<학술논문> **DOI:10.3795/KSME-A.2010.34.5.629**

유한요소 교호법으로 구한 삼차원 균열 탄성해의 정확성 향상 및 검토

박 재 학*† · G.P. Nikishkov**
* 충북대학교 안전공학과, ** The University of Aizu

Examination and Improvement of Accuracy of Three-Dimensional Elastic Crack Solutions Obtained Using Finite Element Alternating Method

Jai Hak Park*† and G.P. Nikishkov**
* Dept. of Safety Engineering, Chungbuk Nat'l Univ.,
** Dept. of Computer Science and Engineering, The University of Aizu

(Received March 9, 2010 ; Revised March 31, 2010 ; Accepted March 31, 2010)

Key Words : Finite Element Alternating Method(유한요소 교호법), 3-Dimensional Crack(삼차원 균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Symmetric Galerkin Boundary Element Method(대칭 Galerkin 경계요소법)

초록: SGBEM-FEM 교호법이 Nikishkov, Park 및 Atluri 에 의하여 제안되었었다. 제안된 방법을 사용하면 임의 형태의 평면 혹은 비평면 삼차원 균열에 대하여 복합 모드의 응력강도계수를 구할 수 있다. 그러나 현장에서의 적용을 위해서는 이 방법의 정확성 및 신뢰성에 대한 검토가 더욱 필요하다. 따라서 본 논문에서는 응력강도계수에 영향을 주는 주요한 몇 가지 인자를 검토하였다. 그리고 원통의 내부 및 외부에 존재하는 원주방향 표면균열에 대한 응력강도계수를 구하여 기존의 해와 비교하였다. 그 결과 SGBEM-FEM 교호법은 이들 균열에 대하여 정확한 해를 주고 있음을 확인하였다.

Abstract: An SGBEM (symmetric Galerkin boundary element method)-FEM alternating method has been proposed by Nikishkov, Park and Atluri. This method can be used to obtain mixed-mode stress intensity factors for planar and non-planar three-dimensional cracks having an arbitrary shape. For field applications, however, it is necessary to verify the accuracy and consistency of this method. Therefore, in this study, we investigate the effects of several factors on the accuracy of the stress intensity factors obtained using the abovementioned alternating method. The obtained stress intensity factors are compared with the known values provided in handbooks, especially in the case of internal and external circumferential semi-elliptical surface cracks. The results show that the SGBEM-FEM alternating method yields accurate stress intensity factors for three-dimensional cracks, including internal and external circumferential surface cracks and that the method can be used as a robust crack analysis tool for solving field problems.

1. 서 론

구조물에 존재하는 균열의 위험성을 평가하거나 피로 및 응력부식균열의 성장해석을 하는 경우에 균열에 대한 파괴변수(fracture parameter)를 정확하게 구하여야 한다. 이러한 목적으로 유한요소법(finite element method)이 많이 사용되고 있으나 모델을 구성하는데 특별한 노력이 필요하므로 보다 편리하게 사용될 수 있는 방법이 모색되었다. 이러한 방법의 한가지로 유한요소 교호법(finite element alternating method)이 제시되어 2 차원 및 3 차원 균열에 대하여 정확한 응력강도계수를 구할 수 있음을 보여주었다.[1]

Nikishkov, Park 과 Atluri[2]는 임의 형태의 삼차원 균열에 대하여 모드 I, II 및 III 의 응력강도계수를 구할 수 있고, 피로균열 성장해석을 할 수 있는 유한요소 교호법을 제안하였다. 이 방법에서는 교호법에서 필요한 무한 물체내의 균열해로 Li 와 Mear[3,4]가 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용하였다. 또한 박재학과 박상윤[5,6]은 Nikishkov 등[2]이 제안한 방법을 삼차원 균열의 탄소성문제에도 적용할 수 있도록 하였다.

† Corresponding Author, jhpark@chungbuk.ac.kr

유한요소교호법이 편리한 방법임에도 불구하고 아직 산업체에서의 사용이 제한되고 있는 이유는 얻어진 해의 신뢰성에 대한 검증이 완전히 되지 않았기 때문으로 판단된다. 따라서 본 논문에서는 삼차원 균열의 탄성해에 대하여 해의 정확성에 영향을 주는 여러 인자들에 대하여 검토하여 정확한 해를 얻을 수 있는 방법을 제시하고 또한 기존의 발표된 해들과 비교하여 유한요소교호법의 사용 가능성을 높이려고 한다.

균열격자의 수 그리고 유한요소 모델과의 상대적인 위치, 물체 외부에 가정된 균열격자의 크기 등이 해의 정확성에 미치는 영향을 살펴보았으며, 원통에 존재하는 내부 및 외부 원주방향 반타원형 표면균열에 대하여 탄성해를 구하여 기존의 해와 비교하였다.

2. 유한요소 교호법

2.1 유한요소 교호법

유한요소 교호법은 중첩의 원리에 바탕을 두고 있으며, 균열을 고려하지 않은 유한요소 해석해와 무한 물체 내에 존재하는 균열의 해를 번갈아 가며 해석함으로써 원하는 해를 얻는 방법이다. 균열이 없는 유한요소 모델에 독립적인 균열격자를 균열위치에 삽입함으로써 균열선단에서의 파괴변수를 구하는 방법이다. 이 방법의 해석과정에 대한 자세한 설명은 참고문헌 1 이나 2 에 기술되어 있다.

2.2 대칭 Galerkin 경계요소법

유한요소 교호법을 위해서는 유한요소 해와 함께 무한물체 내에 존재하는 균열에 대한 해가 필요하다. 이를 위하여 Li 와 Mear 등[3,4]이 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용하였다.

무한 물체 내에 임의 형태의 평면 또는 비평면 삼차원 균열이 존재하고, 균열면 상에는 임의의 트랙션(traction)이 작용하는 경우, 균열은 상하 균열면 사이의 변위 불연속의 연속된 분포로 나타낼 수 있다. Li 와 Mear[3]는 균열에 대하여 다음 식과 같은 낮은 특이성(weak singularity)을 갖는 경계적분방정식(boundary integral equation)이 만족됨을 보였다.

$$-\int_S\int_S D_\alpha u_i^*(\mathbf{z}) C_{\alpha i\beta j}(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{z}) D_\beta u_j(\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi}) dS(\mathbf{z}) = \int_S u_k^*(\mathbf{z}) t_k dS(\mathbf{z}) \quad (1)$$

여기서 S 는 균열면, u_i 는 균열면 사이의 변위의 불연속 성분, u_i^* 는 Galerkin 법에 사용되는 시험함수(test function)의 성분, t_k 는 균열면에 작용되는 트랙션의 성분, ξ 및 z 는 좌표이다. 또한 D_α 는 접선연산자(tangential operator)이고 $C_{\alpha i\beta j}(\zeta)$ 는 낮은 특이성을 가지는 커널이다. 이들에 대한 정의는 참고문헌 2 에 주어져 있다.

균열면을 몇 개의 균열요소로 나누고 요소 내 일점에서의 변위의 불연속과 트랙션은 균열요소의 절점에서의 값과 형상함수로 기술한다고 하면 적분방정식으로 표현된 식 (1)을 식 (2)와 같이 이산화(discretization) 할 수 있다.

$$-\int_S\int_S C_{\alpha i\beta j} D_\alpha N_a(z) D_\beta N_b(\xi) dS(\xi) dS(z)\, u_{jb} = \int_S N_a N_q dS(z)\, t_{iq} \quad (2)$$

여기서 N_b 등은 형상함수, u_{jb} 는 절점에서의 변위의 불연속, t_{iq} 는 절점에서의 트랙션이다.

식 (2)를 해석하여 균열격자 절점에서의 변위 불연속을 구하면 이로부터 모드 I, II 및 III 의 응력강도계수를 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$K_I = \frac{E\sqrt{\pi}}{(1-\nu^2)}\frac{u_3}{4\sqrt{2r}}$$
$$K_{II} = \frac{E\sqrt{\pi}}{(1-\nu^2)}\frac{u_2}{4\sqrt{2r}} \quad (3)$$
$$K_{III} = \frac{E\sqrt{\pi}}{(1+\nu)}\frac{u_1}{4\sqrt{2r}}$$

여기서 u_1 , u_2 및 u_3 는 각각 응력강도계수를 계산하는 점에서의 국부좌표계 x_1 , x_2 및 x_3 방향의 균열열림변위(crack opening displacement)이고, r 은 균열선단에서부터의 거리, E 는 탄성계수, ν 는 푸아송비이다. 국부좌표계는 균열선단에 접선방향을 x_1 으로, 균열면 상에서 균열선단에 수직한 방향을 x_2 로 균열면에 수직한 방향을 x_3 로 취한다.

3. 탄성해의 정확성 향상

3.1 균열격자의 영향

우선 유한요소 교호법에서 균열격자의 형태 및 크기가 탄성해에 주는 영향을 살펴본다. 이전의 해석들[2]에 의하면 삼차원 내부 균열의 경우 작은 수의 균열격자에서도 정확한 해가 얻어지고 있음을 알 수 있다. 그러나 표면균열의 경우 자유표면과 균열선단이 만나는 점에서의 응력의 특이성으로 인하여 해석에 어려움이 있다. 따라서 표면균열에 대하여 균열격자의 영향을 살펴본다.

유한요소 교호법에서 반타원형 표면균열을 해석할 때에 사용되는 균열격자의 예를 Fig. 1 에서 보여주고 있다. 그림에서 AB 선의 윗부분은 해석하는 물체 내에 포함되는 부분이고 L_{ext} 로 표시된 부분은 물체 외에 놓이는 부분이다. L_{ext} 부분을 둠으로써 해의 정확성이 높아짐은 잘 알려져 있다. 그 이유는 L_{ext} 가 없고, AB 를 따라서 균열면 사이의 상대변위가 없는 경계조건을 줄 경우 Fig. 1 의 AB 를 따라 균열열림변위(crack opening displacement)가 발생되지 않기 때문이다. 유한요소 해석에서는 모델에 균열을 포함시키지 않으므로 AB 를 따라 균열열림변위가 발생되지 않는다. 또한 L_{ext} 가 없는 균열격자를 사용하는 경우 균열해에서도 AB 를 따라 균열열림변위가 발생되지 않는다. 따라서 두 해의 중첩으로 얻어지는 교호법의 해에서 AB 를 따라 균열열림변위가 발생되지 않으므로 원하는 해를 얻을 수 없게 된다.

또는 AB 를 따라서 상대변위가 가능한 경계조건을 줄 경우는 상대변위가 유한한 값에서 갑자기 0 으로 변하는 물리적으로 적합하지 않은 현상이 발생된다. 결론적으로 균열격자에서 L_{ext} 부분을 두어야 하며 또한 L_{ext} 의 크기에 따라서 해의 수렴과 결과에 영향을 미칠 수 있으므로 이에 대하여 살펴본다.

높이 0.6 m, 폭 0.64 m, 두께 0.05 m 되는 육면체의 중간부분에 c = 0.02 m, a = 0.01 m 의 반타원형 표면균열이 존재하고 σ =100 MPa 의 수직하중이 육면체의 수평면에 작용되고 있는 문제를 고려한다. 균열선단의 가장 깊은 점에서 L_{ext} 에 따른 응력강도계수의 변화를 Fig. 2 에서 보여주고 있다. 또한 비교를 위하여 Newman 과 Raju[7]의 해를 함께 도시하였다. 이때 Fig. 1 의 균열격자를 사용하였으며, L_{ext} 값이 큰 경우에는 적절한 종횡비를 유지하기 위하여 격자를 나누었다. Fig. 2 에서 볼 때 L_{ext} 가 커짐에 따라 K_I 값은 점차 작아져 일정한 값에 수렴하고 있고, 수렴 값은 Newman 과 Raju 의 해보다 약간 작은 값을 보이고 있다.

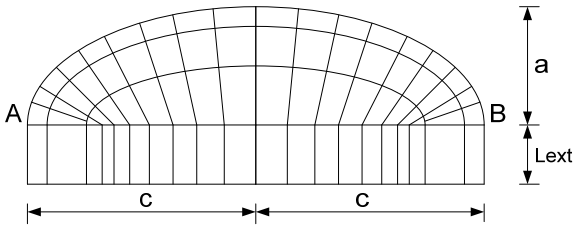

Fig. 1 Crack mesh for a semi-elliptical crack

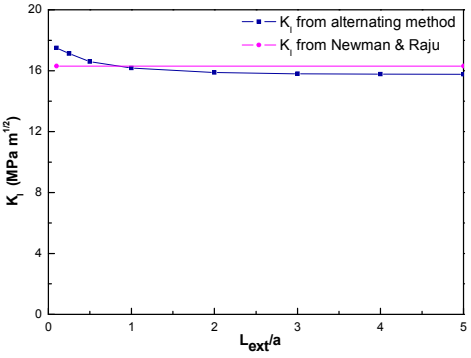

Fig. 2 Effect of L_{ext} on the stress intensity factor at the deepest point of a semi-elliptical surface crack

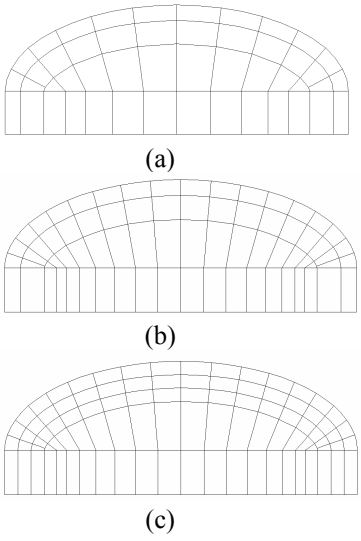

Fig. 3 Three kinds of crack meshes

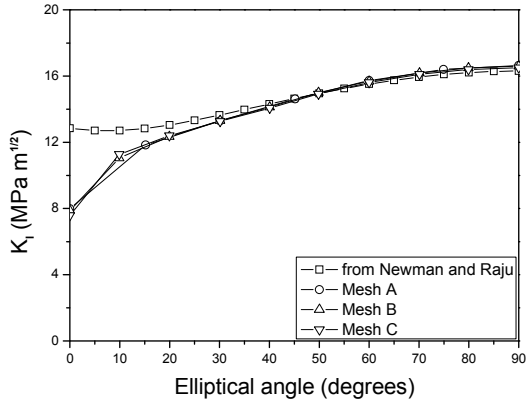

Fig. 4 Effect of crack mesh on the stress intensity factors

다음으로 균열격자의 크기의 영향을 살펴보기 위하여 Fig. 3 의 세가지 종류의 균열격자에 대하여 해석하여 Fig. 4 에 나타내었다. Fig. 4 에 표시된 Mesh A, Mesh B 및 Mesh C 는 각각 Fig. 3 의 (a), (b) 및 (c)의 균열격자를 사용한 것이다. 세가지 균열격자에 따른 K_I 의 변화는 거의 없음을 알 수 있다. 또한 Newman 과 Raju[7]의 해와 비교해 보면 표면 근처를 제외하고는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

표면에서 K_I 이 감소하는 현상은 경계적분법을 사용하는 해에서 공통으로 발생되는데,[4] 작은 적분요소를 사용하는 경우 실제 표면 근처에서 나타나는 K_I 이 작아지는 경계층을 나타낸다고 할 수 있으나, 본 해석과 같이 큰 요소를 사용하는 경우 실제 현상과 함께 수치적인 에러가 함께 포함되어 있을 것으로 판단된다.

3.2 균열격자의 상대적 위치의 영향

유한요소 교호법에서 정확한 해는 균열선단과 유한요소 격자가 일치하는 경우이다. 그러나 균열성장 해석을 하는 경우는 균열선단을 유한요소 격자와 일치시킬 수가 없다. 따라서 균열선단이 유한요소 격자의 중간에 위치하는 경우의 해의 정확성에 대하여 살펴보았다.

Fig. 5 에서 균열격자의 유한요소 격자에 대한 세가지 상대적인 위치를 보여주고 있다. 시선이 균열면과 평행하므로 균열면은 선으로 보이고 있고 그림에서의 균열 길이는 균열의 표면길이가 된다. A 의 위치는 가장 정확한 K_I 값을 주는 위치이고, C 는 가정 부정확한 값을 주는 위치이다. 균열만을 해석할 경우는 A 의 위치에 균열격자를 두는 것이 바람직하나 균열성장해석을 하는 경우는

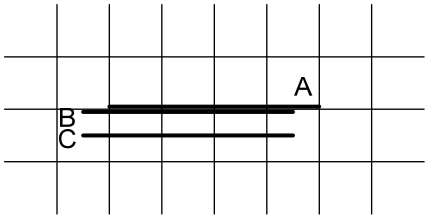

Fig. 5 Three relative positions of crack mesh on the outer boundary of finite element mesh

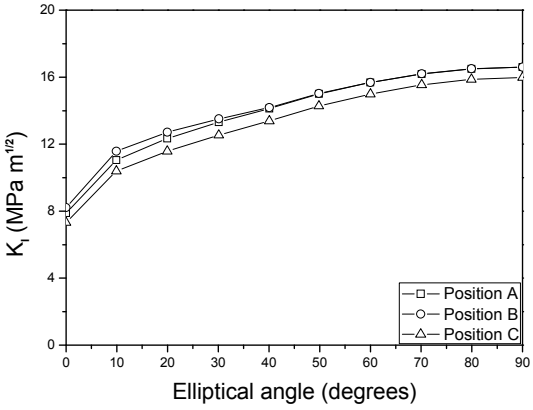

Fig. 6 Effect of crack mesh position on the stress intensity factors

성장 중에 B 의 위치나 C 의 위치에 균열격자의 일부가 존재할 수 있다. Fig. 6 은 세 위치에서 계산된 K_I 값을 보여주고 있다. 위치 A 와 B 의 경우는 자유표면 근처에서의 작은 차이를 제외하고 차이를 보이지 않는다. 위치 C 의 경우는 전반적으로 A 와 B 에 비하여 낮은 값을 보이고 있다. 최대점에서 4% 정도 낮은 값을 보이고 있다. 따라서 가능한 균열면이 유한요소의 면과 일치하도록 배치하는 것이 정확성을 높일 수 있음을 알 수 있다.

3.3 응력의 정확성 향상

식 (2)로부터 구해진 균열면에서의 변위 불연속으로부터 응력을 계산할 경우 균열면에서 멀리 떨어진 곳에서의 응력값은 정확하게 구해지나 균열면에 가까운 점들에서의 응력값은 큰 오차를 보이게 된다. 그 이유는 응력을 계산하는 식의 커널이 $1/r$ 의 특이성을 가지고 있기 때문에 수치 적분을 행할 때 오차가 커지기 때문이다. 따라서 박재학[6]은 적분영역의 분할과 변수 변환의 방법들을 사용하여 탄소성해석에서 응력의 정확성을 향상시킬 수 있음을 밝혔다. 본 논문에서는 동일한 방법을 탄성해석에도 적용하여 그 영향을 살펴보았다.

Fig. 5 에 도시된 위치 C 의 문제에 대하여 적용

한 결과 가장 깊은 균열선단에서의 K_I 값이 적용 전에는 15.97 MPa·m$^{1/2}$ 이었으나, 적용 후 16.02 MPa·m$^{1/2}$ 로 되어 약간 증가하는 경향을 보였으나 그 영향은 크지 않았다. 그 이유는 외부경계에서의 잔류하중을 계산하기 위하여 사용되는 적분점들이 비교적 균열면에서 떨어져 있어 응력계산 시 오차가 크지 않기 때문으로 판단된다.

4. 삼차원 균열의 탄성해석

4.1 내부 원주방향 반타원 표면균열

프로그램 결과의 정확성을 검토하기 위하여 배관 내부 또는 외부에 존재하는 원주방향 반타원형 표면 균열을 해석하여 기존의 해와 비교하였다. 원주방향 표면균열에 대한 균열격자를 생성하기 위하여 Fig. 3 에 도시된 평면표면에 대한 균열격자를 생성한 후 원주방향 표면균열에 적합하게 좌표변환을 하였다. 이러한 생성은 명령어에 의하여 행해지며 이를 위한 새로운 명령어를 첨가하였다.

해석에서 사용된 균열격자의 예는 Fig. 7 과 같다. 72 개의 균열요소와 257 개의 균열절점을 가지고 있다. 정확성을 향상시키기 위하여 타원의 중심을 지나는 균열요소의 변, 즉 Fig. 1 에서 AB 에 해당되는 선이 원통의 내면과 일치하도록 하였다. 또는 원통의 외부 표면균열을 해석하는 경우에는 타원의 중심을 지나는 균열요소의 변이 원통의 외면과 일치하도록 하였다.

원통에 대한 유한요소 모델을 구성하기 위하여 우선 높이 0.6 m, 폭 0.64 m, 두께 0.05 m 되는 육면체 모델을 생성시킨 후 원통이 되도록 좌표변환을 시켰다. 이때 원통의 내면의 길이가 변하지 않도록 하였다. 내경 R_i = 0.5 m 및 0.2 m 에 대하여 해석을 하였으며 균열 깊이 a/t= 0.2 에서 0.6 까지 해석하였고 이때 c/a = 2 가 유지되도록 하였다. 내면 표면균열 해석에 사용된 유한요소 모델은 Fig. 8 과 같다. 5541 개의 절점과 1120 개의 20 절점 삼차원 요소로 이루어져 있다.

유한요소 교호법으로 얻어진 결과를 Fig. 9 와 Fig. 10 에 도시하였다. Fig. 9 는 R_i/t = 10 인 경우이고 Fig. 10 은 R_i/t = 4 인 경우이다. 비교를 위하여 기존의 해에서 계산된 값을 함께 도시하였다. 균일한 응력 σ 가 축방향으로 작용되는 경우 Raju 와 Newman[8]의 응력강도계수 해는 다음과 같이 표시된다.

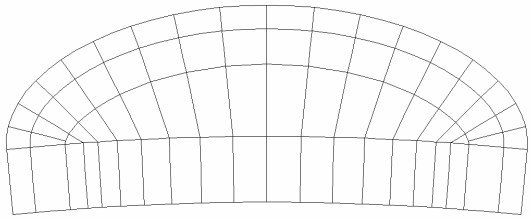

Fig. 7 Example of crack mesh to analyze a circumfer-ential semi-elliptical surface crack

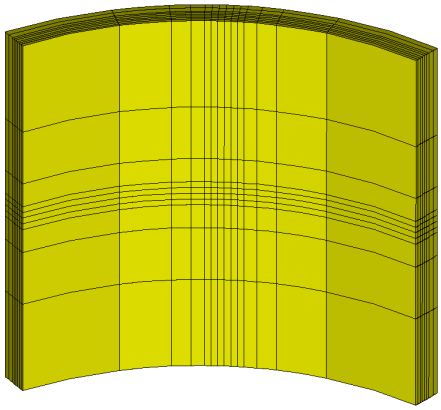

Fig. 8 Finite element mesh used in FEAM analysis

$$K_I = f_w G_o \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \tag{4}$$

여기서 G_o 는 a/c , t/a , t/R_i 및 균열선단에서의 위치에 따라 주어지는 상수이고, Q 와 f_w 는 다음과 같이 정의된다.

$$Q = 1 + 1.464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65} \tag{5}$$

$$t_w = \left[\sec\left(\frac{\pi c}{2W}\sqrt{\frac{a}{t}}\right)\right]^{1/2} \tag{6}$$

여기서 $2W$ 는 고려하는 물체의 폭이다. Fig. 9 와 Fig. 10 에서 응력강도계수는 $\sigma\sqrt{\pi a/Q}$ 에 의하여 정규화 되었다.

Fig. 9 와 Fig. 10 에서 볼 때 표면과 만나는 균열선단을 제외하면 유한요소 교호법으로 구한 해는

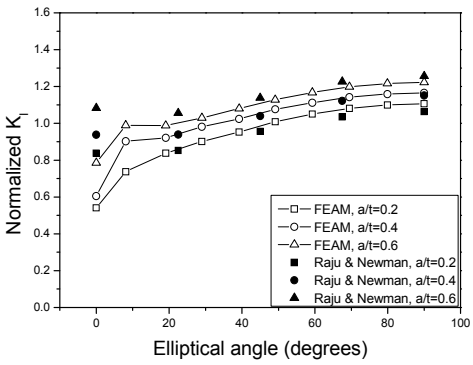

Fig. 9 Normalized stress intensity factor for internal circumferential semi-elliptical surface crack when $R_i/t = 10$

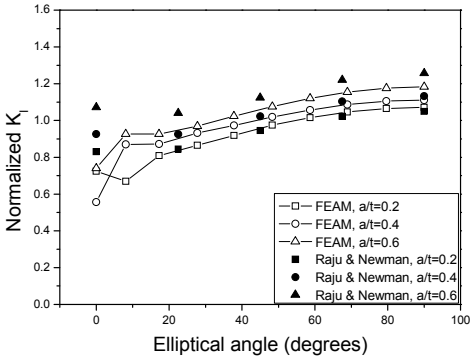

Fig. 10 Normalized stress intensity factor for internal circumferential semi-elliptical surface crack when $R_i/t = 4$

Raju 와 Newman 의 해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.2 외부 원주방향 반타원 표면균열

다음으로 원통의 외부에 존재하는 반타원형 표면균열에 대하여 살펴보았다. 원통의 형상 및 작용하중 등은 앞에서 해석한 내부에 존재하는 표면균열에 대한 문제와 동일하고, 모델의 절점 수 및 요소 수 등도 동일하다. 다만 균열격자의 형상은 외부에 존재하는 표면균열에 적합하게 수정을 하였고, 유한요소 모델의 절점 위치도 적절히 수정하였다. Fig. 11 은 a/t= 0.2, c/a= 2, R_i=0.5 m 인 경우 균열 근처의 균열격자와 유한요소 격자를 도시한 것이다. 균열격자는 Fig. 3(b)와 동일한 절점 수를 가진다. a/t= 0.4 및 0.6 인 경우 Fig. 3(b)와 동일한 절점 수를 가지는 균열격자를 사용하는 경우 Raju 와 Newman[8]의 해와 균열선단의 가장 깊은 점에서 최대 9.4%의 차이가 난다. 따라서 a/t= 0.4 및 0.6 인 경우 Fig. 3(c)와 유사한 균열격자를 사용하였다.

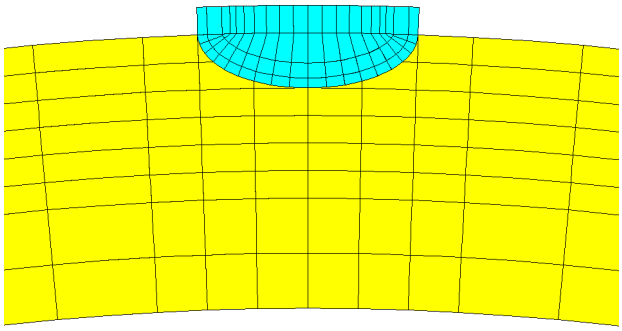

Fig. 11 Crack mesh and finite element mesh near an outer semi-elliptical surface crack with a/t= 0.2, and c/a= 2

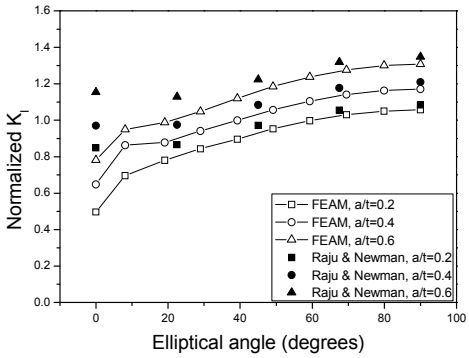

Fig. 12 Normalized stress intensity factor for external circumferential semi-elliptical surface crack when $R_i/t = 10$

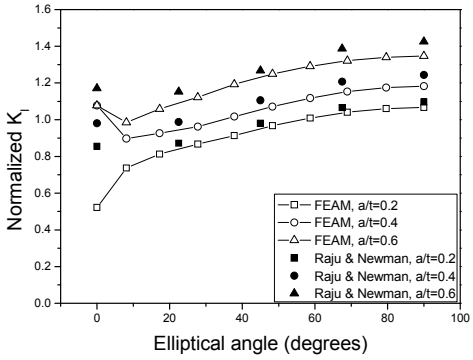

Fig. 13 Normalized stress intensity factor for external circumferential semi-elliptical surface crack when $R_i/t = 4$

원통의 외부에 존재하는 원주방향 반타원형 표면균열에 대하여 유한요소 교호법으로 얻어진 결과를 Fig. 12 와 Fig. 13 에 도시하였다. Fig. 12 는 $R_i/t = 10$ 인 경우이고 Fig. 13 은 $R_i/t = 4$ 인 경우이다. 응력강도계수는 $\sigma\sqrt{\pi a/Q}$ 에 의하여 정규화 되었다. 비교를 위하여 Raju 와 Newman[8]의 해에서 계산된 값을 함께 도

시하였다. Raju 와 Newman 의 해는 식 (4)와 같이 표현되며, G_o 값으로는 해당되는 값을 주어야 한다.

Fig. 12 와 Fig. 13 에서 볼 때 표면과 만나는 균열선단을 제외하면 유한요소 교호법으로 구한 해는 Raju 와 Newman 의 해와 비교적 잘 일치하고 있으나, Fig. 9 와 Fig. 10 에 도시된 내면 균열 결과에 비해서는 차이가 커짐을 알 수 있다. 또한 정확한 값을 얻기 위해서는 내면 표면균열보다 작은 크기의 균열격자를 사용하여야 한다.

5. 결 론

유한요소 교호법을 이용하여 삼차원 균열의 응력강도계수를 구할 때 중요한 몇 가지 인자에 대하여 정확성에 주는 영향을 살펴보았다.

(1) 균열격자에서 물체의 외부에 놓이는 가상격자의 영향을 살펴보았다. 격자의 돌출부 길이가 길어질수록 응력강도계수 해가 작아져 일정한 값으로 수렴하였다.

(2) 균열격자의 상대적인 위치의 정확성에 미치는 영향도 살펴보았다. 가장 높은 정확성을 주는 경우는 균열격자가 유한요소의 요소면과 일치하는 경우이다.

(3) 원통 내면 및 외면에 존재하는 반타원형 표면균열을 해석할 경우에 정확성을 확보하기 위한 균열격자 형태 등에 대하여 살펴보았다. 또한 이에 대한 탄성해를 기존의 해와 비교하여 비교적 정확한 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

후 기

이 논문은 2008 년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었습니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Atluri, S.N., 1997, Structural Integrity and Durability, Tech Science Press, Forsyth.

(2) Nikishkov, G.P., Park, J.H. and Atluri, S.N., 2001, "SGBEM-FEM Alternating Method for Analyzing 3D Non-planar Cracks and Their Growth in Structural Components," *Comp. Modeling in Engng & Sci.*, Vol. 2, No. 3, pp. 401~422.

(3) Li, S. and Mear, M.E., 1998, "Singularity-reduced Integral Equations for Displacement Discontinuities in Three Dimensional Linear Elastic Media," *Int. J. Fracture*, Vol. 93, pp. 87~114.

(4) Li, S., Mear, M.E. and Xiao L., 1998, "Symmetric Weak-Form Integral Equation Method for Three-Dimensional Fracture Analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 151, pp. 435~459.

(5) Park, J.H. and Park, S.Y., 2007, “Elastic-Plastic Analysis of a 3-Dimensional Inner Crack Using Finite Element Alternating Method,” *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No 10, pp. 1009~1016.

(6) Park, J.H., 2009, “Analysis of Elastic-Plastic J Integrals for 3-Dimensional Cracks Using Finite Element Alternating Method,” *Transactions of the KSME A*, Vol. 33, No. 2, pp. 145~152.

(7) Newman, J.C. and Raju, I.S., 1981, "An Empirical Stress Intensity Factor Equation for Surface Cracks," *Engineering Fracture Mech.*, Vol. 15, pp. 185~192.

(8) Raju, I.S. and Newman, J.C., 1972, "Stress-Intensity Factors for Internal and External Surface Cracks in Cylindrical Vessels," *J. of Pressure Vessel Technology*, Vol. 104, pp. 293~298.