{bmatrix}, \lambda = \omega \quad (28)$$

식(27)의 고유치 문제는 Arnoldi 방법을 통해 해석할 수 있다. 이때 절대값의 크기가 큰 고유치를 찾는 경우일수록 빠른 수렴성을 갖게 된다. 그러나 연소불안정 예측에 있어서는 주로 절대값의 크기가 작은 몇 개의 고유치가 관심 대상이 되므로 수렴성이 현저히 떨어지게 된다. 이에 대한 대안으로 구하고자 하는 고유치 근방의 값  $\sigma$ 를 중심으로 식(29)와 같이 역변환을 시키는 Shift-invert 방법을 사용할 수 있다.

$$(A^* - \sigma B^*)^{-1} B^* x = \frac{1}{\lambda - \sigma} x \quad (29)$$

이제 식(29)에서 절대값이 가장 큰 고유치를 찾는 과정이,  $\sigma$ 에 가장 가까운 고유치  $\lambda$ 를 구하는 것이 되기 때문에 수렴성을 향상시킬 수 있다.

ARPACK[15]은 앞서 설명하였듯이 식(27)을 직접 풀게 되는 표준 모드와 역변환된 식(29)를 통해 고유치를 구하는 Shift-invert 모드, 두 가지 방법이 모두 가능하다. 먼저 초기 파라미터들을 문제에 맞게 지정한 후, 'Reverse communication structure'로 불리는 프로그래밍 구조에 따라 반복적으로 주요 서브루틴인 cnaupd를 부르게 된다. 여기서 return되는 파라미터 ido의 값에 따라

```

Standard mode (MODE=2): 식(27)
if ido=-1 or ido=1
  compute  $y \leftarrow A^* v$  & solve  $B^* w = y$  for  $w$ 
else if ido=2
  compute  $w \leftarrow B^* v$ 
end if

Shift-Invert mode (MODE=3): 식(29)
if ido=-1
  compute  $y \leftarrow B^* v$  & solve  $(A^* - \sigma B^*) w = y$  for  $w$ 
else if ido=1
  solve  $(A^* - \sigma B^*) w = v$  for  $w$ 
else if ido=2
  compute  $w \leftarrow B^* v$ 
end if
    
```

Fig. 3. Reverse communication structure in ARPACK[15]

Fig. 3과 같은 대수행렬 계산을 요구하게 되며, 이에 대한 프로그래밍은 사용자의 몫이 된다.

Shift-invert 모드에서 고유치 해석 자체의 수렴성은 향상되지만,  $\sigma$ 가 고유해에 가까울수록 행렬식  $(A^* - \sigma B^*)^{-1}$ 이 특이(singular)해진다. 따라서 직접적인 행렬 계산방법(direct matrix solver)을 사용하는 경우에는 큰 문제가 없으나, 대용량 해석을 위해 반복적인 계산방법(iterative matrix solver)을 사용하게 되면 행렬계산에서의 수렴성을 보장하기가 어려워진다. 또한 복소 행렬에 적용하여 수렴성을 가속시킬 수 있는 적절한 예조 건화(preconditioning) 기법을 찾기가 힘들다. 이러한 이유로 AVSP 코드는 Shift-invert 모드 대신에 표준 모드를 사용하고 있다[8].

반면에 본 연구에서는 Shift-invert 모드를 사용하기로 하고, 그 대신에 기존의 KAA3D 코드[11]에서 수렴안정성이 검증된 행렬계산절차를 적용하였다. 여기서 식(29)의  $2N_p \times 2N_p$  복소행렬식은 등가의  $4N_p \times 4N_p$  실수행렬식으로 변환되며[21], 이 과정에서 대각행렬(diagonality)가 강화 되도록 참고문헌[22]에서 제시한 K1-4 변환과정을 수행하였다.

실수행렬식의 계산은 대용량 문제에 적용할 수 있도록 GMRES iterative solver를 사용하였으며, 수렴성을 향상시키기 위해 ILUT preconditioner를 사용하였다[23]. 대용량 행렬(Large sparse matrix)에 필요한 저장 용량을 효율적으로 사용하기 위해 CSR (Compressed Sparse Row) data format을 사용하였다[23]. ASCI3D 코드의 해석절차와 주요 서브루틴들은 Fig. 4에 나타내었다.

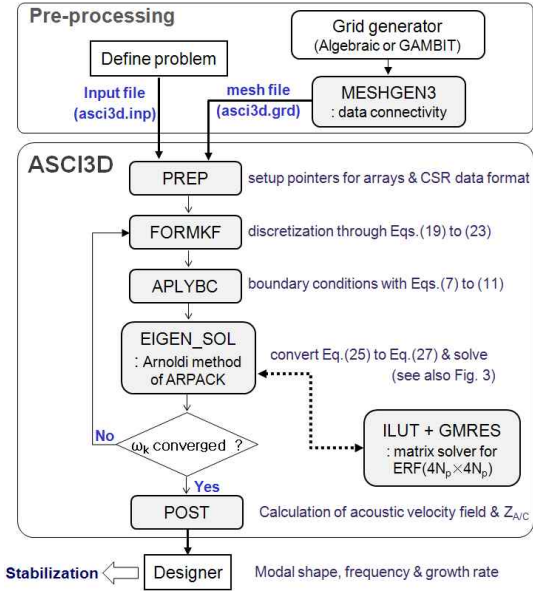


Fig. 4. Structure and subroutines of ASCI3D code

#### IV. 해석 결과 및 검증

##### 4.1 출구경계에 따른 등온 음향 해석

본 연구에서 사용한 수치해석기법을 검증하기 위해 먼저 화염면이 없는 등온 유로[7]에 대해 해석을 수행하였으며, 이론해와 비교하였다. 해석 영역과 경계조건은 Fig. 5와 같으며, 격자 구성의 유연성을 보이기 위해 2차원 해석 영역에 대해 사각형과 삼각형 요소를 혼합하여 격자계를 구성하였다. 이때 격자수  $N_p$ 는 5446개이다. 음향학적으로 오른쪽 출구를 제외하고 모두 닫혀 있을 때, 고유주파수는 식(30)과 같이 오른쪽 출구 임피던스  $Z_L$ 에 따라 결정된다[7].

$$f_m = m \frac{c_0}{2L} + \frac{c_0}{2\pi L} \tan^{-1} \left( \frac{-i}{Z_L} \right) \quad (30)$$

이때 정수  $m$ 은 종 방향 모드 차수를 나타낸다. Fig. 6은 출구경계 임피던스가 허수만을 갖는 경우, 1차 종 방향 음향 모드(first longitudinal acoustic mode)에 대한 고유주파수 예측결과를 비교한 그림이다. 식(30)에서 알 수 있듯이 출구에서 음향 유속이 없으므로 증폭지수(growth rate)는 0이 되고 음향 모드는 중립 상태가 유지된다. 대신 허수부 값에 따라 공진 주파수는 변화하게 된다. 반면에 출구 경계가 실수부만을 갖는 Fig. 7의 결과를 보면, 실수부 값에 대해 공진

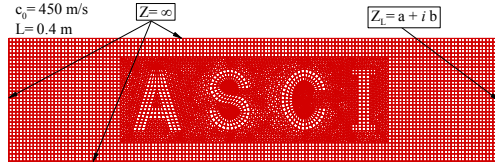


Fig. 5. Mesh and boundary conditions for isothermal longitudinal modes

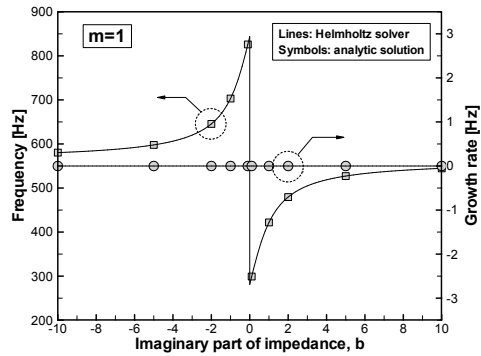


Fig. 6. Eigenfrequency for  $Z_L=ib$

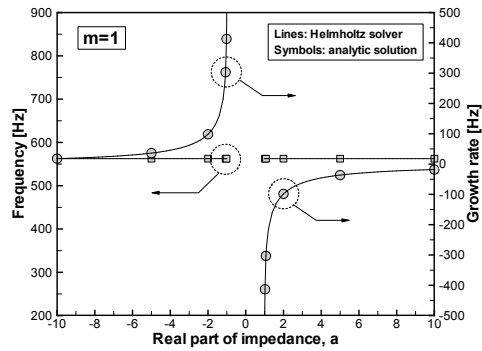


Fig. 7. Eigenfrequency for  $Z_L=a$

주파수는 변화가 없는 대신에 증폭지수는 급격한 변화를 보이게 된다. 해석 결과는 두 경우 모두에 대해 이론해와 일치하는 결과를 나타내었다.

##### 4.2 예혼합 화염의 연소불안정 해석

두 번째 문제로 Fig. 8과 같이 유로 중앙에 예혼합 화염이 존재하는 경우에 화염면의 연소응답 특성에 따른 연소불안정 문제[7]를 해석하였다. 이때 입구는 음향학적으로 닫혀 있으며, 오른쪽 출구는 충분히 큰 공간으로 열린 경계를 갖는다. 유로 내부의 물성치는 중앙에 위치한 무한히 얇은 예혼합 화염을 통해 급격한 변화를 갖는다고 가정한다. 이때 화염면 좌우에서의 일치 조건에 따라 이론해가 존재한다[7]. 화염면의 응답 거동

은 식(14)와 같은 속도 감응 시간지연 모델을 통해 얻어진다. 참고문헌[7]를 참조하여 해석상으로 화염면의 두께  $\delta_f$ 는 0.0004 m를 갖게 하였으며, 속도 섭동의 기준점은  $(x=0.2495, y=0.05)$ 에 위치시켰다. 식(14)에 포함된  $n_u$ 와  $\tau_u$ 는 화염면 내부에서 일정한 값을 갖는다고 가정하였다. 이때  $n_u$ 는 식(13)를 식(12)에 대입하여 얻어지는 값으로  $(n/\delta_f) \times (U_{bulk}/q_{tot}) \times \gamma p_0 / (\gamma - 1)$ 으로 나타나며,  $\tau_u = 10^{-4}$  sec로 주어졌다.

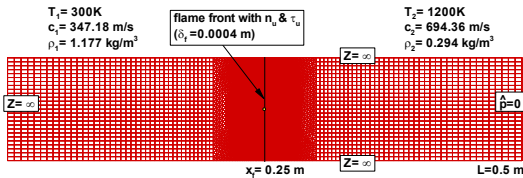


Fig. 8. Coupling between active flame and longitudinal acoustic modes

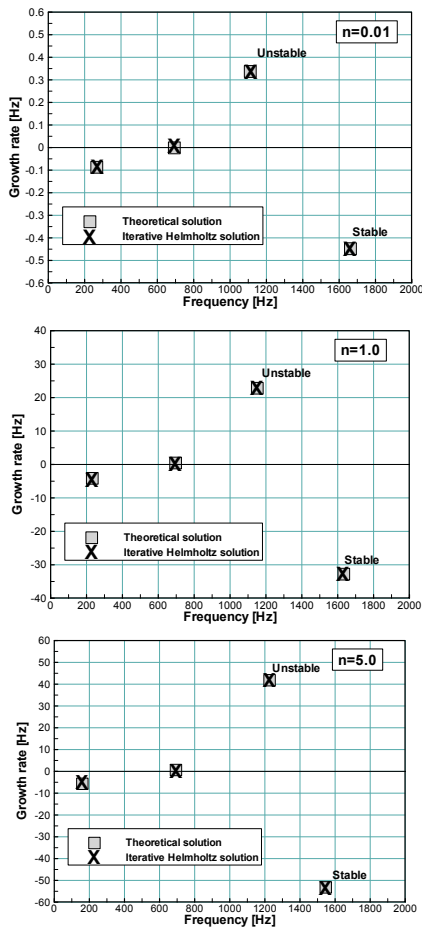


Fig. 9. Eigenfrequency for active flames with  $n=0.01$ (top),  $1.0$ (middle) and  $5.0$ (bottom)

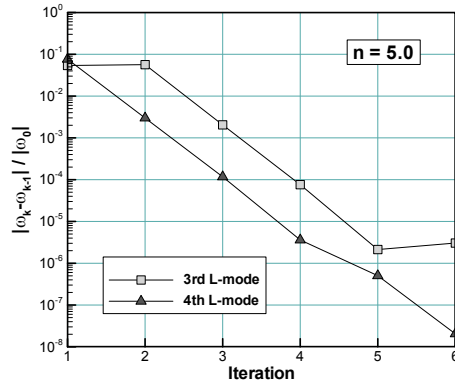


Fig. 10. Convergence history of complex frequency( $n=5$ )

Fig. 9는 전체 간섭지수  $n$ 이 각각 0.01, 1.0, 그리고 5.0으로 변화할 때, 수치해석해와 이론해를 비교한 결과이다. 주어진 시간지연에 대해서 1200 Hz 대역에서 나타나는 3차 중 방향 음향모드가 가장 불안정해지는 것으로 나타났으며, 간섭지수가 증가하면 화염면의 응답 거동도 커지게 되므로 증폭지수 역시 증가하게 된다. 모든 경우에 있어 수치해석으로부터 얻은 공진 주파수와 증폭지수는 이론해와 잘 일치하였다.

3.2절에서 설명하였듯이, 연소응답모델은 복소 각주파수  $\omega$ 에 대해 비선형적으로 나타나기 때문에 반복 계산을 수행해야 한다. Fig. 10은  $n=5$ 인 경우, 반복계산에 따라 3차와 4차 중 방향 모드의 복소 주파수에 대한 반복 오차가 수렴해가는 특성을 보여준다. 반복계산에 따른 복소 주파수의 수렴성을 상당히 양호한 것을 알 수 있으며, 서너 차례 정도의 반복계산을 통해서 충분한 오차범위내의 수렴해를 구할 수 있었다.

### 4.3 배플이 장착된 연소실 음향 해석

마지막으로 액체로켓 연소실에서 나타나는 횡방향 음향 모드를 해석하였으며, 배플 장착 여부에 따른 주파수 변이(frequency shift)를 상온에서 수행된 음향 실험 결과와 비교함으로써 실제 형상을 갖는 3차원 연소실 형상에서 해석코드의 적용성을 검증하였다.

해석 대상이 된 KSR-III 엔진은 개발 과정에서 1680 Hz 대역에서 1차 접선 방향 음향 모드를 갖는 연소불안정 현상을 경험하였으며, 6개의 블레이드와 1개의 허브를 갖는 spoke-and-hub형 배플을 장착함으로써 연소안정성을 확보할 수 있었다. 배플 설계 단계에서 상온 음향시험[24]을 통해 다양한 배플 설계안이 갖는 음향 감쇠 효과를 실험적으로 파악하였으며, Fig. 11은 이때 사



용된 실험장치의 구성을 나타내고 있다. 연소실 헤드면과 배플은 두께 20 mm의 투명 아크릴로 제작되었으며, horn driver unit을 이용하여 랜덤 신호를 발생시키는 음향 가진부와 연소실 내부의 음향 모드를 측정하기 위한 마이크로폰으로 구성되었다. 마이크로폰은 시계 방향으로 30° 간격씩 회전시키며 측정하였으며, 랜덤 신호에 대한 주파수 응답 함수(FRF)을 얻어내어 공진 주파수 및 음향 모드를 파악하였다. 본 연구에서는 배플이 없는 기본 연소실과 축 방향 길이가 90 mm인 배플을 장착한 연소실에 대해 해석을 수행하였다. 실제 연소 상황에서 노즐 목은 음속 조건(choking condition)이 되므로 고체 벽면처럼 음향학적으로 닫힌 경계로 가정할 수 있다. 따라서 고려해야 하는 해석 영역은 분사면에서 노즐 목까지가 된다. 연소실과 배플의 형상 변화에 따라 손쉽게 격자를 구성할 수 있도록 전용 격자 생성 프로그램을 작성하였다.

Fig. 12는 횡 방향 모드(1T, 2T, 3T, 1R)에 대해 배플이 없는 기본 연소실과 배플이 장착된 연

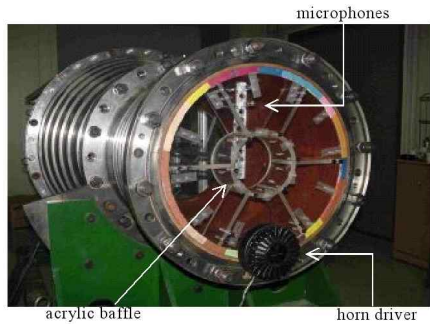


Fig. 11. Ambient acoustic test setup[24]

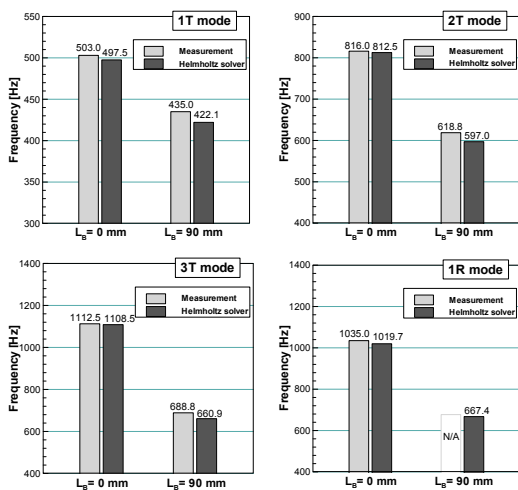


Fig. 12. Frequency shift due to baffle installation for transverse modes

소실에서 나타나는 주파수를 비교한 결과이다. 배플이 장착되는 경우 횡단면을 따라 음향과파 전파될 때 배플을 넘어 가야 하므로 이동거리가 그만큼 증가하게 되고 주파수가 감소한다. 수치 해석 결과는 각 모드에 대한 공진 주파수뿐만 아니라 배플 장착에 의한 주파수 변이를 공학적으로 유의미한 오차 범위 내에서 잘 예측하였다. 연소응답특성이 없는 닫힌 경계에 대해서 해석을 수행했기 때문에 복소 주파수의 허수부, 즉 증폭 지수의 절대값은 수렴판단기준에 해당하는  $10^{-5}$  이내의 값을 보였다. 즉 음향학적으로 중립적인 상태로 생각할 수 있다.

Fig. 13은 음향 모드 형태의 변화를 통해 배플 장착이 각각의 횡 방향 음향모드에 미치는 영향을 살펴 본 결과이다. 이전 연구[11]에서 설명하였듯이, 연소실에서 발생하는 횡 방향 압력섭동이 배플로 인해 나뉘지는 구획(compartment) 내에서 점차 종 방향 모드로 바뀌게 된다. 따라서 분사기 면에서 횡 방향으로 압력 구배가 균일해짐에 따라 분사면에 평행한 방향으로의 속도 교

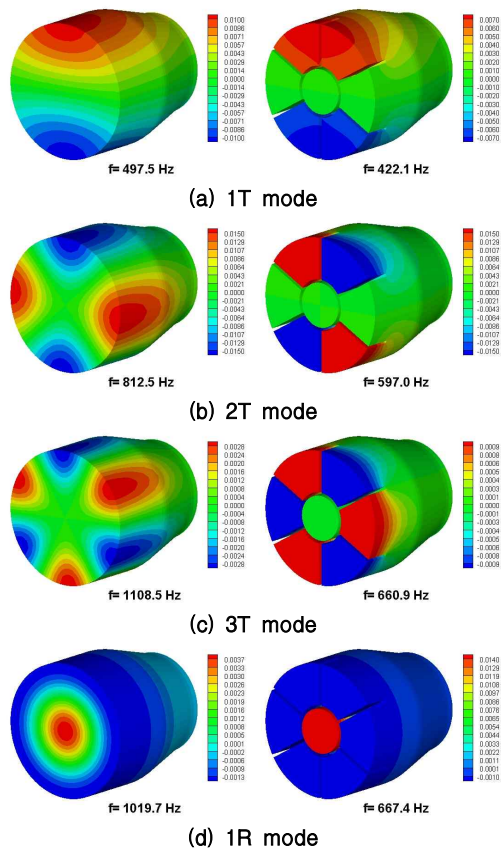


Fig. 13. Effect of baffle on transverse modes

란이 감소하므로 분사기 근방에서 화염 영역의 교란을 억제할 수 있다. 반면에 횡 방향 압력이 배플에 의해 구획화되므로 배플 끝단에서 급격한 압력 구배를 나타나게 되고, 이 지점에서 횡 방향 속도 섭동은 최대가 된다. 따라서 음향 교란에 민감한 영향을 받는 화염 영역(active flame zone)보다 배플 길이가 작게 되면 오히려 연소안정성에 해가 될 수 있으므로 배플의 길이는 이 영역을 충분히 포함하도록 설계되어야 한다.

## V. 결 론

본 연구에서는 최근에 발표된 CERFACS의 AVSP 개발사례[7]를 참조하여 연소불안정 현상을 예측할 수 있는 3차원 유한요소 해석코드인 ASCI3D 코드를 개발하였다. 현재 AVSP 코드는 사면체 격자만을 사용하고 고유치 문제의 해석에 있어 Shift-invert 기법 대신에 표준 해석방법을 사용하는 것에 비해, ASCI3D 코드는 4가지 요소(사면체, 프리즘, 피라미드, 육면체)를 혼합하여 보다 유연하고 효율적인 격자 구성이 가능하고 Shift-invert 기법을 사용함으로써 관심 대상인 음향 모드들을 선별적으로 해석하는 데 있어 빠른 수렴성을 확보할 수 있다.

두 가지 문제를 통해 출구 경계 조건과 예혼합 화염면이 각각 종 방향 음향 모드에 미치는 영향을 살펴보았으며, 이론해와의 비교를 통해 본 연구에서 개발한 ASCI3D 코드가 참고문헌[7]에 나타난 AVSP 코드의 해석결과와 동일한 예측 정확도를 갖는 것을 확인할 수 있었다. 또한 실제 형상의 액체로켓 연소실에서 나타나는 횡 방향 음향 모드를 해석하였으며, 배플의 유무에 따른 해석결과를 상온 음향실험 결과와 비교함으로써 3차원 형상을 갖는 연소실 해석에 적용이 가능함을 알 수 있었다.

시간지연 이론을 기반으로 할 때, 연소불안정을 예측하기 위해 가장 중요한 부분은 실제 연소기에서 나타나는 연소응답 특성을 정확히 모사할 수 있도록 모델 파라미터( $n$ 과  $\tau$ )를 도출하는 것이다. 이를 위해서는 앞으로 모사 연소시험 등을 통한 실험적 방법과 동시에, 선진 연구그룹에서와 같이 LES를 이용한 연소해석방법을 적극적으로 시도해야 할 것으로 사료된다. 연소응답모델에 대한 연구가 충분한 뒷받침이 된다면, 본 해석 코드는 액체로켓엔진과 가스터빈 연소기의 실제 개발 과정에서 연소불안정의 발생 여부를 초기에 예측함으로써 수동 안정화 기구(배플, 음향공진기)를 포함하여 연소안정성을 향상시키는 설

계안을 도출하는 데 기여할 것으로 기대된다. 또한 연소불안정의 구동 메커니즘을 연구하기 위해, 다양한 형태의 연소응답모델을 개발하고 평가하는 해석 도구로 활용될 수 있을 것이다.

## 후 기

본 연구는 교육과학기술부의 한국형발사체 개발사업의 일환으로 수행되었으며, 부분적으로 지식경제부 에너지관리공단의 "한국형 300 MW급 IGCC 실증플랜트 운영기술 개발" 과제의 지원을 받았습니다.

## 참고문헌

- 1) Yang, V. and Anderson, W. E. (eds), "Liquid Rocket Engine Combustion Instability", *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol 169, AIAA, 1995.
- 2) Lieuwen, T. C. and Yang, V. (eds), "Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines", *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol 210, AIAA, 2005.
- 3) Stow, S. and Dowling, A., "Thermoacoustic Oscillations in an Annular Combustor", *ASME Turbo Expo*, 2001-GT-0037.
- 4) Cha, D. J., Kim, J. H., and Joo, Y. J., "Analysis of the Combustion Instability of a Model Gas Turbine Combustor by the Transfer Matrix Method", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, 2009, pp. 1602-1612.
- 5) Pankiewicz, C. and Sattelmayer, T., "Time Domain Simulation of Combustion Instabilities in Annular Combustors", *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 125, No. 3, 2003, pp. 677-685.
- 6) Pierringer, J., Sattelmayer, T., and Fassl, F., "Simulation of Combustion Instabilities in Liquid Rocket Engines with Acoustic Perturbation Equations", *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 25, No. 5, 2009, pp. 1020-1031.
- 7) Nicoud, F., Benoit, L., Sensiau, C., and Poinsot, T., "Acoustic Modes in Combustors with Complex Impedances and Multidimensional Active Flames", *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 2, 2007, pp. 426-441.

- 8) Sensiau, C., Nicoud, F., van Gijzen, M., and Leeuwen, J. W., "A Comparison of Solvers for Quadratic Eigenvalue Problems from Combustion", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 56, 2008, pp. 1481-1487.
- 9) Giauque, A., Selle, L., Poinso, T., Buechner, H., Kaufmann, P., and Krebs, W., "System identification of a large-scale swirled partially premixed combustor using LES and measurements", *Journal of Turbulence*, Vol. 6, No. 21, 2005, pp. 1-20.
- 10) Huang, Y. and Yang, V., "Dynamics and stability of lean-premixed swirl-stabilized combustion", *Progress in Energy and Combustion Science*, Vol. 35, No. 4, 2009, pp. 293-364.
- 11) 김성구, 김홍집, 손채훈, "로켓엔진 연소기 설계의 음향안정성 평가를 위한 해석코드 개발", *한국항공우주학회지*, 제32권 제6호, 2004, pp. 110-116.
- 12) 김홍집, 김성구, "로켓연소실에서 음향공의 음향학적 감쇠에 대한 정량적 고찰", *대한기계학회논문집B*, 제30권 제1호, 2006, pp. 32-40.
- 13) 김홍집, 김성구, 한영민, 최환석, "비행용 가스발생기 모사배관 도출 및 연소불안정 제어를 위한 음향해석", *한국추진공학학회지*, 제9권 제3호, 2005, pp. 1-9.
- 14) Sohn, C. H., Park, I-S., Kim, S.-K., and Kim, H. J., "Acoustic Tuning of Gas-Liquid Scheme Injectors for Acoustic Damping in a Combustion Chamber of a Liquid Rocket Engine", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, 2007, pp. 793-810.
- 15) Lehoucq, R. and Sorensen, D., "ARPACK. User's Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods", [www.caam.rice.edu/software/ARPACK](http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK), 1997.
- 16) Crocco, L. and Cheng, S., "Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors", Butterworths, London, 1956.
- 17) Portillo, J. E. and Sisco, J. C., "Generalized Combustion Instability Model", AIAA-2006-4889, 2006.
- 18) Lieuwen, T., "Modeling Premixed Combustion-Acoustic Wave Interactions: A Review", *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 19, No. 5, 2003, pp. 765-781.
- 19) Smith, R., Ellis, M., Xia, G., Sankaran, V., Anderson, W., and Merkle, C., L., "Computational Investigation of Acoustics and Instabilities in a Longitudinal-Mode Rocket Combustor", *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 11, 2008, pp. 2659-2673.
- 20) 김성구, 박태선, "시간지연 모델을 이용한 액체로켓엔진의 축방향 비선형 연소불안정 해석", KARI-REG-TM-2004-039, 한국항공우주연구원.
- 21) Day, D. and Heroux, M. A., "Solving complex valued linear systems via equivalent real formulations", *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 23, No. 2, 2001, pp. 480-498.
- 22) Munankarmy, A. and Heroux, M. A., "Comparison of two equivalent real formulations for complex-valued linear systems", *American Journal of Undergraduate Research*, Vol. 1, No. 3, 2002, pp. 17-25.
- 23) Saad, Y., "SPARSKIT: a Basic Tool Kit for Sparse Matrix Computations, Version 2", 1994.
- 24) 고영성, 이광진, 김홍집, "액체로켓엔진 연소실에서의 상온 음향 시험", *대한기계학회논문집B*, 제28권 제1호, 2004, pp. 16-23.