

# 구체적 조작·실험을 통한 탐구활동이 평면도형의 성질 이해 및 수학적 의사소통능력에 미치는 영향

임근광<sup>1)</sup>

기하를 학습하기 위해 학생들은 일상생활에서 접하는 대상과 다른 구체적 자료를 사용해서 조사하고, 실험하고, 탐구해 보아야 한다. 구체적 조작활동은 수학적 모델링을 하는 과정에서 수학적 개념이나 절차를 이해하게 하고 이것을 기호로 나타내 주는 것을 도와주고 컴퓨터를 활용한 실험활동은 추상적인 학습내용을 시각화하여 직관적, 탐구적 활동에 초점을 둘 수 있게 한다. 따라서 본 연구는 구체물과 탐구형소프트웨어를 활용하여 구체적 조작·실험 활동을 할 수 있는 활동지를 개발하여 평면도형의 성질을 탐구할 수 있는 방안을 제시하고 그 효과를 검증하였다. 구체적 조작·실험의 수업은 중위 수준과 하위 수준의 학생들에게 평면도형의 성질 이해하는데 효과가 있었으며 상위수준 및 하위수준의 학생들에게 수학적 의사소통능력을 향상시키는데 효과가 있는 것으로 나타났다. 학생들은 조작·실험 활동을 할 때 활동에 필요한 자료의 특성을 먼저 파악해야 하며 학생들에게 활동을 선택하게 할 때 교사의 치밀한 계획과 관찰이 요구된다. 또한 조작활동 후 수학적 의미를 연결짓기 위한 토론 활동이 요구된다.

[주제어] 구체물 조작, 수학실험, 평면도형의 성질, 수학적 의사소통

## I. 서 론

초등학교 기하영역은 도형개념과 공간개념을 육성, 직관력과 논리적 사고력 신장, 발전적·창조적인 사고방법 및 심미안적인 안목을 기르는 것을 목표로 한다. 이와 같은 맥락에서 미국 수학교사 협의회(NCTM, 1991)에서는 기하는 우리가 살고 있는 세계를 질서 정연한 방법으로 표현하고 설명하는데 도움을 주기 때문에 학생들의 공간 능력은 종종 수치적인 기능을 능가하며, 이러한 힘은 수학에서 흥미를 자극하며 수에 대한 이해와 기능을 향상시킨다고 하였다. 따라서 기하를 학습하는데 있어서 학생들이 일상생활에서 접하는 대상과 다른 구체적 자료를 사용해서 조사하고, 실험하고, 탐구해 보아야 하는데 이렇게 아동들이 여러 위치에서 도형을 시각화하고, 그리게 하고, 비교하게 하는 활동은 기하학적 개념과 그 성질의 이해를 촉진하므로 이를 위해서는 특별한 관심을 갖고 기하학적 도형을 시각화하고 표현할 수 있어야 한다(NCTM, 1991).

추상적인 기하수업은 학생들을 당혹스럽게 만든다. 따라서 기하를 지도하기 위해서는 비형식적 기하에 초점을 맞추어 공간을 탐구할 기회를 제공해야 하며 도형의 다양한 예와

예가 아닌 것을 분석하도록 학생을 격려해야 한다. 개념의 핵심적인 속성에 중점을 두고 개념을 정의하기 위해 필요한 최소한의 속성을 비형식적으로 추론할 수 있도록 학생을 도와야 하고, 도형사이의 관계를 발견할 수 있도록 학생을 격려해야 한다(권성룡, 김남균, 김수환, 김용대, 남승인, 류성립, 방정숙, 신준식, 이대현, 이봉주, 조완영, 조정수, 2006).

또한, 수학기초 과정은 재발명(reinvention)의 과정이고 무엇보다 수학기초 과정이 중요하다 하는 프로이텐탈의 주장을 감안하며 학생들은 여러 가지 현상을 접하고 수학적 수단으로 조직해 보는 경험을 우선적으로 경험한 후 형식과 과정을 학습하는 것이 바람직하다(강진호, 강홍규, 2008; 김연식, 정영욱, 1997). Van Hiele에 따르면 도형의 개념을 형성하기 위해서는 형식화 이전에 실험이나 구체물 조작활동이 이루어져야 관계를 발견하고 더 높은 수준으로 갈 수 있다고 주장하였다(김상화, 2010. 재인용). 이런 측면에서 형식화 과정 이전에 구체물 조작, 교구활용, 실험 등 가능하면 직접 혹은 간접적으로 조작해 보는 경험을 해 보는 것이 수학기초를 위해 매우 효과적일 것이다. 또한 초등학교에서는 귀납적 탐구활동이 이루어져야 하므로 다양한 조작활동 및 실험 수업이 필수적인 형태라고 볼 수 있다. 따라서 구체물 조작 및 실험 수학기초에 대한 중요성을 교사가 먼저 인식하고 학생들이 탐구하고 반성적 사고가 나타나도록 다양한 토론수업을 다루어져야 한다는 교사의 인식과 신념이 필요하다.

수학기초를 할 때 구체물은 수학을 행하는데 있어서 학생들로 하여금 무엇인가 생각하도록 하고 무언가를 하게하며 학생들이 수학적 아이디어를 창조하기 위하여 필요한 유형의 사고를 하는 것을 보다 수월하게 한다. 또한 학생이 반영적 사고를 하도록 도와주고 수학적 모델링을 하는 과정에서 수학적 개념이나 절차를 이해하고 이것을 기호로 나타내주는 것을 도와준다(이정재, 2007). 따라서 2007개정 수학과 개정 교육과정에서도 새로운 개념이나 내용의 학습 지도과정에서 구체물을 스스로 조작하여 문제를 해결하도록 권장하고 있다(교육인적자원부, 2009).

초등학교 수준에서 기하는 비형식적인 기하로서 형식적 연역이나 증명보다는 모양과 공간을 탐구하며 도형내의 성질이나 기하도형간의 관련성을 다룬다(정주자, 1996). 수학교육에서 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 학습내용을 시각화하여 구체와 추상의 만남이 가능하게 하고 형식적인 증명이나 개념 학습의 전단계에서 직관적, 탐구적 활동을 통해 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다(신동선, 류희찬, 1998). 또한 컴퓨터 프로그램에 나타난 오류를 이용하면 학생들은 오류를 제거하기 위하여 자신의 행동에 대한 새로운 통찰을 이끌어 내야 하므로 사고력을 향상시킬 수 있다(Papert, 1980).

기하는 직관에 바탕을 두고 있기 때문에 구체물 조작과 컴퓨터 실험활동은 문제를 해결하는 아이디어를 개발하고 의사소통하는데 많은 도움을 줄 수 있다(이정재, 2007; 권성룡 외 9인, 2006).

한편, 수학적 의사소통 능력이 우수한 학생들은 학업성취도도 높으며 수학적 성향이 긍정적으로 변화가 있는 것으로 나타났으며(황현욱, 2009; 신성기, 2009) 수학적 의사소통능력을 신장하기 위해서는 교구를 사용하여 수학적 언어로 구체적인 설명을 할 수 있게 해야 하며 구체물 조작을 통해 수학적 개념과 연결될 수 있도록 해야 한다(장순희, 2002). 개념적 지식이 아동의 마음속에 구성되었을 때 그 연결고리가 되는 것 중에 하나가 곧 모델이다. 개념과 모델 사이, 모델과 기호 사이의 연결이 보다 의미있게 학생들의 마음속에 만들어진다는 것이다. 다시 말해 패턴블럭이나 탱그램 같은 구체물을 이용한 조작활동이나 탐구형소프트웨어를 활용한 수학적 실험은 학생들이 수학적 개념을 이해하게 도와주기 위한 구체적인 방법을 제시해 줄뿐만 아니라 수학적 아이디어를 더 쉽게 내면화시키고, 종종

학생들로 하여금 다른 방법으로 해결할 수 없는 문제들을 해결할 수 있게 해 줄 수 있을 것이다.

따라서 수학적 모델로서 구체물의 조작활동이나 탐구형소프트웨어 통한 수학적 실험을 통해 평면도형의 성질을 탐구하는 방안을 모색, 학생 활동지를 구안 적용하여 조작·실험 수업이 평면도형의 성질 이해 및 수학적 의사소통에 미치는 효과를 분석, 평면도형의 성질 학습지도에 도움을 주고자 본 연구를 추진하게 되었다.

## II. 이론적 배경

### 1. 도형학습 이론

도형은 초등학교 수학의 가장 기초적인 학습영역이지만 시각적 접근 가능성 때문에 그 지도 방법과 학습목표가 수 연산에 비하여 매우 유동적이다(김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이종영, 임문규, 정은실, 2009). 도형의 특수성 때문에 그 동안의 도형 학습에 관한 심리적 연구도 충분하지 못하였고, 학교 수학에서의 도형의 지도 체계와 방법 또한 확립되지 못한 측면이 있다. 최근에 이르기까지 도형 학습에 대한 이론의 연구자로 대표되는 피아제와 반 힐레의 연구 결과를 보면 다음과 같다.

#### 가. 피아제(Piaget)의 도형 학습 이론

피아제는 아동의 도형학습과 공간개념 발달에 대한 심리적 접근을 시도하였다. 즉 인간은 처음 기본적인 몇 가지 반사작용(보기, 빨기, 쥐기 등)과 동화(同化), 조절(調節) 기능만을 가지고 태어나서 주변 환경과 접촉하여 성장하는 과정에서 기본적인 반사작용과 동화, 조절 기능이 점진적으로 분화되면서 내적 인지 구조가 형성된다고 하였다(김수환 외 7인, 2009). 그런데 이런 인지발달 과정은 감각 동작기, 전조작기, 구체적 조작기, 형식적 조작기를 거치게 된다. 이 때 각 단계에 도달하는 연령은 개인적 차가 있으나 각 단계를 거치는 순서를 동일하다. 즉 아동의 구체물 조작 과정에서 제각기 분리되어 있던 심적 기능이 서로 관련되어 작동하여 내적 인지구조가 형성되고, 그에 따라 심적 조작이 가능하게 된다. 이러한 관점에서 피아제는 수학적 사고의 본질은 조작(operation)이고 '조작없는 지식은 생각할 수 없다'고 주장한다. 피아제는 조작을 사물을 구체적으로 다루는 것과 마찬가지로 사고를 통해서 수행할 수 있는 즉, 내면화될 수 있는 가역적 행동으로 설명하고 있다.

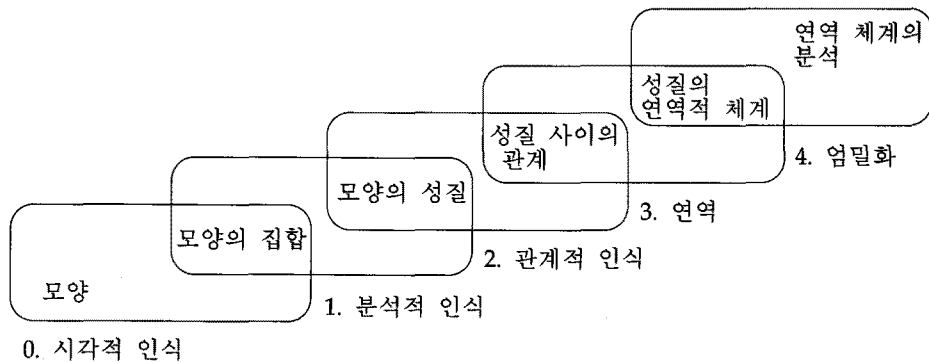
피아제에 의하면 아동의 공간인식은 단순한 위상적 형태에서 출발하여 사영적 사고, 유클리드적 사고로 발전한다(이광욱, 2009). 위상적 사고는 도형이 단절되거나 연결되는 것은 변별할 수 있으나 곡선과 직선의 명확한 구분을 곤란한 사고수준이다. 따라서 삼각형과 사각형의 구별이나 다각형과 원의 명확한 구분은 불가능한 수준이다. 사영적 사고는 관찰자의 위치에 따라 대상을 다르게 인지하는 사고 수준이다. 이 단계는 직선과 곡선, 삼각형과 사각형의 구별은 가능하나 두 점 사이의 거리나 직선의 평행, 수직 개념은 이해할 수 없다. 따라서 평행한 철도도 먼 곳에서 만나는 것으로 생각하고 같은 물건이면 거리에 관계 없이 같은 크기로 그리게 된다. 유클리드적 사고는 도형을 이동하더라도 모양이나 크기가 변하지 않는 양의 보존성 개념이 확립된 사고이다. 이 단계에서 아동은 시각적 혼란에서

벗어나 내적 인지구조가 형성되어 초보적인 논리를 전개할 수 있다. 또 평행, 수직관계나 두 점 사이의 거리 개념을 인지함으로써 도형에 대한 지적 조작이 가능하다.

피아제는 인간 사고의 발달의 본질은 조작이고 조작은 행동의 조정과 내면화의 산물인 가역적 사고의 통합과정이라고 하였다. 따라서 구체물 조작단계의 초등학교 아동의 도형 교육은 활동적 방법으로 접근하는 것이 바람직하다.

#### 나. 판 힐러(Van Hiele)의 기하사고 수준

사람들의 기하적 사고는 다양하다. 사람들 모두는 비슷하지 않지만 기하적인 상황에서 사고하고 추론하는 능력을 발달시킬 능력을 갖고 있다. 판 힐러는 학생들이 기하학습에서 학생들이 부딪치는 어려움을 해소해줄 수 있는 방법을 다각적으로 연구하던 중 기하학습에는 다음과 같은 다섯 가지의 수준이 있으며 아동의 기하적 사고는 이 순서를 따라 발달한다는 것을 밝혀내었다(남승인, 서찬숙, 최진화, 강영란, 홍우주, 배혜진, 김수민, 2008).



[그림 1] Van Hiele의 기하적 사고 수준(남승인 외 7인, 2008. 재인용)

0수준(시각적 인식-visualization) : 0수준에서 사고의 대상은 모양들과 그 모양들이 '무엇처럼 보인다'라고 하는 것이다. 학생들은 모양의 시각적 특징에 기초하여 모양의 이름을 붙이며 인식한다. 이 수준에서는 측정활동을 할 수 있고 모양의 성질에 대해서 이야기할 수 있지만 성질을 추성화하지 못한다. 그것은 학생 스스로가 정의한 모양의 외형일 뿐이다. 이 수준에 있는 학생들은 모양의 외형적 성질에 기초하여 모양을 분류하고 정렬하기 때문에 사각형을 수평면을 기준으로 45°회전시켰다면 그것을 사각형으로 보이지 않을 수도 있다. 즉 0수준에서 사고의 결과는 '비슷하게 보이는' 모양의 집합체이다.

1수준(분석적 인식-analysis) : 1수준에서는 사고의 대상은 각각의 모양보다는 모양의 집합이된다. 분석적 인식 수준의 학생들은 단지 한 가지 모양보다는 오히려 한 집합 내 모든 모양에 대해 생각할 수 있다. 눈 앞에 있는 직사각형 하나에 대해 이야기하는 대신 모든 직사각형에 관해 이야기할 수 있다. 즉, 성질이 같아서 모양을 같이 모아 두었다는 것을 인식하기 시작한다. 모양 하나 하나에 대한 생각들은 그 집합에 적합한 모든 모양으로 일반화 할 수 있다. 즉, 1수준에서 사고의 결과는 모양들에 대한 성질이며 어느 집합이 다른 것의 하위 집합이라는 것을 찾아내지는 못한다.

2수준(관계적 인식-informal deduction) : 2단계에서 사고의 대상은 모양의 성질이다. 학생들은 특정한 대상에 제한을 두지 않고 기하대상의 성질에 대하여 생각하는 능력이 생기

기 시작하면서 성질들 사이의 관계를 발달시킬 수 있다. 관찰은 기하의 성질을 넘어 그 성질에 대한 논리적 증명에 초점을 맞추기 시작한다. 그러나 비형식적인 연역논증을 이해하고 인식할 수 있으나 이 수준에서 증명은 정확한 연역이기 보다는 오히려 직관이다. 이 수준에서 사고의 결과는 기하적 대상들이 가진 성질 사이의 관계이다.

3수준(연역-deduction) : 3수준의 사고의 대상은 기하적 대상들이 가진 성질 사이의 관계이다. 학생들은 모양의 성질보다는 더 많은 것을 검토할 수 있다. 학생들의 초기 사고는 성질들 사이의 연관된 관계를 추측하는 것이다. 이러한 추측들은 정확한가? 사실인가? 이러한 비형식적 논의가 일어나기 시작하면 공리, 정의, 이론, 추론, 가정을 가진 완벽한 시스템 구조가 발전하기 시작하고 기하적 사실을 성립하는 필수 수단으로 인식될 수 있다. 3수준의 사고 대상은 기하에 대한 연역적 공리 체계이다.

4수준(엄밀화-rigor) : 4수준에서 사고의 대상은 기하학에 대한 연역적 공리체계이다. 이 수준에서 주목할 대상은 공리체계 자체이지 체계내의 연역만이 아니다. 다른 공리 체계사이의 관계와 차이를 인식해야 한다. 4수준에서 사고의 결과는 다른 공리체계간 비교와 대조이다.

각 수준의 결과가 다음 수준의 대상이 된다. 그 대상들이 되는 아이디어는 이전 단계에서 만들어지고 그래서 이 대상들 사이의 관계는 다음 수준의 중심이 된다. 또한 피아제의 발달단계처럼 나이에 의존하는 것은 아니며 강의나 언어가 학생의 수준보다 높은 때 실제로 학습은 거의 일어나지 않게 된다. 활동을 통해 학생들은 탐구하고, 이야기하며 다른 수준에 존재하는 경험이 증가하면서 다음 수준에 있는 내용과 상호작용하게 되고 아동들의 사고 수준을 발전시켜주는 가장 좋은 기회를 갖게 된다.

우리나라 학생들의 Van Hiele이론에 의한 수준 분포를 살펴보면(김선렬, 1992; 김미정, 이정희, 1994) 초등학교 6학년 학생은 0수준과 1수준이 약 61%로 나타났고, 2수준 이상이 약 22%로 나타났으며 중학교 2학년 학생들의 약 93.6%, 중학교 3학년 학생들의 약 74.8%가 수준 2이하에서 사고하는 것으로 나타났다. 이와 같이 우리나라 학생의 van Hiele이론에 의한 수준 분포가 낮은 이유를 진무숙(1996)은 도형의 개념과 성질을 모르는데서 오는 어려움이 있어 증명할 내용에 대한 이해가 없기 때문이라고 하였다.

본 연구는 4학년 학생들을 대상으로 한다. 따라서 교육과정상이나 학생들의 수준이 0-2, 수준에 위치하고 있으며 0-2수준에 적합한 기하교육활동으로 단순히 동일하다는 것보다 모양의 성질에 더 초점을 맞추어야 하며 개개의 모델 보다는 모든 직사각형처럼 모양 전체 집합 아이디어를 적용해야 한다. 그리고 가설을 만들거나 추측하고 확인해 보도록 주장해야 하며 학생들이 비형식적 증명을 시도하도록 격려해야 한다. 학생들이 1, 2수준으로 이동하도록 약간의 추론을 요구하는 “왜”라는 질문을 해야 하며 예를 들어 “네 변의 길이가 같다면 그것은 항상 정사각형인가? 아니라면 반례를 찾을 수 있는가?”와 같은 질문하는 활동이 필요하며 탐구형소프트웨어는 이와 같은 탐구하는데 특히 유용하다(남승인 외 7인, 2008).

## 2. 구체물 조작 실험을 통한 평면도형의 성질 탐구 방안

초등학교에서 평면도형의 성질 학습은 먼저 분류를 통해 공통점을 추상화한 후 개념을 정의하고 성질을 발견하게 하는 흐름으로 진행된다. 즉 개념이란 다양한 사실이나 현상들을 공통 성질에 따라 범주화한 것(교육인적자원부, 2009)이므로 개념과 성질을 분리하여 지도하지 않고 동일 선상에서 지도된다. 따라서 평면도형의 성질을 탐구한다는 것은 평면

도형의 개념을 어떤 수업흐름으로 도입하고 그 과정에서 구체물 조작 실험을 통해 평면도형의 성질을 어떻게 탐구할 수 있는지를 알아보는 것일 것이다.

스캅프는 개념을 공통성질에 대한 상징적 표현으로 규정(황우형, 2000)하면서 개념 형성을 하는 대표적인 조작으로 분류와 추상화를 제안하였다. 분류는 다양한 사실들을 공통 성질에 근거하여 모으는 활동이며 추상화는 공통성질을 명확하게 인식하는 활동이다. 즉 개념형성은 다루고자 하는 대상들을 분류하고 공통 성질을 추상화하는 정신 작용이다. 스캅프는 학생들에게 수학적 개념에 대한 적절한 범례 즉, 정례(example)와 비례(non-example)를 제시하고 공통적인 성질을 추상화하여 개념을 형성하도록 하는 것이 효과적이라고 주장하였다.

의미있는 수학적 개념 형성을 위해서는 단지 개념의 언어적 정의만을 학습하는 것으로는 부족하다. 학생들은 범례의 분류 및 공통성질의 추상화 활동을 통해 보다 명확하게 개념을 형성해야 한다(교육인적자원부, 2005). 추상화가 이루어졌다면 추상화된 공통 성질을 활용하여 수학적 용어와 기호로 개념을 정의하고 정의된 개념의 결정적 성질(속성)과 비결정적 성질(속성)을 조사한 후 개념을 익히는 활동을 해야 한다. 즉 평면도형의 개념형성 수업은 범례제시 및 분류→공통의 성질 추상화→개념 정의→성질 조사하기→개념 익히기로 요약할 수 있다(교육인적자원부, 2009).

학생들이 정의한 개념은 또 다른 개념을 정의하기 위해 필수적으로 이용되므로 학생들이 도형의 정의를 학생들의 언어로 정교화하고 이를 익히는 활동이 요구되므로 변별하는 활동이 요구된다. 예를 들어 마름모를 배웠다면 정례(example)와 비례(non-example)를 제시하며 '이것은 마름모니 아니니? 왜 그렇게 생각하니?'와 같은 발문을 통해 학생이 도형의 정의를 자신의 언어로 표현해 보는 활동이 요구되며 개념을 익힐 때 단지 교과서나 익힘책의 문제를 해결하는 것 보다는 개념이나 성질을 명확히 익힐 수 있는 작도 또는 평면도형 만들기 활동이 더 바람직할 것이다. 또한 수학을 학습했다만 내가 배운 수학이 우리 생활에 어떻게 이용되는지 수학적 유용성을 느낄 수 있는 활동이 요구된다. 즉 예를 들어 마름모를 학습했다면 우리 생활에 마름모가 어떻게 이용되는지 생활에 적용해 보는 활동이 요구된다. 따라서 개념형성 수업의 흐름을 다시 요약하면 범례제시 및 분류→공통의 성질 추상화→개념 정의→변별하기→성질 조사하기→작도 또는 만들기→생활화의 과정으로 지도하는 것이 바람직 할 것이다.

이와 같은 수업의 과정에서 구체물 조작활동이나 컴퓨터를 이용한 실험활동은 언제 요구되는가? 교사의 교재관이나 학생들이 실패에 따라 다를 수 있기 때문에 이를 단정적으로 제시하기는 어렵다. 그러나 수업 준비를 위한 자료제시 측면과 학생활동중심의 수학교육, 그리고 각각의 구체물 자료 또는 탐구형소프트웨어의 특성 고려해 본다면 다음과 같은 과정에서 어떤 구체물 조작과 실험이 필요한지를 느낄 수 있을 것이다.

범례제시 및 분류 활동에 패턴블록이나 탱그램을 섞어 놓고 공통된 도형을 찾아 추상화하게 할 수 있으며 변별하기 단계에서도 추상화된 결과를 확인할 때 활용될 수 있다. 특히 작도 또는 만들기 단계에서 몇 개의 블록으로 이 시간 학습한 평면도형을 만들게 하는 활동은 학생들이 만드는 활동 내내 도형의 정의나 성질을 머릿속에 생각하면서 활동하게 할 것이다. 특히 점판은 일정한 간격으로 구성된 점을 연결하여 자신이 원하는 도형을 구성할 수 있으므로 작도 활동에 유리하게 활용할 수 있을 것이다.

패턴블록의 변의 길이가 같거나 두 배라는 점은 블록들을 서로 맞추어 배열할 수 있게 해주고 도형들 간의 관계를 탐구해 보는데 유리하며 탱그램은 다각형의 기본 개념을 이해하고, 다각형의 여러 성질을 논의하는데 유용하게 활용될 수 있고 점판은 기하학적 관계

를 탐구하는 장치로서 발견적 수업 활동에서 기하판을 사용하는 것은 매우 효과적일 것이다(김성만, 주미자, 한기완, 1999).

수학을 탐구하기 위한 도구로서 컴퓨터의 활용은 조작적인 경험과 수학적 개념 사이를 연결해 주며, 추측하고 예상한 내용을 즉각적으로 확인해 줌으로써 직관적인 사고력과 논리적인 추론능력을 향상시킬 수 있을 뿐만 아니라 수학적 사실을 발견할 수 있도록 도울 수 있다(신동선, 류희찬, 1998). 따라서 평면기하의 어떤 성질이 성립할 것인가?를 탐구하기 위해 컴퓨터를 마치 실험도구로 사용하여 실제로 작도하고, 측정하여 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와 줄 수 있다(임근광, 1999). 따라서 Cabri와 같은 기하프로그램은 변별하기 단계나 성질 발견하기 단계, 작도하기 단계에서 유용하게 활용할 수 있을 것이다. 또한 같은 개념이라도 다양한 상황 속에서 경험하도록 해야 한다. 신체동조적 특성을 가지고 있는 거북명령프로그램으로 도형을 그리는 것 자체가 평면도형의 개념을 강화할 수 있는 좋은 도구가 되며 특히 개념과 성질을 모두 인지했을 때 작도가 가능하므로 거북명령프로그램을 원하는 도형이 작도되지 않았을 때 오류를 수정하는 과정에서 반성적 사고는 물론 도형의 또 다른 성질을 발견하게 할 것이다.

### III. 연구 방법 및 절차

#### 1. 연구 대상 및 기간

Y초등학교 4학년 전체에 학기초 진단평가를 실시하여 연구반과 비교반으로 나누었고 타당도의 저해 요인을 최소화하기 위하여 각 집단에 2차 사전학력진단 평가를 실시하여 각 집단의 평균(M)과 표준편차(SD),  $M \pm SD$ 에 의거하여 상위 집단 8명, 중위집단 14명, 하위집단 8명, 집단 별 30명을 분석 대상으로 선정하였다. 연구기간은 4학년 수학교육과정상에 평면도형(기하)과 관련된 전 과정으로 하였다.

#### 2. 연구 방법

본 연구는 구체물의 조작활동이나 탐구형소프트웨어 실험을 통해 평면도형의 성질을 탐구할 수 있는 활동지를 개발하는 자료개발 연구와 이를 적용하여 효과를 검증하는 실험연구로 진행되었다. 자료개발 연구를 위한 자료개발의 방향과 효과 검증을 위한 실험연구 설계는 다음과 같다.

##### 가. 구체적 조작·실험 활동을 위한 활동지 개발 방향

다음과 같은 활동지 개발 방향에 따라 개발한 후 개발한 활동지는 교내 공개 수업 및 교과교육연구회 시단위 초추수업에 참가한 교사를 대상으로 워크숍을 실시하여 의견을 수렴, 수정·보완하였다.

(1) Cabri를 이용한 평면도형의 성질을 탐구하는 방안은 추정하거나 탐구하는데 초점을 둘 수 있는 내용, 구체물 조작으로 쉽게 오차가 발생할 수 있는 내용, 평면도형의 성질을 동적인 측면에서 이해할 수 있는 내용을 선정하여 실험 활동지를 개발하였다.

(2) 거북명령프로그램을 이용한 평면도형의 성질 탐구 방안으로 문제 분석단계→ 계획

단계 → 예상 및 실행단계 → 확인 및 오류 수정의 단계로 활용상의 유의점을 바탕으로 실험 활동지를 개발하였다.

(3) 패턴블록과 탱그램을 활용한 평면도형의 성질 탐구 방안으로 학생들이 패턴블록이나 탱그램을 조작하면서 도형의 개념, 성질, 관계를 말하고, 기술하고, 질문하고, 설명하는 과정에 중점을 두고 조작 활동지를 개발하였다.

(4) 점판을 활용한 평면도형의 성질 탐구 방안으로 도형의 개념 형성을 위한 활동, 도형간의 관계를 탐구하는 활동, 도형의 성질 발견 및 확인 지도 활용에 구성 방향을 두고 조작 활동지를 개발하였다.

#### 나. 구체적 조작·실험 수업집단의 평면도형의 성질 이해 및 수학적 의사소통 능력 분석

구체적 조작·실험의 효과검증을 위한 평면도형의 성질 이해도 및 수학적 의사소통 능력 분석의 실험설계는 <표 1>과 같다.

<표 1> 효과검증을 위한 실험설계

실험 집단	O1	X1	O2	O3
비교 집단	O1	X2	O2	O3

O<sub>1</sub> : 사전 학력 진단 검사

X<sub>1</sub> : 조작·실험을 통한 수업집단

X<sub>2</sub> : 일반적인 수업 집단

O<sub>2</sub> : 평면도형의 성질 이해도 검사

O<sub>3</sub> : 수학적 의사소통 능력 검사

일반적 수업집단은 교과서와 교사용 지도서 제시된 내용을 중심으로 진행된 수업으로 교과서 내용에 제시된 탱그램이나 점판과 관련된 활동은 부분적으로 이루어졌으나 패턴블록을 통한 탐구나 컴퓨터를 통한 실험활동은 이루어지지 않은 집단이다. 조작·실험을 통한 수업집단은 탱그램, 패턴블록, 점판 등의 구체물 조작활동과 컴퓨터를 이용하여 실험 및 탐구활동을 한 수업 집단이다.

### 3. 검사 도구

#### 가. 사전 학력 진단 검사

사전 학력 진단 검사는 4학년 두 집단에 대한 동질성을 확인하기 위한 목적으로 실시하였다. 학기초에 진단평가를 통해 동질성을 확인하는 것이 불충하다고 생각되어 3학년 가, 나단계의 내용을 중심으로 본 연구자가 직접 작성하였으며 25문항이었다.

#### 나. 사후 평면도형의 성질 이해도 검사

탐구형 소프트웨어와 구체물을 통한 구체적 조작·실험 수업 후 평면도형의 성질 이해에 대한 효과를 알아보기 위한 검사로 평가 내용은 <표 2>와 같이 30문항으로 구성하였다.



<표 2> 사후 평면도형의 성질 이해도 검사 문항 배치

평가요소	문항번호	문항 수
도형의 분류	1, 19	2
삼각형의 세 각의 합	2, 3,	2
여러 가지 삼각형의 성질	4, 6, 7, 18	4
평행 및 두 직선이 만나서 이루는 각	5, 21, 26, 27	4
사각형의 개념 (사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형, 사각형간의 관계)	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 29, 30	16
다각형 및 대각선	20, 28	5

#### 다. 수학적 의사소통 능력 검사

구체적 조작·실험 수업 집단의 수학적 의사소통 능력을 분석하기 위한 검사로 검사 내용은 <표 3>과 같다.

<표 3> 수학적 의사소통 능력 검사 문항 배치

문항	평가 내용	문항	평가내용
1	사각형의 네 각의 합을 구하는 방법	5	평행사변형의 성질
2	평행한 두 직선이 만나서 이루는 각	6	마름모의 성질
3	둔각삼각형과 삼각형의 세 각의 합	7	사각형과의 관계
4	이동변 삼각형의 성질	8	사각형의 포함관계

#### 4. 자료의 수집 및 분석

구체적 조작·실험 수학수업 후 평면도형의 성질 이해도 및 수학적 의사소통 능력을 분석하기 위하여 사전 학력 진단 검사를 실시하고, 실험 처치 후 평면도형의 성질 이해도, 수학적 의사소통 능력 검사를 통하여 자료를 수집하였다. 또한 수집된 자료의 분석은 다음과 같다.

가. 사전 학력 진단 검사를 통해 실험집단과 비교집단의 평균의 차를 Two Sample T-test하여 두 집단의 동질성 여부를 검증한다.

나. 평면도형의 성질 이해도를 분석하기 위하여 실험집단과 비교집단의 상위그룹, 중위그룹, 하위그룹의 결과를 Paired Sample T-test하여 평면도형의 성질 이해에 미치는 효과가 있는지 알아보았다.

다. 사후 수학적 의사소통능력 검사를 분석하기 위하여 검사 문항에 대해서 분석 채점법에 의거 문항별 채점을 실시한 후, Paired Sample T-test하여 실험집단과 비교집단 사이에 유의미한 차이가 있는지 알아보았다.

본 연구에서 쓰이는 t-검정과 일원 변량 분석은 Spss를 이용하여 실시하였다.

### IV. 연구의 설계 및 결과

#### 1. 구체적 조작·실험 활동지 개발 및 적용

##### 가. Cabri를 통한 평면도형의 성질 탐구 실험 활동지 개발

(1) 귀납적 방법과 직관적 방법으로 추정하거나 탐구활동에 초점을 둘 수 있는 내용을 선정하였다.

(2) Cabri를 이용하면 쉽게 구현할 수 있으나 구체물 조작활동시에는 쉽게 오차가 발생하여 학습자에게 혼동을 줄 우려가 있는 내용을 선정하였다.

(3) 평면기하의 성질을 동적인 측면에서 이해할 수 있는 내용을 선정한다.

(4) 그린 도형을 마우스로 조작할 때 도형 간의 독립과 종속 관계로 인해 조작 상의 어려움을 겪을 수 있다는 점을 고려하여 지도해야 한다. 예를 들어 직선 가나에 평행한 직선 다라를 그었다면 직선 가나를 변화시키지 않고서는 직선 다라를 직접 변화시킬 수 없다는 점에 대한 이해가 선행되어야 한다.

<표 4> Cabri 활용 실험 활동 개발 자료 목록

단계	단원	주제	Cabri메뉴
4가	3. 각도	삼각형의 세 각의 합, 사각형의 네 각의 합	삼각형, 계산기, 다각형
4나	4. 수직과 평행	평행선과 한 직선이 만나서 이루는 각	직선, 평행선, 각의 크기
4나	5. 사각형과 도형만들기	평행사변형의 성질	선분, 계산기

**Cabri 실험 활동지**

단원	4-나-5. 사각형과 도형만들기	주제	평행사변형
[학년] 학 [반] 이 중 :			

**준비활동** 선분, 계산기

● 선분 : 「선분」 도구는 두 점 사이의 선분을 그리는 도구이다. 「선분」 도구를 선택한 후 한 점을 클릭하고 원하는 위치에 다시 한 점을 클릭하면 두 점을 잇는 선분이 그려진다.

● 길조기/보이기 : 「길조기/보이기」 도구는 선택한 객체(도형)를 숨기거나 숨겨진 객체(도형)를 다시 보이게 하는 도구이다. 「길조기/보이기」 도구를 선택한 후 숨기고자 하는 객체(점, 선분, 직선 등)를 클릭하면 선택된 객체가 검은색으로 표시되어 있다. 다른 도구를 선택하면 화면상에 보이지 않는다. 하지만 기하학적인 규칙이나 속성을 그대로 유지하고 있으며 다시 「길조기/보이기」 도구를 선택하면 숨겨져 있던 객체가 검은색으로 표시되고 보이거기를 원하는 객체를 클릭하면 원래 그려진 상태 그대로 보여진다.

● 거리, 길이 : 「거리, 길이」 도구는 선분이나 두 점 사이의 길이, 원주, 폴리곤의 길이, 반지름 등을 측정해 주는 도구이다. 예를 들어 선분의 길이를 구하고자 할 때 이 도구를 선택한 후 구하고자 하는 선분 각점이 마우스 포인터를 가져가면 「선분의 길이」라는 지시어가 보이는데 이 때 클릭하면 바로 그 선분의 길이를 보여준다.

**활동 1** Cabri를 이용하여 평행사변형을 그려보자.

1. 선분 AB를 그려라(「선분」)
2. 선분 AB에 평행한 직선을 그린다(「평행선」)
3. 새로운 직선의 왼쪽 끝의 한 점을 D라는 라벨을 붙인다(「도형의 이름」)
4. 점 A와 평행한 직선을 잇는 선분 AD를 그린다.
5. 점 B를 지나고 선분 AD에 평행한 직선을 그린다(「평행선」 도구 클릭→선분 AD를 클릭→점 B를 클릭 순서)
6. 이 때 생기는 교점에 점 C라는 라벨을 붙인다.
7. 「길조기/보이기」 도구를 이용하여 직선 BC와 직선 CD 가까이 마우스를 옮기고 「이 직선」이라는 글자가 보일 때 클릭한다(직선이 검은색으로 보인다)
8. 「선분」 도구를 선택(이 때 검은색으로 보이지 않음)해서 선분 ED와 선분 BC를 그린다.

● 「거리, 길이」 도구를 이용하여 평행사변형의 모든 변의 길이를 구해보고 「각의 크기」 도구를 이용하여 각의 크기를 구해보라. 여기서 관찰한 사실을 적어보라.

**활동으로 맞게 된 것**

● 「선택 취소표」 도구를 이용하여 점 A, 점 B, 점 C를 드래그하여 보고, 선분 AB와 선분 AD를 드래그 하여 평행사변형의 모양을 변화시키면서 각의 크기와 선분의 길이가 어떻게 되는지 알아보라. 여기서 알 수 있는 사실을 적어보라.

[그림 2] Cabri 활용 실험활동 자료 개발의 예

나. 거북명령프로그램 활용 평면도형의 성질 실험활동지 개발

활동지의 내용 전개 절차를 대체로 문제 분석단계 → 계획단계 → 예상 및 실행 단계 → 확인 및 오류수정 단계의 흐름으로 전개하였다. 이는 Polya가 말하는 문제해결의 단계, 즉 문제이해, 계획, 실행, 반성의 단계와 유사하다. 따라서 예를 들어, 한 각과 두 변의 길이만 주어져 있는 평행사변형을 그리기 위한 수업에서 문제 분석단계에서 주어지지 않은 나머지 각과 변의 길이를 구하고, 계획단계에서 이 평행사변형을 그리는 과정을 말로 표현해 보고, 예상 및 실행단계에서 말로 표현된 것을 거북명령 언어로 번역하여 직접 실행해 보고, 확인 및 오류 수정 단계에서는 잘못된 점을 찾아내서 다시 실행해 보는 과정으로 전개하였다.

<표 5> 거북명령프로그램 활용 실험 활동 개발 자료 목록

단계	단원	주제	비고(사용명령어)
4나	5. 사각형과 도형 만들기	정사각형과 직사각형	가자, 돌자
4나	5. 사각형과 도형 만들기	평행사변형과 마름모	가자, 돌자
4가	3. 삼각형	정삼각형	가자, 돌자
4나	5. 사각형과 도형 만들기	정다각형	반복
4재량	원	원	반복
4재량	모양만들기	여러 가지 모양만들기	반복
4재량	도형변환시키기	회전이동	반복(2번이상)
4재량	도형변환시키기	답은 이동	반복(2번이상)
4재량	도형변환시키기	대칭이동	반복, 돌자-
4재량	도형변환시키기	2개 이상의 도형 회전이동	반복

거북명령프로그램 실험 활동지

단원	4나-5. 사각형과 도형만들기	주제	평행사변형과 마름모
----	------------------	----	------------

4학년 반 반 이름: \_\_\_\_\_

**활동 1** 다음 주어진 평행사변형을 거북명령프로그램을 이용하여 그려 보아라.

1. 주어지지 않은 변의 길이와 각의 크기를 구하여라.
2. 위의 평행사변형을 그리는 명령을 적어 보아라.
3. 평행사변형을 그리는 명령을 실행해 보아라.
4. 평행사변형을 그렸습니까? 만약 그려지지 않았다면 어디가 잘못되었는지 찾아 명령을 수정하여 다시 실행해 보아라.

**활동으로 알게 될 것**

1. 거북명령프로그램을 이용하여 평행사변형을 그리는 명령을 보고 평행사변형의 성질을 적어 보아라.

**역하기** 직사각형과 평행사변형을 이용하여 다음과 같은 모양을 그려 보아라.

**활동 2** 다음 주어진 마름모를 거북명령프로그램을 이용하여 그려 보아라.

1. 주어진 도형을 그리는 중요한 요소는 무엇인가?
2. 위의 마름모를 그리는 명령을 적어 보아라.
3. 마름모를 그리는 명령을 실행해 보아라.
4. 마름모를 그렸습니까? 만약 그려지지 않았다면 어디가 잘못되었는지 찾아 명령을 수정하여 다시 실행해 보아라.

**활동으로 알게 될 것**

1. 거북명령프로그램을 이용하여 마름모를 그리는 명령을 보고 마름모의 성질을 적어 보아라.
2. 평행사변형은 마름모라고 할 수 있습니까? 왜 그렇게 생각합니까?

**역하기** 마름모를 이용하여 다음과 같은 모양을 그려 보아라.

[그림 3] 거북명령프로그램 활용 조작활동 자료 개발의 예

#### 다. 패턴블록, 탱그램 활용 평면도형의 성질 실험활동지 개발

(1) 패턴블록을 사용할 때 학생들이 형식적인 명칭(예: 정삼각형, 마름모)과 비형식적인 명칭(예: 주황색, 녹색, 네모, 세모)을 사용할 수도 있다. 교사는 이런 형식적인 명칭과 비형식적인 명칭을 섞어서 사용해서 아동들이 편안하고 자연스런 방식으로 형식적인 명칭을 사용할 수 있도록 하였다.

(2) 학생들이 패턴블록이나 탱그램을 조작하면서 말하고, 기술하고, 질문하고, 설명하는 과정을 장려하여 학생들의 수학적 의사소통을 촉진시키는데 중점을 두었다.

(3) 처음에는 구획선이 주어진 것을 활용하였다. 구획선이 그어져 있으므로 하위수준 학생들도 어떤 조각으로 어떻게 구성하였는지 쉽게 알 수 있을 것이다. 다음에는 구획선이 없고 전체의 윤곽만 주어진 것을 활용하게 하였다. 도형판을 이리저리 돌려 맞추어 보면서 공간에서의 위치 지각 능력과 공간 추론 능력을 기르게 하였다.

(4) 블록을 이용하여 직각삼각형, 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 사다리꼴, 육각형 등 여러 가지 다각형을 만들어 보게 하고 다각형의 성질을 조사하게 하였다. 똑같은 다각형을 여러 가지 방법으로 만들어 보게 하고, 각 변의 길이, 각의 크기, 평행관계, 대칭관계 등을 알게 보게 하였다.

(5) 가능하면 언제든지 학생들이 추측(예상)해 보고, 어렵해 본 후에, 실제 결과와 그것을 비교해 보게 하였다.


(6) 학생들이 패턴블록이나 탱그램 활동을 쉽고 간편하게 하기 위해 삼각형 격자지를 함께 사용하였다.

<표 6> 패턴블록 활용 조작 활동 개발 자료 목록

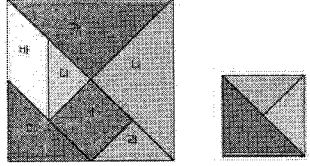
단계	단원	주제
4가	3. 각도	삼각형의 세 각의 합, 사각형의 네 각의 합
4가	4. 삼각형	정삼각형의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	사다리꼴의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	평행사변형의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	마름모의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	여러 가지 사각형

<표 7> 탱그램 활용 조작 활동 개발 자료 목록

단계	단원	주제
4가	5. 삼각형	이등변삼각형의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	사다리꼴의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	평행사변형의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	직사각형의 성질
4나	5. 사각형과 도형만들기	정사각형의 성질

패턴블록 조작 활동지			
단원	4-나 5. 사각형과 도형만들기	주제	사다리꼴
4학년 반 별 이름 :			
<b>활동</b> 다음은 블록 4개를 이용하여 사다리꼴을 만든 것이다. 이와 같은 방법으로 사다리꼴을 만들어 보자.			
			
① 블록 2개를 이용하여 사다리꼴을 만들어 보자. ② 블록 3개를 이용하여 사다리꼴을 만들어 보자. ③ 블록 5개를 이용하여 사다리꼴을 만들어 보자. ④ 블록 6개를 이용하여 사다리꼴을 만들어 보자.			
<b>활동으로 알게 될 것</b>			
① 블록을 이용하여 사다리꼴을 만들 때 사다리꼴의 어떤 성질을 이용하면 되는지 찾아보자.			
<b>역사기</b>			
① 6개의 블록 중 사다리꼴을 모두 찾아 그 모양을 그려 보아라.			

탱그램 조작 활동지			
단원	4-나 5. 사각형과 도형만들기	주제	정사각형
4학년 반 별 이름 :			
<b>활동</b> 다음은 탱그램 몇 조각을 이용하여 정사각형을 만든 것이다. 이와 같이 주어진 조건에 맞는 탱그램을 이용하여 정사각형을 만들어 보아라.			
			
① 다, 라 ② 다, 라, 마 ③ 가, 다, 라, 바 ④ 가, 다, 라, 사			
⑤ 가, 나 ⑥ 가, 다, 라, 마 ⑦ 다, 라, 마, 바, 사			
<b>문제해결</b> 다음 조건을 만족하는 도형을 탱그램 5조각을 이용하여 만들어 보아라.			
<b>조건</b>			
• 편이 4개 있는 도형이다. • 사다리꼴이다. • 평행사변형이다. • 마름모이다.			

[그림 4] 패턴블록, 탱그램 활용 조작활동 자료 개발의 예

라. 점판 활용 평면도형의 성질 조작활동지 개발

(1) 도형의 개념 형성과 도형간의 관계를 탐구하는 활동에 활용하였다. “점판위에 예각 삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형을 그려보아라”와 같은 활동을 통해 도형의 개념을 형성하는 활동에 활용하도록 하였고, “직사각형을 이용하여 평행사변형과 마름모를 그려 보아라”와 같은 활동을 통해 주어진 도형을 지정한 도형으로 적절히 변형함으로써, 원래의 도형인 직사각형과 평행사변형 및 마름모의 관계를 이해할 수 있게 하였다.

(2) 도형의 성질 발견 및 확인 지도에 활용하였다. “직사각형을 점판 위에 그리고 평행한 변이 몇 쌍인지, 네 각의 크기는 몇 도인지 알아보아라”와 같은 활동을 통해 도형의 성질 및 확인 지도에 활용하였다.

(3) 조작활동 후 수학적 의사소통 능력을 신장시키는데 활용하였다. “사다리꼴, 정사각형, 직사각형의 관계를 쓰시오”와 같은 질문에 답하게 함으로써 개념과 성질을 기초로 한 자신이 알고 있는 수학적 용어를 이용하여 설명해 보는 활동에 이용하였다.

<표 8> 점판 활용 조작 활동 개발 자료 목록

단계	단원	주제
4-가	3. 각도	사각형의 네 각의 합
4-가	4. 삼각형	여러 가지 삼각형(예각, 둔각, 직각삼각형)
4-나	5. 사각형과 도형만들기	사다리꼴과 평행사변형의 성질
4-나	5. 사각형과 도형만들기	마름모의 성질

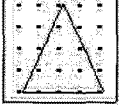
4-나	5. 사각형과 도형만들기	직사각형과 정사각형의 성질
4-나	5. 사각형과 도형만들기	여러 가지 다각형의 대각선
4-나	5. 사각형과 도형만들기	규칙에 맞게 도형 만들기
4-나	5. 사각형과 도형만들기	규칙에 맞게 도형 만들기

점판 조작활동지


단원	4-나 5. 사각형과 도형만들기	주제	대각선
----	-------------------	----	-----

(학년) (반) (번호) (이름):

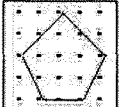
**활동 1** 점판 위에 다음 도형의 대각선을 그려보고 그 수를 쓰시오.




대각선의 수 ( )개



대각선의 수 ( )개

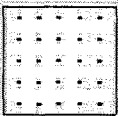
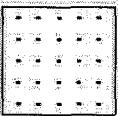
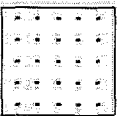


대각선의 수 ( )개



대각선의 수 ( )개

**활동 2** 점판에 다각형을 그려보아라. 그리고 대각선도 그리고 몇 개인지 확인해 보아라.


● 다각형과 대각선의 관계를 써라.

점판 조작활동지


단원	4-나 5. 사각형과 도형만들기	주제	규칙에 맞게 도형만들기
----	-------------------	----	--------------

(학년) (반) (번호) (이름):


**활동** 다음 점판위에 그려진 도형에서 관찰할 수 있는 도형을 모두 쓰고 규칙에 맞게 도형을 그려보아라.



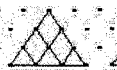
● 관찰할 수 있는 도형:



● 관찰할 수 있는 도형:



● 관찰할 수 있는 도형:



● 관찰할 수 있는 도형:

[그림 5] 점판 활용 조작활동 자료 개발의 예

바. 조작·실험 활동의 적용

개발한 조작·실험 활동지의 단원별, 학습요소별 투입한 시기를 도입-전개-정리 단계로 제시하면 <표 9>와 같다. 학생들에게 투입하는 활동이 많다고 해서 학생들이 더 잘 이해하고 상호 의사소통하는 것은 아니다. 따라서 주로 학생이 원하는 활동을 선택하여 활동할 수 있도록 하였고 더 활동해 보고 싶은 학생은 방과 후 또는 가정학습 활동을 할 수 있도록 안내하였다. 컴퓨터를 이용하여 실험활동을 원하는 학생들을 위해 대부분 컴퓨터실에서 수업을 진행하였다.

<표 9> 조작·실험 활동지의 투입시기

단계-단원-주제	Cabri	거북명령	패턴블록	탱그램	점판
4-가-3. 삼각형의 세 각의 합 사각형의 네 각의 합	정리		전개		전개
4-가-4. 여러 가지 삼각형	전개				전개
4-가-4. 정삼각형과 이등변삼각형의 성질		전개	전개	정리	

4-나-4. 평행선과 한 직선이 만나서 이루는 각	전개				
4-나-5. 사다리꼴			전개	전개	
4-나-5. 평행사변형	도입	전개	전개	전개	정리
4-나-5. 마름모		전개	전개		정리
4-나-5. 정사각형과 직사각형		전개		전개	전개
4-나-5. 다각형		전개			전개
4-나-5. 여러 가지 사각형			전개		
4-나-5. 여러 가지 모양 만들기				전개	전개
4-나-5. 규칙에 맞게 도형만들기			전개		전개

## 2. 평면도형의 성질 이해 및 수학적 의사소통 능력 분석

구체적 조작·실험한 수업 집단과 일반적인 수업집단 사이의 평면도형의 성질 이해도 및 수학적 의사소통 능력을 알아보기 위해 사전학력진단 검사를 통해 동질 집단으로 확인된 두 집단을 실험집단과 비교집단으로 선정하고, 그 효과를 알아보기 위해 두 집단에 평면도형의 성질 이해도 검사 및 수학적 의사소통능력 검사를 실시하였다. 사전 학력 진단 검사 및 사후 평면도형의 성질 이해도 검사, 수학적 의사소통능력 검사 결과는 다음과 같다.

### 가. 사전 학력 진단 검사

실험집단과 비교집단을 각각 선정하기 위해서 사전 학력 진단 검사를 실시하였다. 그 결과를 바탕으로 동질 집단으로 확인된 두 반을 실험집단과 비교집단으로 선정하였다. 선정된 두 반의 사전 학력 진단 검사 결과는 <표 10>과 같다.

<표 10> 사전 학력 진단 검사 Two Sample t-test 결과

Class	N	Mean	SD	df	t-Value	p-value
실험집단	30	18.77	4.06	58	0.219	0.828
비교집단	30	19.00	4.21			

문항 수 : 25문제,  $p < 0.05$

실험집단 비교집단으로 선정된 학급의 검사결과를 Two Sample t-test한 결과  $p$ 값이 0.828로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 없으므로 동질 집단으로 볼 수 있다.

### 나. 사후 평면도형의 성질 이해도 검사

구체적 조작·실험을 통한 수업 집단과 일반적인 수업 집단간의 평면도형의 성질 이해도 검사를 실시한 결과는 <표 11>과 같다.

&lt;표 11&gt; 평면도형의 성질 이해도 검사 Paired Sample T-Test결과

Class	Group	N	Mean	SD	df	t-Value	p-value
실험집단	상위그룹	8	29.00	1.07	7	0.706	0.503
비교집단	상위그룹	8	29.00	1.07			
실험집단	중위그룹	14	25.86	3.06	13	2.433	0.030
비교집단	중위그룹	14	22.43	2.85			
실험집단	하위그룹	8	18.38	3.11	7	4.651	0.002
비교집단	하위그룹	8	14.50	4.54			
실험집단	전체	30	24.70	4.86	29	2.084	0.046
비교집단		30	21.90	6.01			

문항 수 : 30문제,  $p < 0.05$

실험집단과 비교집단의 사후 평면도형의 성질 이해도 검사 결과를 Paired Sample T-Test한 결과, 상위그룹에서는  $p$ 값이 0.503으로 유의 수준 0.05에서 유의미한 차이가 있다고 볼 수 없다. 중위그룹에서는  $p$ 값이 0.030으로 유의 수준 0.05에서 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났고, 하위그룹에서는  $p$ 값이 0.002로 유의 수준 0.05에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알 수 있었다. 전체적으로  $p$ 값이 0.046으로 유의 수준 0.05에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알 수 있다. 즉 검사 결과로 미루어 구체적 조작·실험한 수업 집단이 중, 하위 학습자 그룹의 평면도형의 성질 이해도에 영향을 미치고 있는 것으로 나타났다.

#### 다. 수학적 의사소통 능력 검사

구체적 조작·실험 수학수업의 실험집단과 일반적인 수업을 실시한 비교집단에 대하여 수학적 의사소통 능력 검사한 결과는 <표 12>와 같다.

&lt;표 12&gt; 사후 수학적 의사소통 능력 검사 Paired Sample T-Test결과

Class	Group	N	Mean	SD	df	t-Value	p-value
실험집단	상위그룹	8	85.25	5.85	7	2.646	0.033
비교집단	상위그룹	8	73.25	12.28			
실험집단	중위그룹	14	74.00	13.90	13	1.817	0.092
비교집단	중위그룹	14	64.43	19.77			
실험집단	하위그룹	8	26.40	5.69	29	2.997	0.006
비교집단	하위그룹	8	21.80	9.10			
실험집단	전체	30	73.27	17.84	29	3.828	0.001
비교집단		30	58.33	23.93			

문항 수 : 8 문제,  $p < 0.05$

실험집단 비교집단의 수학적 의사소통 능력 검사 결과를 Paired Sample T-Test한 결과, 상위그룹에서는  $p$ 값이 0.033으로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알



수 있다. 중위그룹에서는  $p$ 값이 0.092로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 없다는 것을 알 수 있다. 하위그룹에서는  $p$ 값이 0.006으로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알 수 있다. 전체적으로  $p$ 값이 0.001로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알 수 있다. 즉, 검사 결과로 미루어 볼 때 구체적 조작·실험 한 수 학습업이 수학적 의사소통 능력에 영향을 미치고 있는 것으로 나타났다.

## V. 논의 및 제언

기하를 학습하는데 있어서 학생들이 일상 생활에서 접하는 대상과 다른 구체적 자료를 사용해서 조사하고, 실험하고, 탐구해 보아야 하는데 이런 활동은 기하학적 개념과 그 성질의 이해를 촉진하므로 학생들은 여러 가지 현상을 접하고 수학적 수단으로 조직해 보는 경험을 우선적으로 경험한 후 형식과 과정을 학습하는 것이 바람직하다(NCTM, 1991; 권성룡 외 9인, 2006).

구체물 조작활동은 학생들로 하여금 무엇인가 생각하도록 하고 무언가를 하게하며 수학적 모델링을 하는 과정에서 수학적 개념이나 절차를 이해하고 이것을 기호로 나타내주는 것을 도와준다. 그리고 컴퓨터를 활용한 수학실험수업은 추상적인 학습내용을 시각화하여 구체와 추상의 만남이 가능하게 하고 형식적인 증명이나 개념 학습의 전단계에서 직관적, 탐구적 활동에 초점을 둘 수 있다(이정재, 2004; 신동선, 류희찬, 1998).

따라서 본 연구는 구체물의 조작과 탐구형소프트웨어를 활용하여 구체적 조작·실험 활동을 할 수 있는 활동지를 개발하여 적용하여 평면도형의 성질을 탐구할 수 있는 방안을 제시하고 구체적·조작 실험 수업의 효과를 평면도형의 성질 이해 및 수학적 의사소통과 관련하여 검증하였다. 연구결과를 기존의 이론과 선행연구에 비추어 논의하면 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서는 평면도형의 개념 및 성질을 탐구하기 위해 패턴블록, 탱그램, 점판의 구체물 조작활동과 Cabri, 거북명령프로그램의 탐구형소프트웨어를 활용할 수 있는 활동지를 개발하고 학생들의 수준에 따라, 활동 시간에 따라 원하는 자료를 선택하여 탐구할 수 있도록 하였다. 학생들이 구체적 조작·실험을 하기 위해서는 활용할 자료의 특성 및 구성에 대해서 잘 알고 활동해야 의도된 탐구가 이루어지고(신현진, 2004; 이인환, 류기찬, 이석희, 1999) 자신의 탐구결과를 토론하고 전체에게 설명할 수 있을 것이다. 그러나 본 연구에서처럼 단위 시간에 많은 학습자료를 수준에 따라 선택하여 활용할 때 학생들이 활용할 자료의 특성이나 구성을 이해할 시간을 본 수업과는 별개의 시간을 통해 지도해야 하고, 모든 학생들이 각각의 자료에 대해서 모두 자세히 알고 있지 않기 때문에 토론하는데 어려움이 있었다. 따라서 한 단원을 지도할 때 한 가지의 자료를 투입할 것을 계획하고 그 자료의 특성을 이해하게 한 후 단위 학습을 전개하는 것도 바람직 할 것으로 판단된다.

둘째, 구체적 조작·실험 활동과 수학적 의미를 연결짓는 토론 활동을 제공해야 한다. 학생들이 활동 후 발견한 성질을 활동지에 적어보는 것도 의미가 있었지만 발견한 성질을 활동과 연결지어 모둠내에서 또는 전체 학생에게 발표하고 토론하는 활동은 개념과 모델 사이, 모델과 기호 사이의 연결을 더욱 풍부하게 한 것으로 보인다. 김상화(2010)의 연구결과를 보면 교사가 학생활동 중심 수업이나 담화 및 표현활동 수업이 잘 이루어진다고 반응한 비율에 상반되게 학생들은 강의식 수업과 교과서 문제 풀이 중심의 수업이 이루어지고 있다고 생각한다고 하였다. 이는 교사가 구체물 조작활동을 계획하여 실행하지만 토론

을 통해 조작활동과 수학적 의미를 연결짓지 못하고 있기 때문에 학생들은 활동 후 문제 풀이가 수업의 중점이었다고 생각하기 때문으로 판단된다. 실제 토론 후 자신이 기록한 활동지의 내용을 더 정교화하여 수정하는 모습을 볼 수 있었고, 다음 수업에서 이를 활용하여 설명하는 모습을 볼 수 있었다. 이것은 김수환(2000)과 장순희(2002)의 주장처럼 학생이 교구를 다뤄보는 활동 시간만 길고 그에 따른 수학적 의미를 연결짓는 과정이 부족하면 교구활용에 대한 부정적인 결과를 초래하게 될 것이다.

셋째, 실험집단과 비교집단의 사후 평면도형의 성질 이해도 검사 결과를 Paired Sample T-Test한 결과, 전체적으로  $p$ 값이 0.046으로 유의 수준 0.05에서 유의미한 차이가 있었으며 특히 중위그룹과 하위그룹에서 구체적 조작·실험 활동이 평면도형의 성질을 이해하는데 효과가 있는 것으로 나타났다. 이것은 구체물 조작활동 수업은 학업성취도에 긍정적 영향을 미친다는 많은 연구(신현진, 2004; 천주영, 2004; 이진호, 2003; 안주형, 2002; 심재성, 1999)결과와 그 맥을 같이 한다. 특히 상위집단의 학생들은 구체물 조작이나 컴퓨터 실험 활동 없이도 자신의 학습과정을 유기적으로 조절하고 사고실험을 통해 성질을 이해할 수 있어 유의미한 차이가 없었지만 중위수준과 하위 수준의 학생들은 조작·실험활동을 통해 개념과 개념 사이를 연결하고 추상적인 도형의 시각화하여도형의 여러 성질간의 관계를 알고 도형의 구조를 파악한 것으로(2010, 윤여주) 중위, 하위수준의 학생에게 조작과 실험의 활동을 평면도형의 성질을 이해하는데 매우 효과가 있다고 할 수 있다.

넷째, 실험집단 비교집단의 수학적 의사소통 능력 검사 결과를 Paired Sample T-Test한 결과, 전체적으로  $p$ 값이 0.001로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알 수 있다. 특히 상위그룹에서는  $p$ 값이 0.033으로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알 수 있었으며 하위그룹에서는  $p$ 값이 0.006으로 유의 수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 있다는 것을 알 수 있었다. 구체적 조작·실험 활동 중 상위 학생과 중위 학생이 선택한 활동은 주로 컴퓨터를 이용한 실험으로 상위 학생들은 활용하고자 하는 탐구형소프트웨어의 활용 방법과 특성을 잘 이해하여 수업주제에 맞게 작도하고 자신이 발견한 성질을 잘 설명했으나 중위 수준의 학생은 작도하는데 어려움이 있었다. 하위 수준의 학생들은 상대적으로 활동하기 편한 패턴블록이나 점판을 많이 선택하여 활동한 후 미숙하지만 자신의 용어로 활동 결과를 설명하는 것을 볼 수 있었다. 학생중심의 수업과 수학적 의사소통 수업의 가장 중요한 핵심은 학생들이 주도적으로 다양한 방법으로 주어진 문제를 해결하며 자신의 수학적 생각을 표출하고 다른 학생들의 수학적 생각을 받아들이는 과정 안에서 반성적 사고가 일어나서 수학적 지식을 형성해 나가는 것이다(김상화, 2010). 상위 학생과 하위 학생은 자신에 맞는 활동을 통해 자기 주도적으로 활동하고 자신의 생각을 표출했는데 중위 수준의 학생은 높은 수준의 활동을 선택하다보니 성질을 발견하는데도 어려움이 있었고 자신의 생각을 표출하는데 어려움이 있었다. 따라서 상하위 학생에게는 구체적 조작·실험의 활동이 수학적 의사소통에 효과가 있었지만 중위 학생에게는 효과가 없는 것으로 나타나게 된 결과로 판단된다. 방정숙과 정희진(2006)은 교사는 학생과 상호작용을 많이 하는 수업을 한다고 생각하지만 실제로는 몇 명의 학생들과 제한된 상호작용을 하는 경우가 있다고 하였다. 본 연구에서도 상위 학생과 하위 학생에서 상호작용이 잘 이루어져 전체적으로 상호작용이 잘 이루어진 것처럼 보인 것으로 판단된다. 즉, 외형적으로 교사와 학생간의 질문과 답변이 많이 이루어져 수학적 의사소통이 많은 수업이라고 교사가 인식하더라도 본질적으로 많은 학생들의 입장에서 학생 중심 수업이라고 느끼지 못할 수도 있다. 따라서 학생들이 자신에 맞는 활동을 선택하게 할 때는 교사의 주의깊은 계획과 관찰이 요구된다고 할 수 있다.

본 연구 이후 도형영역 이외에 다른 영역에서 탐구형소프트웨어와 구체물을 이용한 조작·실험을 통한 학습방법이 모색되어야 하고 그 효과를 검증할 필요가 있으며 수학적 의사소통 능력 검사에 있어서 지필 검사에 의한 말하기, 기호로 나타내기, 그림으로 나타내기 등의 방법 외에 후속연구로 그룹별, 개인별 면담을 통한 말하기, 조작하기, 그림 그리기 등의 방법으로 검사하고 분석하는 연구가 요구된다.

## 참고문헌

- 강진호, 강홍규 (2008). Freudenthal의 재발명 방법에 기초한 제7차 수학교과서의 확률단원 재구성. *한국초등수학교육학회*, 12(1), 79-100.
- 교육인적자원부 (2005). *교사용지도서 수학 4-1*. 서울: 천재교육.
- 교육인적자원부 (2009). *교사용지도서 수학 1-1*. 서울: (주) 두산.
- 권성룡, 김남균, 김수환, 김용대, 남승인, 류성립, 방정숙, 신준식, 이대현, 이봉주, 조완영, 조정수 (2006). *수학의 힘을 길러주자 왜? 어떻게?*. 서울: 경문사.
- 김미정, 이종희 (1994). Van Hiele이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구. *한국수학교육학회지 시리즈 A*, 33(2), 57-75.
- 김상화 (2010). *초등학교 수업에서 수학적 의사소통의 목표 설정 및 지도의 실제*. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 김선렬 (1992). *국민학교 기하 학습에 van Hiele이론의 적용을 위한 연구*. 한국교원대학교 일반대학원 석사학위논문.
- 김성만, 주미자, 한기완 (1999). 패턴블록을 사용한 탐구활동. *수학교육학술지 제 3집*. 한국수학교육학회: 107-138.
- 김수환 (2000). *수학적 활동과 의사소통 활성화를 위한 과제 개발*. 청주교육대학교 과학교육연구소 논문집, 21, 19-23.
- 김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이의원, 이종영, 임문규, 정은실 (2009). *초등학교 수학과 교재연구*. 서울: 동명사.
- 김연식, 정영옥 (1997). Freudenthal의 수학과 학습-지도론 연구. *대한수학교육학회 논문집*, 7(2), 1-23.
- 남승인, 서찬숙, 최진화, 강영란, 홍우주, 배혜진, 김진수 엮음 (2009). *수학을 어떻게 가르칠 것인가?*. 서울: 경문사.
- 방정숙, 정희진 (2006). 학습자 중심 교수법에 대한 초등 교사의 이해와 실행형태: 수학적 의사소통을 중심으로. *학습자중심교과교육연구*, 6(1), 297-321.
- 신동선, 류희찬 (1998). *수학과 컴퓨터*. 서울: 경문사.
- 신성기 (2009). *초등학교 6학년 학생들의 수학적 의사소통 수준*. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 신현진 (2004). *탱그램을 이용한 평면도형의 개념 및 성질지도에 관한 연구*. 공주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 심재성 (1999). *기하판 활용의 효과분석*. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 안주형 (2002). *탱그램과 모자이크퍼즐을 활용한 수학과 수업분석에 관한 연구*. 인천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 윤여주 (2010). *초등 기하문제 해결에서의 시각화과정 분석*. 부산교육대학교 교육대학원

석사학위논문.

- 이광욱 (2009). 초등학교 수학교실에서 구성주의 관점으로 본 수학영재의 특성. 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이인환, 류기천, 이석희 (1999). 수학교육과 탭그랩 활동. 수학교육학술지 제 3집. 한국수학교육학회, 139-168.
- 이정재 (2007). 초등수학교육론. 서울: 형설출판사.
- 이진호 (2003). 구체적 조작활동을 통한 분수의 개념 지도. 광주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 임근광 (1999). 초등기하학습에서 CabriⅡ 활용에 대한 연구. 한국교원대학교 일반대학원 석사학위논문.
- 장순희 (2002). 수학적 의사소통 능력 향상을 위한 교수·학습 방안에 관한 연구. 대구교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 정주자 (1996). 초등학교 기하학습에서의 게임 학습자료 개발에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 진무숙 (1996). Van Hiele의 교수-학습 5단계를 적용한 증명 지도 방법. 한국교원대 일반대학원 석사학위논문.
- 천주영 (2004). GSP를 활용한 공간감각 기르기 자료 개발 및 활용 방안. 광주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 황민영 (2008). 중학교 1학년 학생의 관계적 이해와 도구적 이해에 기초한 평면도형의 성질 지도 방안 연구. 아주대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 황우형 편역 (2000). 수학학습 심리학. 서울: 사이언스북스.
- 황현욱 (2009). 수학적 의사소통이 수학 학업성취도와 수학적 성향에 미치는 영향. 진주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 홍선주, 최창우 (2009). 의사소통 중심 수학 수업이 수학적 성향과 학업성취도에 미치는 영향. 한국초등수학교육학회, 13(2), 269-283.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standard for Teaching Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Papert, S. (1980). *Midstorms : children, computer, and powerful ideas*. New York: Basic Books.

---

<Abstract>

## Effect of Inquiring Activities through Manipulative Materials-Experiment on Geometrical Properties Understanding and Communicative Competence

Lim, Geungwang<sup>2)</sup>

Students have to investigate, experiment and inquire using the manipulative materials and real-world thing for studying Geometry. Manipulative materials activities encourage to understand mathematical concept and connection of symbol. Experiment activities using the computer focused the student's intuitive and inquisitive activities because of visualization of an abstract mathematics concept. This study developed a workbook through the use of manipulative materials and computer for operating and experimenting, and suggested a method for inquiry of geometrical properties and proved an effect. Manipulative materials-experiment activities was proven effective to middle level and lower level students in understanding the geometrical properties, and was proven effective to high level and lower level students when it comes to mathematical communication ability. When students operate, at first, they have to know about the feature and information of the materials, and the teacher has to make an elaborate plan and encourages the students to discuss about this.

Keywords: manipulative materials, mathematical experiment, geometrical properties, mathematical communication

논문접수: 2010. 10. 12

논문심사: 2010. 10. 18

게재확정: 2010. 11. 06