

동서양의 음의 생성을 통해본 정수비의 응용

이 규 봉 (배재대학교)

특정 정수비가 음의 생성에 어떻게 이용되었는지 구체적으로 설명하며, 서양의 피타고라스 음계를 만드는 과정 중 올려쌓은 방법과 동양의 삼분손익법에 의한 음계가 지리적으로 완전히 분리되어 만들어졌음에도 불구하고 완전히 동일함을 수치적으로 밝힌다.

1. 서론

19세기 영국의 수학자 실베스터(J. J. Sylvester)는 “음악은 감성의 수학이요, 수학은 이성의 음악이다.”라고 하였고, 프랑스 작곡가 라모(J. P. Rameau)는 “음악과 그토록 오래 함께해 왔음에도 불구하고, 음악에 대한 지식을 진정으로 이해하게 된 것은 수학의 도움에 의해서였다는 사실을 고백하지 않을 수 없다.”라고 하였다. 또한 작곡가 나운영은 ‘수학적 두뇌 없이는 음악을 할 수 없다.’라고 했다.

수학과 음악을 최초로 연결한 피타고라스(Pythagoras)는 사람의 마음과 몸을 잘 조율된 현의 진동에 비유하였고, 마음과 몸이 서로 조화를 이룰 때에 사람은 제 구실을 완벽하게 한다고 하였다. 수학자이자 천문학자인 케플러(Kepler)는 지구가 내는 소리는 ‘미-파-미’라 하였고, 오늘날과 같은 현대적인 의미의 장조와 단조의 개념도 확립하였다.¹⁾ 이처럼 수학과 음악은 매우 밀접한 관계가 있다.

피타고라스 당시에는 현의 길이로 음의 높고 낮음을 설명하였다. 같은 장력의 현은 길이가 짧을수록 높은 음이 난다. 주어진 현의 길이가 반으로 줄면 한 옥타브(octave) 위의 음이 나고, 2/3로 줄면 완전 5도 위의 음, 3/4로 줄면 완전 4도 위의 음이 난다.²⁾

갈릴레오는 현이 초당 진동하는 수(주파수)가 크면 음이 높고 작으면 음이 낮음을 발견하였다. 장력이 같은 현의 길이가 반으로 줄면 주파수는 두 배로 증가한다. 즉 현의 길이의 비와 주파수의 비는 반비례 관계이다. 따라서 주파수가 두 배이면 옥타브 위의 음이고, 3/2배이면 완전5도 위의 음,

* 접수일(2010년 9월 13일), 심사(수정)일(2010년 10월 8일), 게재확정일자(2010년 11월 8일)

* ZDM 분류 : F90

* MSC2000 분류 : 97

* 주제어 : 비율, 피타고라스 음계, 삼분손익법, 반음계

1) 김홍중 (2009).

2) 어느 음에서 그 음을 포함하여 네 번 째 음으로 두 개의 온음과 하나의 반음이 포함되면 완전4도라 하고, 다섯 번 째 음으로 세 개의 온음과 하나의 반음이 포함되면 완전5도라 한다. ‘도(D)’와 ‘파(F)’는 완전4도, ‘도(C)’와 ‘솔(G)’는 완전5도이다.

4/3배이면 완전4도 위의 음이 난다.

현을 튕기면 제일 낮은 주파수인 기본음이 울리며 동시에 그 주파수의 2배, 3배, ... 되는 음들이 함께 나온다. 이러한 음들을 배음(overtones)이라 하며 배음은 음색을 결정한다.

주파수 비가 1:2가 되는 음이 옥타브³⁾이므로 주파수 비가 1:4가 되는 음은 옥타브 음의 옥타브이다. 주파수 비가 1:3이 되는 음은 주파수 비가 1:2인 음과 어울려 2:3의 주파수가 되고, 주파수 비가 1:4가 되는 음은 주파수 비가 1:3이 되는 음과 어울려 3:4의 주파수가 된다. 즉 현을 튕길 때 주파수의 비가 작은 정수비 관계인 음들이 함께 울리면서 우리는 그 소리에 익숙하게 되고 울림이 좋다고 느낀다. 따라서 현을 튕길 때 우리는 항상 어울린화음(협화음)을 듣고 있는 셈이다. 다시 말하면 주파수의 비율이 작은 정수비 1:2, 2:3, 3:4, 4:5와 같은 음들은 협화음⁴⁾으로 우리는 이러한 화음에 익숙해져 있다.

이 논문의 목적은 수의 특정 비가 어떻게 음의 생성에 기여하는지 수학교육적인 면에서 살펴보는 것이다. 그러기 위하여 2장에서는 본 논문에 필요한 음악의 기본 용어에 관하여 설명하고, 3장과 4장에서는 수의 특정 비율이 음의 생성과정에 어떻게 연결되어 있는지 주파수의 비를 수치적으로 제시하며 설명한다. 3장에서는 서양의 피타고라스 음계를 논하며, 4장에서는 동양의 삼분손익법에 의한 음계에 대하여 논한다. 5장에서는 동서양의 두 음계를 구체적으로 함께 비교하여 지리적으로 그리고 시대적으로 떨어져 있음에도 불구하고, 올려쌓는 피타고라스 방법과 삼분손익법이 완전히 일치함을 주파수의 비로 보여 고대에 동양과 서양에서 만든 음은 거의 같음을 보여준다.

2. 음고와 음정 그리고 음계

음고(pitch, 음높이)란 소리에서 나오는 주파수를 사람이 귀를 통하여 뇌로 받아들여 느낀 것으로 주파수가 클수록 소리가 높다. 일반적으로 연주(concert pitch)할 때 A4음을 440Hz로 조율을 한다.⁵⁾ 인간이 들을 수 있는 주파수 범위는 대략 16~20000Hz이다. 여성이 말할 때 내는 소리는 220Hz(A3)이고 남성은 110Hz(A2) 정도로 여성이 남성보다 한 옥타브 위의 음을 낸다.

음고의 차를 음정(interval)⁶⁾이라고 한다. 피타고라스는 서로 다른 음정이라도 같은 종류의 음정으로 볼 수 있다는 것을 발견했다. 그것은 주파수가 두 배인 음정으로 옥타브라 한다. 화음을 이루는 음에서 옥타브 음정의 비인 1:2를 제외하면 으뜸은 2:3이다. 2:3인 음정은 완전5도가 되고, 3:4인 음정

3) 이동복. 국악에서는 일응음(一應音)이라고 한다. 김성숙 (2002). 두 음의 주파수 n 과 m 이 $\log_2 n = \log_2 m \pmod{1}$ 을 만족하면 두 음은 옥타브 관계에 있다.

4) Ulrich Michels (2000).

5) 1939년 런던에서 정해진 국제 표준 음 높이(standard pitch)는 정확히 435Hz A4(라)음이다. 그러나 연주(concert pitch)할 때는 약간 더 높게 A4음을 440Hz로 조율을 한다. 요즈음은 442Hz를 주로 사용한다.

6) 국악에서는 율정(律程)이라고 한다.

은 완전4도를 이룬다.

기본음에서 완전5도 올리고 다시 그 음에서 완전4도 올리면 주파수가 $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$ 이므로 한 옥타브위의 음이 된다. 따라서 옥타브 위의 음에서 완전4도 내린 것은 기본음에서 완전5도 올린 음과 같다. 피타고라스 이론에 의하면 '온음'은 완전5도 음정과 완전4도 음정의 차이를 뜻한다.

조율(temperament)은 사용할 음고들의 간격을 매기는 것이다. 그 중에서 몇 개 선택하여 뽑은 음들의 배열을 음계(scale)라 한다. 오늘날 서양음악에서 사용되는 평균율에 따른 온음계(diatonic scale, 7음계)의 배열은 다음 표와 같다.

<표 1> 온음계

이태리	도	레	미	파	솔	라	시
미국	C	D	E	F	G	A	B
한국	다	라	마	바	사	가	나

여기서 '도-레', '레-미', '파-솔', '솔-라', '라-시' 사이는 온음이고 '미-파', '시-도' 사이는 반음이다. 반음계(chromatic scale, 12음계)는 온음계의 온음 사이에 반음 올린 기호인 # 또는 반음 내린 기호인 b를 사용하여 다음과 같이 추가하여 배열한다.

<표 2> 반음계

C	C#(D ^b)	D	D#(E ^b)	E	F	F#(G ^b)	G	G#(A ^b)	A	A#(B ^b)	B
---	---------------------	---	---------------------	---	---	---------------------	---	---------------------	---	---------------------	---

우리나라의 전통음계 역시 12음계이다. 황종(黃鍾)을 기본음으로 하며 12음계에 해당하는 십이율명(十二律名)⁷⁾은 다음과 같다.

황종(黃鍾), 대려(大呂), 태주(太簇), 협종(夾鍾), 고선(姑洗), 중려(仲呂)
유빈(蕤賓), 임종(林鍾), 이칙(夷則), 남려(南呂), 무역(無射), 응종(應鍾)

이 음의 앞 글자를 따서 간단히 다음과 같이 표기한다.⁸⁾

황, 대, 태, 협, 고, 중, 유, 임, 이, 남, 무, 응

서양음계에서 주로 사용되는 온음계는 7음계이나 전통음악에서 주로 사용되는 평조음계는 '황, 대, 중, 임, 남' 5음계이다. '황'을 서양 음계의 'C' 음으로 하여 비교하면 서양음계와 전통음계는 다음과

7) 이동복. 서양음악에서는 음양의 개념이 없으나, 동양음악에서는 양성인 율과 음성인 려(呂)가 있어 십이율명이라고도 한다.
8) 이 음보다 한 옥타브 높으면 삼수변 'ㄱ'을 , 낮으면 사람 인 변 '이'을 왼쪽에 붙여 구분한다. (예) 橫, 橫

같이 비교할 수 있다.⁹⁾

<표 3> 서양음계와 전통음계의 비교

황	대	태	협	고	중	유	임	이	남	무	응
C	C [#]	D	D [#]	E	F	F [#]	G	G [#]	A	A [#]	B

3. 피타고라스 음계

피타고라스 조율은 최초로 고대 그리스에서 사용된 체계적인 조율법으로 엄격한 수학적 원칙을 기본으로 하였다. 서양에서는 기원전 3500년 전부터 율림이 좋은 음 간격을 찾아서 조율을 했고, 옥타브 사이의 음들을 적당한 간격으로 나누어 다음 옥타브 위에 반복하여 쓰고자 했다.

서론에서 설명했듯이 현을 튕기면 배음들이 함께 나온다. 한 옥타브 내에서 보면 이 음들은 2:3의 주파수 비와 3:4의 주파수 비 등을 가지며 화음을 이룬다. 피타고라스 조율은 주어진 현의 길이를 2:3의 비율로 줄이거나 늘리는 방법으로 5도씩의 음을 쌓는 방법이다.¹⁰⁾ 이 방법을 구체적으로 살펴 보면, 다음 두 가지 방법으로 각각 구한 음을 서로 비교하여 정수비가 작은 것을 택해 음계를 만든다.

올려쌓는 방법 기준 현의 길이를 2/3씩 줄이되 그 길이가 반 이하로 작아지면 두 배를 하여 다시 2/3씩 줄이며 연속적으로 음을 찾는다.

내려쌓는 방법 기준 현의 길이의 반을 3/2씩 늘리되 그 길이가 두 배 이상 커지면 반으로 나누어 다시 3/2씩 늘리며 연속적으로 음을 찾는다.

길이와 주파수는 반비례하므로 이 방법의 길이를 주파수로 바꾸면 다음과 같다.

올려쌓는 방법 기준 음의 주파수를 3/2배 크게 하되 그 크기가 두 배 이상 커지면 반으로 나누어 다시 3/2배씩 크게 하며 연속적으로 음을 찾는다.

내려쌓는 방법 옥타브 위의 음의 주파수를 2/3배씩 작게 하되 그 크기가 반 이하로 작아지면 두 배하여 다시 2/3배씩 작게 하며 연속적으로 음을 찾는다.

기본음의 주파수를 편의상 1이라 하고 그 음을 'C'라고 하자. 올려쌓는 방법을 따르면 첫 번째 음의 주파수는 3/2이다. 그 다음 음의 주파수는 9/4이나 2보다 크므로 2로 나누면 두 번째 음은 9/8가

9) 윤명원 외 4인 (2008). 황은 아악이나 당악에서는 C, 향악에서는 E^b, 민속악에서는 F에 가깝다.

10) Ulrich Michels (2000).

된다. 이 과정에서 주파수가 두 배 이상이 되어 반으로 나누는 과정이 포함된 곳은 '2, 4, 6, 7, 9, 11' 번째로 모두 6곳이다. 이와 같은 방법으로 모든 음을 찾으면 다음과 같다.¹¹⁾

<표 4> 올려쌓는 방법으로 만든 피타고라스 음계와 주파수 비

단계	주파수의 비		생성된 음
	소수형	분수형	
0	1	1	C
1	1.5000	3/2	G
2	1.1250	9/8	D
3	1.6875	27/16	A
4	1.2656	81/64	E
5	1.8984	243/128	B
6	1.4238	729/512	F [#]
7	1.0679	2187/2048	C [#]
8	1.6018	6561/4096	G [#]
9	1.2014	19683/16384	D [#]
10	1.8020	59049/32768	A [#]
11	1.3515	177147/131072	F
12	2.0273	531441/262144	

첫 5음 'C, G, D, A, E'를 반음 없는 5음 음계라 하고, 7개의 5도로 이루어진 음 'F, C, G, D, A, E, B'를 전음계적 7음계라 한다. 11번째 찾은 음에서 다시 2:3의 비로 찾은 12번째 음의 주파수 $\frac{531441}{262144}$ 은 2보다 크므로 첫 음의 옥타브와 일치하지 않고 넘어선다. 이 음을 2로 나누어 옥타브 내로 조정하면 $\frac{531441}{524288}$ 를 소인수 분해하면 $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ 으로 약 1.0136이다. 이 비를 '피타고라스 콤마 (Pythagorean comma)'라 한다.

올려쌓는 방법으로 음을 만들었을 때 12번째 음은 기준음보다 피타고라스 콤마만큼 높은 음을 낸다.

기본음의 주파수를 3/2배 하여 구한 완전5도 위의 음은 한 옥타브 위의 음에서 완전4도 아래인 음과 같으므로, 옥타브 음의 주파수에 3/4배를 하여 내려가며 찾아도 위 표와 똑같다. 즉 기본음에서 2:3으로 음을 올라가며 만드는 것(5도씩 올라감)이나 옥타브에서 3:4로 음을 내려가며 만드는 것(4도씩 내려감)이나 결과는 같다.

11) 현의 길이는 주파수의 비에 반비례하므로 기본음에 대한 현의 길이를 찾고자 할 때는 역수를 취하면 된다.

<표 4>에서 생성된 음들을 음 높이 순으로 각각 나열하면 다음과 같다. 이 표에서 이웃한 음의 차이는 각 음계의 음에서 이웃한 낮은 음으로 나눈 비이다.

<표 5> 올려쌓는 방법으로 만든 피타고라스 음계의 주파수 비와 이웃한 음차

음고	주파수 비		이웃한 음차	
	소수형	분수형	12음계	7음계
C	1.0000	1		
C#	1.0679	2187/2048	2187/2048	
D	1.1250	9/8	256/243	9/8
D#	1.2014	19683/16384	2187/2048	
E	1.2656	81/64	256/243	9/8
F	1.3515	177147/131072	2187/2048	2187/2048
F#	1.4238	729/512	256/243	
G	1.5000	3/2	256/243	65536/59049
G#	1.6018	6561/4096	2187/2048	
A	1.6875	27/16	256/243	9/8
A#	1.8020	59049/32768	2187/2048	
B	1.8984	243/128	256/243	9/8
옥타브 C	2.0273	531441/262144	2187/2048	2187/2048

내려쌓는 방법에선 기본음의 옥타브에 2/3을 곱하여 첫 번째 음의 주파수 4/3를 얻는다. 그 다음 음은 8/9이나 1보다 작으므로 두 배하여 두 번째 음은 16/9이 된다. 주파수가 반 이하가 되어 두 배하는 과정이 포함된 곳은 올려쌓는 방법과 마찬가지로 '2, 4, 6, 7, 9, 11' 번째로 모두 6곳이다. 이와 같은 방법으로 모든 음을 찾으면 다음과 같다.

<표 6> 내려쌓는 방법으로 만든 피타고라스 음계와 주파수 비

단계	주파수의 비		생성된 음
	소수형	분수형	
0	2	2	C
1	1.3333	4/3	F
2	1.7778	16/9	Bb
3	1.1852	32/27	Eb
4	1.5802	128/81	Ab
5	1.0535	256/243	Db
6	1.4047	1024/729	Gb
7	1.8729	4096/2187	B
8	1.2486	8192/6561	E
9	1.6648	32768/19683	A
10	1.1099	65536/59049	D
11	1.4798	262144/177147	G
12	0.9865	524288/531441	

<표 6>의 주파수 비는 <표 4>의 주파수 비의 역수를 두 배한 것이다. 11번째 찾은 음에서 다시 3:4의 비로 찾은 12번째 음은 $\frac{524288}{531441}$ 로 첫 음의 옥타브 아래 음과 일치하지 않는다. 이 수의 역수는 올려쌓는 방법에서 나온 피타고라스 콤마와 같다.

내려쌓는 방법으로 음을 만들었을 때 12번째 음은 기본음보다 피타고라스 콤마만큼 낮 음을 낸다. 기본음에서 4/3배를 하여 올라가며 찾아도 위와 똑같은 표를 얻는다. 즉 옥타브 음에서 2:3으로 음을 내려가며 만드는 것(5도씩 내려감)이나 기본음에서 3:4로 음을 올라가며 만드는 것(4도씩 올라감)이나 결과는 같다. <표 6>의 음들을 음 높이 순으로 각각 나열하면 <표 7>과 같다.

<표 7> 내려쌓는 방법으로 만든 피타고라스 음계와 주파수 비와 이웃한 음차

음고	주파수 비		이웃한 음차	
	소수형	분수형	반음계	온음계
C	0.9865	524288/531441		
Db	1.0535	256/243	2187/2048	
D	1.1099	65536/59049	256/243	9/8
Eb	1.1852	32/27	2187/2048	
E	1.2486	8192/6561	256/243	9/8
F	1.3333	4/3	2187/2048	2187/2048
Gb	1.4047	1024/729	256/243	
G	1.4798	262144/177147	256/243	65536/59049
Ab	1.5802	128/81	2187/2048	
A	1.6648	32768/19683	256/243	9/8
Bb	1.7778	16/9	2187/2048	
B	1.8729	4096/2187	256/243	9/8
옥타브 C	2	2	2187/2048	2187/2048

<표 5>와 <표 7>를 비교하면 같은 음정에서 올려쌓은 음정이 내려쌓은 음정보다 조금 더 높은 음이나 이웃한 음차는 같음을 알 수 있다. 또한 이웃한 반음 사이의 간격은 일정하지 않고 $\frac{2187}{2048}$ 과 $\frac{256}{243}$ 이 번갈아 나온다. 온음인 F와 G의 비는 $\frac{65536}{59049}$ 이고 그 외 온음 사이의 간격은 모두 $\frac{9}{8}$ 이다. 이것들의 수치적인 관계는 다음과 같다.

$$\frac{2187}{2048} \times \frac{256}{243} = \frac{9}{8}, \quad \frac{256}{243} \times \frac{256}{243} = \frac{65536}{59049}$$

$\frac{256}{243} < \frac{2187}{2048}$ 이므로 온음 사이의 반음끼리 간격이 같지 않고, 같은 온음일지라도 F와 G의 간격이 다른 온음 사이의 간격보다 더 좁음을 알 수 있다.

다음 표에서 올려쌓아 나온 음과 내려쌓아 나온 음의 주파수 비를 비교하자. 올려쌓아 나온 음을 내려쌓아 나온 음으로 나눈 비를 보면 음에 관계없이 모두 그 비피타고라스 콤마 $\frac{531441}{524288}$ 로 1보다 조금 크다. 즉 올려쌓은 음계가 내려쌓은 음계보다 모든 음에서 음이 조금 높음을 알 수 있다.

<표 8> 올려쌓은 음계와 내려쌓은 음계의 비교

음고	올려쌓음	내려쌓음	올림/내림
C	1	524288/531441	531441/524288
C#, Db	2187/2048	256/243	531441/524288
D	9/8	65536/59049	531441/524288
D#, Eb	19683/16384	32/27	531441/524288
E	81/64	8192/6561	531441/524288
F	177147/131072	4/3	531441/524288
F#, Gb	729/512	1024/729	531441/524288
G	3/2	262144/177147	531441/524288
G#, Ab	6561/4096	128/81	531441/524288
A	27/16	32768/19683	531441/524288
A#, Bb	59049/32768	16/9	531441/524288
B	243/128	4096/2187	531441/524288
옥타브 C	531441/262144	2	531441/524288

올려쌓는 방법과 내려쌓는 방법으로 나온 음의 정수비는 <표 8>에서 보듯이 같은 음에 대해 ‘피타고라스 콤마’ 만큼의 차이가 난다. 각 음의 주파수 비 중 작은 정수비를 택하여 나열한 피타고라스 음계는 다음과 같다.

<표 9> 피타고라스 음계와 이웃한 음차

음고	피타고라스 음계		이웃한 음차	
	소수형	분수형	반음계	온음계
C	1	1		
C#, Db	1.0535	256/243	256/243	
D	1.1250	9/8	2187/2048	9/8
D#, Eb	1.1852	32/27	256/243	
E	1.2656	81/64	2187/2048	9/8
F	1.3333	4/3	256/243	256/243
F#, Gb	1.4238	729/512	2187/2048	
G	1.5000	3/2	256/243	9/8
G#, Ab	1.5802	128/81	256/243	
A	1.6875	27/16	2187/2048	9/8
A#, Bb	1.7778	16/9	256/243	
B	1.8984	243/128	2187/2048	9/8
C	2	2	256/243	256/243

<표 9>에서 보듯이 피타고라스 음계는 온음계에서 올려쌓을 때와 내려쌓을 때 생긴 F와 G의 간격이 다른 온음의 간격보다 좁은 문제점이 없이 모두 그 비가 $\frac{9}{8}$ 로 동일하며 반음 사이도 모두 $\frac{256}{243}$ 로 같다. 반음계에서는 <표 5> 또는 <표 7>과 달리 $\frac{256}{243}$ 과 $\frac{2187}{2048}$ ¹²⁾의 나온 순서가 바뀌었다.

$\frac{2187}{2048} > \frac{256}{243}$ 이므로 온음 사이의 반음은 반음 아래음과 반음 위음의 비가 다르다. 그러나 $\frac{2187}{2048} \times \frac{256}{243} = \frac{9}{8}$ 이므로 이웃한 반음 사이의 주파수의 곱은 온음 사이의 주파수와 같다.

따라서 피타고라스 음계를 따르면 기본음보다 한 음 높은 음은 현의 길이가 기본음일 때 길이의 $\frac{8}{9}$ 일 때 나오며, 반음 높은 음은 기본음일 때 현의 길이의 $\frac{243}{256}$ 일 때 나온다.

12) 이동복. $\frac{256}{243}$ 과 $\frac{2187}{2048}$ 을 각각 피타고라스의 림마(Limma)와 아포토메(Apotome)라 하며, 중국음악에서는 소반음(小半音)과 대반음(大半音)이라고 한다.

4. 삼분손익법에 따른 음계

삼분손익법(三分損益法)은 중국에서 들어온 음률 산정법으로 삼분손일(三分損一)과 삼분익일(三分益一)을 교대로 적용하여 12율(律)을 얻는 방법이다. 우리나라에서는 세종 때 12율관을 제정하였다.¹³⁾

서양에서는 현의 길이를 이용하였으나 중국에서는 굵기가 일정한 대나무를 사용하여 음의 표준인 '황종율관'을 정하였다. 이 방법은 기본음 황종이 소리 나는 율관을 기준으로, 그 율관의 길이의 1/3을 빼거나(삼분손일) 또는 더하는(삼분익일) 과정을 되풀이 하여 나머지 11율을 얻는다. 과정 중에 율관의 길이가 기준 율관 길이의 반보다 작아지면 그 전 단계를 한 번 더 시행한다.

기본음을 삼분손일하면 그 길이가 2/3가 되고, 익일하면 4/3가 되므로 삼분손일한 것에 대하여 삼분익일한 것은 그 길이가 두 배가 된다. 따라서 기본음을 삼분손일 한 음은 기본음을 삼분익일 한 음의 옥타브가 되며, 기본음을 삼분손일 한 음은 기본음의 옥타브 음을 삼분익일한 음과는 동일하다. 그러므로 삼분손익법에서 삼분손일을 먼저 하든 삼분익일을 먼저 하든 결과는 같다.

피타고라스 음계와 비교하면 삼분손일은 2:3의 비로 주파수가 3/2배로 커진 것이고, 삼분익일은 4:3의 비로 주파수가 4/3배로 작아진 것이다. 삼분손익법의 길이를 주파수로 바꾸면 다음과 같다.

삼분손익법 기본 율관의 주파수를 3/2배 크게 하고, 다시 그 주파수를 3/4배로 작게 하는 과정을 반복하되 그 크기가 2보다 크면 그 전 단계를 한 번 더 시행한다.

삼분손익법에 의한 주파수 비와 생성된 음은 다음과 같다.

13) 장사훈 (1985).

<표 10> 삼분손익법으로 만든 음계와 주파수 비

단계	주파수의 비		생성된 음
	소수형	분수형	
0	1.0000	1	황
1	1.5000	3/2	임
2	1.1250	9/8	태
3	1.6875	27/16	남
4	1.2656	81/64	고
5	1.8984	243/128	응
6	1.4238	729/512	유
7	1.0679	2187/2048	대
8	1.6018	6561/4096	이
9	1.2132	19683/16384	협
10	1.8120	59049/32768	무
11	1.3515	177147/131072	중
12	2.0273	531441/262144	

<표 10>에 의하면 황종 율관을 3등분하여 하나를 빼면 5도 높은 임종(林鍾) 음을 얻고, 임종 율관을 3등분한 길이의 하나를 더 더하면 4도 낮은 태주(太簇) 음을 얻는다. 태주 율관의 길이를 3등분하여 하나를 빼면 5도 높은 남려(南呂) 음을 얻고, 남려 율관을 3등분한 길이의 하나를 더 더하면 4도 낮은 고선(姑洗) 음을 얻는다. 고선 율관 길이를 3등분하여 하나를 빼면 5도 높은 응종(應鍾) 음을 얻고, 응종 율관을 3 등분한 길이의 하나를 더 더하면 4도 낮은 유빈(蕤賓) 음을 얻는다. 유빈 율관을 3등분 한 길이의 하나를 빼면 옥타브 높은 음을 얻게 되므로 유빈에서는 다시 한 번 3등분 한 길이의 하나를 더 더하여 4도 낮은 대려(大呂) 음을 얻는다. 대려 율관 길이를 3등분하여 하나를 빼면 5도 높은 이칙(夷則) 음을 얻고, 이칙 율관을 3등분한 길이의 하나를 더 더하면 4도 낮은 협종(夾鍾) 음을 얻는다. 협종 율관 길이를 3등분하여 하나를 빼면 5도 높은 무역(無射) 음을 얻고, 무역 율관을 3등분한 길이의 하나를 더 더하면 4도 낮은 중려(仲呂) 음을 얻어 12울을 얻는다.

삼분손익법은 기준음을 포함하여 8울씩 거리를 두고 계속 반복하여 12울을 만든다고 하여 격팔상생법, 6울씩 거리를 두고 계속 뒤로 반복하여 12울을 만든다고 하여 순팔역육법이라고도 한다.

즉 황(0), 대(1), 태(2), 협(3), 고(4), 중(5), 유(6), 임(7), 이(8), 남(9), 무(10), 응(11)과 같이 번호를 붙이면, 황(0)부터 시작하여 앞으로 갈 땐 7을 더하고 뒤로 갈 땐 5를 빼, 그 결과를 12로 나누어 나머지만 계산하면¹⁴⁾ 다음과 같은 수와 그에 대응하는 음을 구할 수 있다.

14) 합의 결과를 12로 나누어 나머지를 표시한다. 수학적인 용어로 'mod 12'라 한다.

격팔상생법	순팔역육법	생성음
$0 + 7 \equiv 7$	$0 - 5 \equiv 7$	황⇒입
$7 + 7 \equiv 2$	$7 - 5 \equiv 2$	입⇒태
$2 + 7 \equiv 9$	$2 - 5 \equiv 9$	태⇒남
$9 + 7 \equiv 4$	$9 - 5 \equiv 4$	남⇒고
$4 + 7 \equiv 11$	$4 - 5 \equiv 11$	고⇒웅
$11 + 7 \equiv 6$	$11 - 5 \equiv 6$	웅⇒유
$6 + 7 \equiv 1$	$6 - 5 \equiv 1$	유⇒대
$1 + 7 \equiv 8$	$1 - 5 \equiv 8$	대⇒이
$8 + 7 \equiv 3$	$8 - 5 \equiv 3$	이⇒협
$3 + 7 \equiv 10$	$3 - 5 \equiv 10$	협⇒무
$10 + 7 \equiv 5$	$10 - 5 \equiv 5$	무⇒중
$5 + 7 \equiv 0$	$5 - 5 \equiv 0$	중⇒황

5. 결 론

배음에서 나온 2:3이나 3:4와 같은 특정한 정수비는 동양과 서양을 가리지 않고 음을 생성하는 데 매우 중요한 역할을 하였다.

삼분손익법의 “기본 율관의 주파수를 3/2배 크게 하고, 다시 그 주파수를 3/4배 작게 하는 과정을 반복하되 그 크기가 2보다 크면 그 전 단계를 한 번 더 시행한다.”를 다시 살펴보자. “그 크기가 2보다 크면 그 전 단계를 한 번 더 시행한다.”는 것은, 그 전 단계에서 3/2배를 하였기에 2보다 커진 것이므로 다음 단계의 음은 3/2 대신 한 번 더 3/4배 하여 얻는 것과 같다. $\frac{3}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$ 이므로 이는 올려쥌는 피타고라스 방법에서 “3/2배 크게 하되 그 크기가 2보다 크면 반으로 나눈다.”와 같은 뜻이다.

따라서 삼분손익법은 <표 4>와 <표 11>에서 보듯이 올려쥌는 피타고라스 방법과 완전히 일치한다. 격팔상생법은 피타고라스의 올려쥌는 방법에서 2:3의 비로 올려쥌는 방법과 같고, 순팔역육법은 3:4의 비로 내려쥌는 방법과 같다.

피타고라스와 삼분손익법에 의한 반음계를 비교한 <표 12>를 보면 대반음(아포토메)과 소반음(림마)이 교대하는 것을 볼 수 있다. <표 13>은 온음계를 비교한 것이다. <표 13>에서 보면 삼분손익법에 의한 음계는 피타고라스의 온음계와 비교하였을 때 $\frac{4}{3} < \frac{177147}{131072}$ 이므로 ‘황’을 ‘C’로 보았을 때 ‘중’은 ‘F’보다 약간 음이 높다. 다른 온음 사이의 중간음들도 모두 삼분손익법에 의한 음계가 약

간 음이 높다.

끝으로 삼분손익법에서 기본 율관의 길이를 2등분 하여 하나 더하고(2:3), 4등분하여 하나 빼는 (4:3) 과정을 시행하면 그것은 정확히 내려쑤는 피타고라스 방법과 같다.

<표 12> 피타고라스와 삼분손익법에 의한 반음계의 비교

	피타고라스		올려쑤은방법, 삼분손익법	
	주파수 비	이웃한 음차	주파수 비	이웃한 음차
C 황	1		1	
C# 대	256/243	256/243	2187/2048	2187/2048
D 태	9/8	2187/2048	9/8	256/243
D# 협	32/27	256/243	19683/16384	2187/2048
E 고	81/64	2187/2048	81/64	256/243
F 중	4/3	256/243	177147/131072	2187/2048
F# 유	729/512	2187/2048	729/512	256/243
G 임	3/2	256/243	3/2	256/243
G# 이	128/81	256/243	6561/4096	2187/2048
A 남	27/16	2187/2048	27/16	256/243
A# 무	16/9	256/243	59049/32768	2187/2048
B 응	243/128	2187/2048	243/128	256/243
C 황	2	256/243	531441/262144	2187/2048

<표 13> 피타고라스와 삼분손익법에 의한 온음계의 비교

	피타고라스		올려쑤은방법, 삼분손익법	
	주파수 비	이웃한 음차	주파수 비	이웃한 음차
C 황	1		1	
D 태	9/8	9/8	9/8	9/8
E 고	81/64	9/8	81/64	9/8
F 중	4/3	256/243	177147/131072	2187/2048
G 임	3/2	9/8	3/2	65536/59049
A 남	27/16	9/8	27/16	9/8
B 응	243/128	9/8	243/128	9/8

Acknowledgement: 본 연구를 위하여 음악에 관련된 여러 사실에 대해 조언을 해주신 배재대학교 음악과 김영집 박사님과 한국예술종합학교의 남상숙 박사님께 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

- 김성숙 (2002). 수학과 음악, 한국수학사학회지 15(2), 93-100.
- 김홍중 (2009). 문명 수학의 필하모니, 파주 : 효형출판.
- 윤명원 · 허화병 · 조창규 · 김동현 · 김요섭 (2008), 한국음악론, 파주 : 음악세계.
- 이동복 (미발간). 악학궤범의 권일에는 어떤 내용이 들어 있을까요?
- 장사훈 (1985). 최신국악총론, 서울 : 세광음악출판사.
- Ulrich Michels (2000). 음악은이, 서울 : 음악춘추사.

The Application of Integer Ratio in Making Eastern and Western Notes

Gyou Bong Lee

Dept. of Applied Math., Paichai University, Daejeon 302-175, Korea

E-mail : gblee@pcu.ac.kr

Explain concretely how to apply some integer ratios in making Eastern and Western notes, and show numerically that the chromatic scale coming from the upholding Pythagoras method in Western and the Sambunsonikbub in Eastern are perfectly equal even if they are far from geographically.

* ZDM Classification : F90

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97

* Key Words : integer ratio, chromatic scale, Pythagoras method, Sambunsonikbub