

진동 및 처짐해석을 위한 개선된 곡선보이론

Improved Curved Beam Theory for Vibration and Deflection Analyses

김 남 일* 최 정 호**
Kim, Nam-Il Choi, Jung-Ho

요 약

본 연구에서는 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동 및 처짐해석을 위하여 박벽단면을 갖는 기존의 곡선보 이론의 단점을 보완하고자 도심-전단중심 정식화에 근거한 개선된 곡선보 이론을 제시한다. 변위장은 각각 도심과 전단중심에서 정의한 변위파라미터를 도입하여 나타내었으며 곡선보의 두께-곡률 효과와 회전관성효과를 고려한 개선된 변형에너지와 운동에너지를 엄밀하게 유도하였다. 본 연구의 타당성과 정확성을 증명하기 위하여 Hermitian 곡선보요소를 사용한 유한요소해석을 수행하였으며 해석 결과들을 도심 정식화에 의하여 산정한 결과, 선행 연구자들의 결과 및 ABAQUS의 쉘요소를 이용한 결과와 비교하였다.

Abstract

To overcome the drawback of currently available curved beam theories having non-symmetric thin-walled cross sections, a curved beam theory based on centroid-shear center formulation is presented for the spatially coupled free vibration and elastic analyses. For this, the displacement field is expressed by introducing displacement parameters defined at the centroid and shear center axes, respectively. Next the elastic strain and kinetic energies considering the thickness-curvature effect and the rotary inertia of curved beam are rigorously derived by degenerating the energies of the elastic continuum to those of curved beam. In order to illustrate the validity and the accuracy of this study, FE solutions using the Hermitian curved beam elements are presented and compared with the results by centroid formulation, previous research and ABAQUS's shell elements.

키워드 : 곡선보, 비대칭 박벽 단면, 자유진동해석, 처짐해석

Keywords : curved beam, non-symmetric thin-walled cross section, free vibration analysis, deflection analysis

1. 서 론

곡선보 구조물은 스프링, 곡선 거더교, 항공 기구조물의 보강재, turbo machinery blades 등 기계, 항공, 토목 및 건축공학분야에 널리 사용되어왔다. 일반적으로 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보 구조물의 진동과 처짐거동은 축방향 및 휨 그리고 비틀변형이 연계하여 발생하기 때문에 매우 복잡하다. 곡선보의 거동에 관한 연구는 초창기의 연구자들(Vlasov⁽¹⁾, Timoshenko와 Gere⁽²⁾)에 의해 제안된 이후 Dabrowski⁽³⁾, Heins⁽⁴⁾, Gjelsvik⁽⁵⁾에 의해 이론과 응용이 점차적으로 확장되었다.

현재까지 여러 연구자들(Raveendranath등⁽⁶⁾, Lee⁽⁷⁾, Gupta와 Howson⁽⁸⁾)은 곡선보의 면내자유진동에 대해 경계조건, 전단변형, 회전관성, 곡률 등과 같은 다양한 파라미터를 고려하여 연구하였으며 연계효과가 없는 면외자유진동에 관하여 여러 연구자들에 의해 연구가 수행되었다 (Chucheepsakul와 Saetiew⁽⁹⁾, Cortínez와 Piovan⁽¹⁰⁾).

도심-전단중심 정식화에 근거한 비대칭단면을 갖는박벽 직선보의 경우 보의 축방향, 휨, 뒹(warping)변형의 연계가 없다는 것은 잘 알려진 사실이다. 한편 도심-전단중심 정식화에 근거한 곡선보의 처짐 및 안정성에 관한 대부분의 선행연구들(Yang와 Kuo^(11,12), 윤기용과 강영중⁽¹³⁾)은 이축대칭 단면을 갖는 곡선보에 제한되었다. 아직까지도 비대칭 단면을 갖는 대부분의

* 한양대학교 건설환경공학과 연구교수, 공학박사

** 한경대학교 토목공학과 부교수(교신저자)

Tel: 031-670-5145 Fax: 031-675-9619

E-mail : jhchoi@hknu.ac.kr

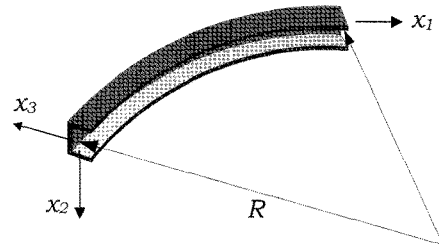
박벽곡선보이론은 도심축(Gendy와 Saleeb^(14,15), Hu등⁽¹⁶⁾, Saleeb와 Gendy⁽¹⁷⁾, 서광진 등⁽¹⁸⁾, 민병철과 김문영⁽¹⁹⁾)에서 정의된 변위파라미터에 근거하여 개발되어왔다. 그러나 L형 및 T형 등의 단면을 갖는 박벽곡선보의 진동해석과 처짐해석의 경우 도심정식화에 근거한 식은 도심에서 단면의 뒹함수가 영이 되지 않기 때문에 뒹변형과 관련한 여러 단면계수들을 추가적으로 산정하여야 하는 번거로움이 있다. 이러한 문제를 극복하기 위하여 Tong과 Xu⁽²⁰⁾는 도심-전단중심에 근거한 비대칭 단면을 가진 곡선보이론을 발표하였다. 그러나 이들의 연구는 곡선보의 처짐해석에 국한되었다.

본 연구에서는 도심에서 정의된 축방향 및 휨변위와 전단중심에서 정의된 비틀 및 뒹변위를 이용한 도심-전단중심 정식화에 근거하여 비대칭단면을 갖는 개선된 곡선보이론을 제시하고자 한다. 특히 L형 및 T형 등의 단면을 갖는 곡선보에서는 전단중심에서 뒹변위가 영이 되므로 뒹변위와 관련한 단면상수를 자연스럽게 줄일 수 있다. 또한 비대칭 폐합단면을 갖는 곡선보에서는 도심-전단중심 정식화에서 뒹이 극단적으로 커지기 때문에 뒹변형만을 무시할 수 있게 된다. 본 연구에서 제시한 중요사항을 아래에 요약하였다.

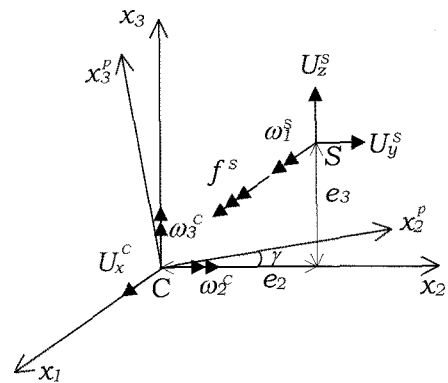
1. 일정곡률을 갖는 곡선보의 변위장은 도심에서 정의된 축방향 변위와 두개의 휨에 의한 회전변위, 전단중심에서 정의된 뒹변위와 두개의 횡변위를 포함하는 비틀변위를 도입하였다.
2. 다음으로 두께-곡률효과를 고려하는 수직응력에 의한 힘-변위관계를 일반좌표계에서 정확하게 유도하였다.
3. 도심-전단중심 정식화에 근거한 탄성변형에너지와 운동에너지를 박벽단면을 가지는 비대칭 곡선보의 자유진동해석과 처짐해석을 위하여 새로이 유도하였다.
4. 추가적으로 Hermitian 곡선보요소를 사용하여 비대칭 곡선보 해석을 수행하였다. 마지막으로 제안된 연구의 타당성을 검증하기 위해 수치해를 문헌의 연구결과와 ABAQUS⁽²¹⁾ 쉘요소의 해석결과와 비교하였다.

2. 곡선보 이론

2.1 변형률-변위관계



〈그림 1〉 곡선보의 좌표계



S: Shear center

C: Centroid

〈그림 2〉 변위파라미터

그림 1과 2는 각각 곡률반경 R 을 갖는 곡선보의 좌표계 및 변위파라미터를 보여주고 있다. 여기서 (e_2, e_3) 는 전단중심의 위치를 나타내며 γ 는 x_2 과 x_2^p 사이의 각을 나타낸다. 그림 2로부터 단면이 면내변형에 대해 강체라고 가정하므로 변위장은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_1 = U_x + x_3\omega_2 - x_2\omega_3 + f\phi(x_2, x_3) \quad (1a)$$

$$U_2 = U_y - \theta(x_2 - e_3) \quad (1b)$$

$$U_3 = U_z + \theta(x_2 - e_2) \quad (1c)$$

여기서 U_x, ω_2, ω_3 는 x_1, x_2, x_3 방향에 대한 강체 이동변위와 강체회전변위, 그리고 θ, U_y, U_z 는 x_1^s, x_2^s, x_3^s 방향에 대한 강체회전변위 및 두개의 강체이동변위를 나타내며, f, ϕ 는 뒹변형에 의한 변위파라미터와 도심-전단중심 정식화에서

정의된 정규화된 뒤틀함수를 나타낸다. 또한, 도심-전단중심 정식화에 대한 단면상수는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_A x_3^2 dA, I_3 = \int_A x_2^2 dA, I_{23} = \int_A x_2 x_3 dA \\ I_\phi &= \int_A \phi^2 dA, I_{\phi 2} = \int_A \phi x_2 dA, I_{\phi 3} = \int_A \phi x_3 dA \\ I_{222} &= \int_A x_3^3 dA, I_{223} = \int_A x_2 x_3^2 dA, I_{233} = \int_A x_2^2 x_3 dA \\ I_{\phi 22} &= \int_A \phi x_2^2 dA, I_{\phi 23} = \int_A \phi x_2 x_3 dA, I_{\phi \phi 2} = \int_A \phi^2 x_2 dA \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 A, I_2, I_3, I_{23} 는 각각 단면적, x_2 및 x_3 축에 대한 단면2차모멘트, 관성모멘트의 적을 나타내며 I_ϕ 는 뒤틀상수이다. $I_{\phi 2}, I_{\phi 3}$ 는 항상 영이며, $I_{222}, I_{223}, I_{233}, I_{\phi 22}, I_{\phi 23}, I_{\phi \phi 2}$ 는 길이가 일정한 곡선보에서 큰 내부각과 작은 반지름을 가지는 곡선보의 두께-곡률효과를 고려하는 단면상수를 나타낸다. 다음으로 도심-전단중심 정식화에 대한 단면력은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_A \tau_{11} dA, F_2 = \int_A \tau_{12} dA, F_3 = \int_A \tau_{13} dA \\ M_1 &= \int_A [\tau_{13}(x_2 - e_2) - \tau_{12}(x_3 - e_3)] dA \\ M_2 &= \int_A \tau_{11} x_3 dA, M_3 = - \int_A \tau_{11} x_2 dA, M_\phi = \int_A \tau_{11} \phi dA \\ M_R &= \int_A \left[\tau_{12} \phi_{,2} + \tau_{13} \left(\phi_{,3} - \frac{\phi}{R+x_3} \right) \right] \frac{R+x_3}{R} dA \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, F_1 는 도심에 작용하는 축력, F_2 와 F_3 는 전단중심에 작용하는 전단력, M_1 는 전단중심에 대한 총 비틀모멘트, M_2, M_3 는 x_2 및 x_3 축에 대한 휨모멘트, M_ϕ 및 M_R 는 전단중심에 대한 바이모멘트와 비틀모멘트를 나타낸다.

다음으로 연속체에 대한 가상일의 원리로부터 다음과 같이 포텐셜에너지 Π 를 표현할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E - \Pi_M - \Pi_{ext} \quad (4)$$

여기서

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A [\tau_{11} e_{11} + 2\tau_{12} e_{12} + 2\tau_{13} e_{13}] \frac{R+x_3}{R} dA dx_1 \quad (5a)$$

$$\Pi_M = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^l \int_A [U_1^2 + U_2^2 + U_3^2] \frac{R+x_3}{R} dA dx_1 \quad (5b)$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^T \mathbf{F}_e \quad (5c)$$

여기서, \mathbf{U}_e 와 \mathbf{F}_e 는 절점변위벡터 및 절점력 벡터를 나타낸다. 또한 선형 변형률-변위관계는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R} \right) \frac{R}{R+x_3} \\ &= \left[\left(U_x' + \frac{U_z}{R} - \frac{e_2 \theta}{R} \right) + x_2 \left(\frac{\theta}{R} - \omega_3' \right) + x_3 \omega_2' + \phi f' \right] \frac{R}{R+x_3} \end{aligned} \quad (6a)$$

$$2e_{12} = \frac{U_{2,1} R}{R+x_3} + U_{1,2} \quad (6b)$$

$$= [U_y' - \theta(x_3 - e_3)] \frac{R}{R+x_3} - \omega_3 + f \phi_{,2}$$

$$2e_{13} = \left(U_{3,1} + \frac{U_1}{R} \right) \frac{R}{R+x_3} + U_{1,3} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{U_x}{R} + U_z' + \theta' + (x_2 - e_2) - \frac{x_3}{R} \omega_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_2}{R} \omega_3 - \frac{f}{R} \phi \right] \frac{R}{R+x_3} + \omega_2 + f \phi_{,3} \end{aligned}$$

이후 식(6)을 식(5a)에 대입하고 단면적에 대하여 적분을 행함으로써 박벽 원형보의 변형에너지식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[F_1 \left(U_x' + \frac{U_z}{R} - \frac{e_2 \theta}{R} \right) + M_2 \omega_2' + M_3 \left(-\frac{\theta}{R} + \omega_3' \right) \right. \\ &\quad + M_\phi f' + F_2 \left(U_y' - \omega_3 - \frac{e_3 \omega_3}{R} + \frac{e_3^2 f}{R} \right) \\ &\quad + F_3 \left(-\frac{U_x}{R} + U_z' + \omega_2 + \frac{e_2 \omega_3}{R} - \frac{e_2 e_3 f}{R} \right) \\ &\quad \left. + (M_1 - M_R) \left(\theta' + \frac{\omega_3}{R} - \frac{e_3 f}{R} \right) + M_R \left(\theta' + \frac{\omega_3}{R} + f - \frac{e_3 f}{R} \right) \right] dx_1 \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 탄성변형에너지와 운동에너지

본 절에서는 수직응력에 의한 곡선보 구조의 힘-변위관계를 도출한다. 식(7)에서 전단력 및 뒤틀변형에 의한 전단변형효과는 무시하므로 다음과 같은 전단강성의 구속식을 생각할 수 있다.

$$U_y' - \omega_3 - \frac{e_3}{R} \omega_3 + \frac{e_3^2}{R} f = 0 \quad (8a)$$

$$-\frac{U_x}{R} + U_z' + \omega_2 + \frac{e_2\omega_3}{R} - \frac{e_2e_3f}{R} = 0 \quad (8b)$$

$$\theta' + \frac{\omega_3}{R} - f - \frac{e_3f}{R} = 0 \quad (8c)$$

식(8)에서 회전변위 ω_2, ω_3 와 뒀파라미터 f 는 다음과 같이 표현되어진다.

$$\omega_2 = \frac{U_x}{R} - \frac{e_2U_y'}{R} - U_z' + \frac{e_2e_3\theta'}{R} = 0 \quad (9a)$$

$$\omega_3 = \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2\theta'}{R} = 0 \quad (9b)$$

$$f = -\frac{U_y'}{R} - \frac{R + e_3}{R} \theta' = 0 \quad (9c)$$

식(9)를 사용하여 식(1a)의 변위장 U_1 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_1 = U_x - x_2 \left\{ \left(1 - \frac{e_3}{R} \right) U_y' - \frac{e_3^2\theta'}{R} \right\} - x_2 \left(-\frac{U_x}{R} + \frac{e_2U_y'}{R} + U_z' + \frac{e_2e_3\theta'}{R} \right) - \left(\frac{U_y'}{R} + \left(1 + \frac{e_3}{R} \right) \theta' \right) \phi \quad (10)$$

또한 수직변형률 e_{11} 는 식(9)를 식(6a)에 대입함으로써 얻을 수 있으며 이후 식(3)에 대입하고 단면적으로 적분을 행하면, 다음과 같이 수직응력에 대한 힘-변위관계식을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_\phi \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A + \frac{\hat{I}_2}{R^2} & -\frac{\hat{I}_2}{R} & \frac{\hat{I}_{23}}{R} & \frac{I_{\phi 22}}{R^2} \\ -\frac{\hat{I}_2}{R} & \hat{I}_2 & -\hat{I}_{23} & -\frac{I_{\phi 22}}{R} \\ \frac{\hat{I}_{23}}{R} & -\hat{I}_{23} & \hat{I}_3 & \frac{I_{\phi 23}}{R} \\ \frac{I_{\phi 22}}{R^2} & -\frac{I_{\phi 22}}{R} & \frac{I_{\phi 23}}{R} & \hat{I}_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_x' + \frac{U_z}{R} - \frac{e_2\theta}{R} \\ \frac{U_x'}{R} - \frac{e_2U_y''}{R} - U_z'' - \frac{e_2e_3\theta''}{R} \\ \frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2\theta''}{R} - \frac{\theta}{R} \\ -\frac{U_y''}{R} - \frac{R + e_3}{R} \theta'' \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서

$$\hat{I}_2 = I_2 - \frac{I_{222}}{R}, \hat{I}_3 = I_3 - \frac{I_{233}}{R}, \hat{I}_{23} = I_{23} - \frac{I_{223}}{R}, \hat{I}_\phi = I_\phi - \frac{I_{\phi\phi 2}}{R} \quad (12)$$

식(11)에서 E 는 탄성계수이며 순수비틀모멘트 M_{st} 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_{st} = GJ \left(\frac{U_y'}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta' \right) \quad (13)$$

여기서, G 는 전단탄성계수, J 는 비틀상수이다. 식(11)을 계산하는데 있어 $I_{\phi 2}$ 와 $I_{\phi 3}$ 은 영이며, 곡선보의 두께-곡률효과를 나타내기 위하여 다음의 근사식을 적용한다.

$$\frac{R}{R + x_3} \cong 1 - \frac{x_3}{R} + \left(\frac{x_3}{R} \right)^2 \quad (14)$$

결과적으로, 힘-변위관계식인 식(11)과 (13)을 식(7)에 대입하면 도심-전단중심 정식화에 의한 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 탄성변형 에너지를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[EA \left(U_x' + \frac{U_z}{R} - \frac{e_2\theta}{R} \right)^2 \right. \\ & + EI_2 \left(\frac{e_2U_y''}{R} + U_z'' + \frac{U_z}{R^2} + \frac{e_2e_3\theta''}{R} - \frac{e_2\theta}{R^2} \right)^2 \\ & + EI_3 \left(\frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2\theta''}{R} - \frac{\theta}{R} \right)^2 \\ & + EI_\phi \left(\frac{U_y''}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta'' \right)^2 + GJ \left(\frac{U_y'}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta' \right)^2 \\ & + EI_{23} \left(\frac{e_2U_y''}{R} + U_z'' + \frac{U_z}{R^2} + \frac{e_2e_3\theta''}{R} - \frac{e_2\theta}{R^2} \right) \\ & \left. \left(\frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2\theta''}{R} - \frac{\theta}{R} \right) \right. \\ & - 2 \frac{EI_{\phi 22}}{R} \left(\frac{U_y''}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta'' \right) \left(\frac{e_2U_y''}{R} + U_z'' + \frac{U_z}{R^2} + \frac{e_2e_3\theta''}{R} - \frac{e_2\theta}{R^2} \right) \\ & \left. - 2 \frac{EI_{\phi 23}}{R} \left(\frac{U_y''}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta'' \right) \left(\frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2\theta''}{R} - \frac{\theta}{R} \right) \right] dx_1 \quad (15) \end{aligned}$$

또한, 변위장 식(1b,c)와 (10)을 운동에너지식 (5b)에 대입함으로써 다음과 같이 도심-전단중심 정식화에 의한 운동에너지를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Pi_M = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^l \left[A \{ U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 + \theta^2 (e_2^2 + e_3^2) + 2\theta (e_3 U_y - e_2 U_z) \} \right. \\
& + \tilde{I}_3 \left(\frac{R-e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} \right)^2 + \tilde{I}_2 \left(U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} \right)^2 \\
& + \tilde{I}_\phi \left(\frac{R+e_3}{R} \theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 - 2 \frac{I_{23} U_x}{R} \left(\frac{R-e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} \right) \\
& - 2 \frac{I_2 U_x}{R} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2 U_y'}{R} + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} \right) \\
& + 2 \tilde{I}_{23} \left(\frac{R-e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} \right) \left(U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2 U_y'}{R} + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} \right) \\
& + 2 I_{\phi 23} \left(\frac{R-e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} \right) \left(\frac{R+e_3}{R} \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \\
& + \left(\tilde{I}_\phi - 2 \frac{I_2 e_3}{R} - 2 \frac{I_{23} e_2}{R} \right) \theta^2 + 2 \frac{\theta}{R} (I_{23} U_z - I_2 U_y) \\
& \left. + 2 \frac{I_{\phi 22}}{R} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} \right) \left(\frac{R+e_3}{R} \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \right] dx_1 \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 = I_2 + \frac{I_{222}}{R}, \quad \tilde{I}_3 = I_3 + \frac{I_{233}}{R}, \quad \tilde{I}_{23} = I_{23} + \frac{I_{223}}{R} \quad (17) \\
\tilde{I}_\phi = I_\phi + \frac{I_{\phi \phi 2}}{R}, \quad \tilde{I}_\phi = I_2 + I_3 + \frac{I_{222} + I_{233}}{R}
\end{aligned}$$

앞에서 언급했듯이, L 형, T 형 및 십자형 등의 단면에서는 전단중심에서 뒤틀변형이 무시된다. 따라서 식(15)와 (16)에서 단면의 뒤틀변형에 의한 단면상수 ($\tilde{I}_\phi, I_{\phi 22}, I_{\phi 23}, \tilde{I}_\phi$)는 영이 됨을 알 수 있다. 그러므로 전단중심에서 영이 되는 뒤틀함수를 갖는 박막단면에 대한 곡선보의 3차원 자유진동해석과 처짐해석을 위하여 탄성변형에너지와 운동에너지는 식(15)와 (16)로부터 다음과 같이 단순화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Pi_E^* = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[EA \left(U_x' + \frac{U_z}{R} - \frac{e_2 \theta}{R} \right)^2 \right. \\
& + EI_2 \left(\frac{e_2 U_y''}{R} + U_z'' + \frac{U_z}{R^2} + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} - \frac{e_2 \theta}{R^2} \right)^2 \\
& + EI_3 \left(\frac{R-e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} - \frac{\theta}{R} \right)^2 + GJ \left(\frac{U_y'}{R} + \frac{R+e_3}{R} \theta' \right)^2 \\
& \left. + EI_{23} \left(\frac{e_2 U_y''}{R} + U_z'' + \frac{U_z}{R^2} + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} - \frac{e_2 \theta}{R^2} \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{R-e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} - \frac{\theta}{R} \right) \right] dx_1 \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_M^* = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^l \left[A \{ U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 + \theta^2 (e_2^2 + e_3^2) + 2\theta (e_3 U_y - e_2 U_z) \} \right. \\
& + \tilde{I}_3 \left(\frac{R-e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} \right)^2 + \tilde{I}_2 \left(U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} \right)^2 \\
& - 2 \frac{I_{23} U_x}{R} \left(\frac{R-e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} \right) + 2 \frac{\theta}{R} (I_{23} U_z - I_2 U_y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- 2 \frac{I_2 U_x}{R} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2 U_y'}{R} + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} \right) \\
+ 2 \tilde{I}_{23} \left(\frac{R-e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2 \theta'}{R} \right) \left(U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2 U_y'}{R} + \frac{e_2 e_3 \theta'}{R} \right) \\
+ \left(\tilde{I}_\phi - 2 \frac{I_2 e_3}{R} - 2 \frac{I_{23} e_2}{R} \right) \theta^2 \right] dx_1 \quad (19)
\end{aligned}$$

위의 식(18)과 (19)에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 개발한 곡선보이론을 적용하게 되면 L 형 및 T 형, 그리고 십자형의 단면을 갖는 곡선보 구조의 진동 및 처짐해석 시 단면의 뒤틀변형을 무시한 절점당 6개의 자유도를 갖는 곡선보 요소를 이용할 수 있게 된다. 결과적으로 도심정식화에 근거한 기존의 연구결과들에 비하여 해석 시 자유도의 수와 단면상수의 개수를 줄일 수 있다. 반면 Kim 등⁽²²⁾은 L 형 단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 위하여 7개의 변위파라미터를 도심에서 정의하여 다음과 같은 곡선보의 변형에너지와 운동에너지를 유도하였다.

$$\begin{aligned}
\Pi_E^c = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[EA \left(U_x^{c'} + \frac{U_z^c}{R} \right)^2 + EI_2 \left(U_z^{c''} + \frac{U_z^c}{R^2} \right)^2 \right. \\
& + EI_3 \left(U_y^{c''} - \frac{\theta^c}{R} \right)^2 + GJ \left(\frac{U_y^{c'}}{R} + \theta^{c'} \right)^2 + EI_\phi^c \left(\frac{U_y^{c''}}{R} + \theta^{c''} \right)^2 \\
& + 2EI_{23} \left(U_z^{c''} + \frac{U_z^c}{R^2} \right) \left(U_y^{c''} - \frac{\theta^c}{R} \right) \\
& \left. + 2EI_{\phi 2}^c \left(\frac{U_y^{c''}}{R} + \theta^{c''} \right) \left(U_z^{c''} + \frac{U_z^c}{R^2} \right) + 2EI_{\phi 3}^c \left(\frac{U_y^{c''}}{R} + \theta^{c''} \right) \left(U_y^{c''} - \frac{\theta^c}{R} \right) \right] dx \quad (20)
\end{aligned}$$

여기서

$$\hat{I}_\phi^c = I_\phi^c - \frac{I_{\phi \phi 2}^c}{R}, \quad \hat{I}_{\phi 2}^c = I_{\phi 2}^c - \frac{I_{\phi 22}^c}{R}, \quad \hat{I}_{\phi 3}^c = I_{\phi 3}^c - \frac{I_{\phi 23}^c}{R} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_M^c = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^l \left[A \{ U_x^{c2} + U_y^{c2} + U_z^{c2} \} + \tilde{I}_2 \left(U_z^{c'} - \frac{U_x^c}{R} \right)^2 + \tilde{I}_3 U_y^{c'2} \right. \\
& + \tilde{I}_\phi^c \left(\theta^{c'} + \frac{U_y^{c'}}{R} \right)^2 + 2I_{23} \left(U_y^{c'} U_z^{c'} - \frac{2U_x^c U_y^{c'}}{R} + \frac{U_z^c \theta^c}{R} \right) \\
& + 2 \frac{I_{223} U_y^c}{R} \left(U_z^{c'} - \frac{U_x^c}{R} \right) + \tilde{I}_\phi^c \theta^{c2} + 2\tilde{I}_{\phi 2}^c \left(U_z^{c'} - \frac{U_x^c}{R} \right) \left(\theta^{c'} + \frac{U_y^{c'}}{R} \right) \\
& \left. - 2 \frac{I_{\phi 2} U_x^c}{R} \left(\theta^{c'} + \frac{U_y^{c'}}{R} \right) + 2\tilde{I}_{\phi 3}^c U_y^{c'} \left(\theta^{c'} + \frac{U_y^{c'}}{R} \right) \right] dx_1 \quad (22)
\end{aligned}$$

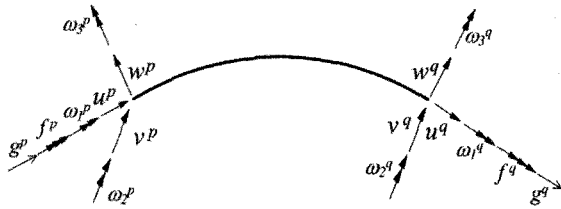
여기서

$$\tilde{I}_\phi^c = I_\phi^c + \frac{I_{\phi \phi 2}^c}{R}, \quad \tilde{I}_{\phi 2}^c = I_{\phi 2}^c + \frac{I_{\phi 22}^c}{R}, \quad \tilde{I}_{\phi 3}^c = I_{\phi 3}^c + \frac{I_{\phi 23}^c}{R} \quad (23)$$

위의 식에서 볼 수 있듯이 도심정식화에 근거하

면 위에서 언급한 단면들을 갖는 곡선보구조의 진동해석 시 단면의 도심에서 뒀변형이 영이 아니므로 식(21)과 식(23)의 뒀변형과 관련한 단면상수들을 추가적으로 산정하여야하는 번거로움을 가지고 있다.

3. 유한요소 정식화



〈그림 3〉 곡선보요소의 재단변위벡터

그림 3은 구속된 비틀에 의한 뒀변형을 고려한 곡선보요소의 재단변위벡터를 보여주고 있다. 요소의 축방향 신장을 고려한 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동 및 처짐해석에 관하여 유한요소해를 산정하기 위해서는 일반화된 좌표들을 재단변위벡터로 나타내기 위하여 요소의 거동을 정확히 나타낼 수 있는 형상함수를 선택하여야 한다. 본 연구에서는 요소당 2절점을 갖으며 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하는 곡선보 요소를 사용한다.

$$U_x = h_1 u^p + h_2 g^p l + h_3 u^q + h_4 g^q l \quad (24a)$$

$$U_y = h_1 v^p + h_2 \omega_2^p l + h_3 v^q + h_4 \omega_2^q l \quad (24b)$$

$$U_z = h_1 w^p - h_2 \omega_1^p l + h_3 w^q - h_4 \omega_1^q l \quad (24c)$$

$$\theta = h_1 \omega_1^p - h_2 f^p l + h_3 \omega_1^q - h_4 f^q l \quad (24d)$$

여기서

$$\begin{aligned} u^p &= U_x(0), \quad v^p = U_y(0), \quad w^p = U_z(0), \\ \omega_1^p &= \theta(0), \quad \omega_2^p = -U_z'(0), \quad \omega_3^p = U_y'(0), \\ f^p &= -\theta'(0), \quad g^p = U_x'(0) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 h_i 는 3차 Hermitian 다항식을 나타내며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad h_2 = (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)l \\ h_3 &= -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad h_4 = (\xi^3 - \xi^2)l, \quad \xi = x/l \end{aligned} \quad (26)$$

식(24)에서 절점변위성분은 곡률효과를 고려하여 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{\omega}_2^p = -U_z'(0) + \frac{U_x(0)}{R} = \omega_2^p + \frac{u^p}{R} \quad (27a)$$

$$\hat{f}^p = -\theta'(0) - \frac{U_y'(0)}{R} = f^p + \frac{\omega_3^p}{R} \quad (27b)$$

$$\hat{g}^p = U_x'(0) + \frac{U_z(0)}{R} = g^p + \frac{w^p}{R} \quad (27c)$$

현재까지의 이론을 고려하여 식(24)를 식(15)와 (16)에 대입하여 적분을 행하면 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 얻을 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} U_e^T (K_e - \omega^2 M_e) U_e \quad (28)$$

여기서

$$U_e = \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q, g^q \rangle \quad (29)$$

식(28)에서 K_e 와 M_e 는 16×16 요소 강성행렬 및 질량행렬을 나타내며, U_e 는 요소 절점변위벡터를 나타낸다. 본 연구에서 요소 강성행렬과 질량행렬은 가우스적분을 사용하여 산정한다. 이후 직접강성도법에 의하여 자유진동해석을 위한 전체 구조물에 대한 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

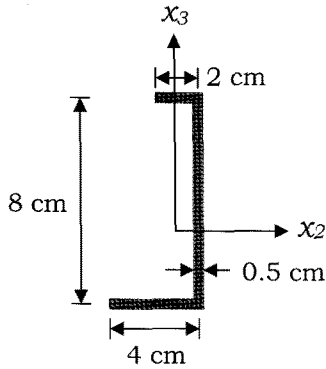
$$K_E U = \omega^2 M_E U \quad (30)$$

여기서 K_E, M_E 는 전체 구조물에 대응하는 탄성강성 및 질량행렬을 나타내며 이 식으로부터 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 고유진동수를 계산할 수 있다.

4. 수치해석

본 장에서는 L형 단면을 포함한 비대칭 단면을 갖는 곡선보구조의 자유진동해석 및 처짐해석을 수행하고, Kim 등⁽²²⁾에 의해 제시된 해와 다른 연구자들 그리고 ABAQUS 쉘요소를 이용하여 구한 해와 비교한다. 이때, 곡선보는 20개의 Hermitian 곡선보요소로 모델링하였다.

4.1 비대칭 단면을 가진 곡선보



〈그림 4〉 비대칭 단면의 형상

〈표 1〉 비대칭 단면을 갖는 외팔곡선보의 고유진동수(rad./sec)²

ψ (°)	진동모드				
	1	2	3	4	5
본 연구	0.0290	0.2686	0.5963	1.5252	5.1373
10 김 등 ⁽²²⁾	0.0290	0.2686	0.5963	1.5252	5.1373
ABAQUS	0.0299	0.2670	0.5887	1.5265	5.0520
본 연구	0.0062	0.2061	0.2901	2.0272	5.2138
90 김 등 ⁽²²⁾	0.0062	0.2061	0.2901	2.0272	5.2138
ABAQUS	0.0060	0.2043	0.2779	1.9714	5.0293

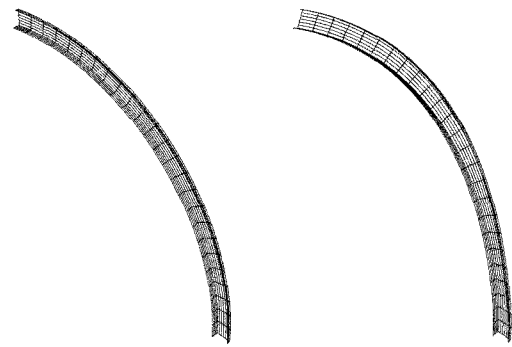
〈표 2〉 비대칭 단면을 갖는 양단고정 곡선보의 고유진동수(rad./sec)²

ψ (°)	진동모드				
	1	2	3	4	5
본 연구	0.9488	4.4120	6.3262	17.731	18.778
10 김 등 ⁽²²⁾	0.9488	4.4120	6.3262	17.731	18.778
ABAQUS	0.9679	4.3543	6.4045	16.946	18.565
본 연구	0.7223	3.9916	13.570	31.829	35.223
90 김 등 ⁽²²⁾	0.7223	3.9916	13.570	31.829	35.223
ABAQUS	0.7020	3.9088	13.388	30.838	34.855

〈표 3〉 비대칭 단면을 갖는 양단고정 곡선보의 횡변위, 수직변위 및 비틀각 (cm, rad.)

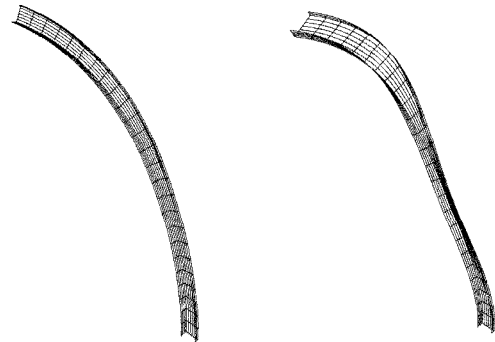
변위	본 연구	도심정식화
U_y	-1.4185	-1.4185
U_z	0.12054	0.12054
θ	0.16893	0.16893

그림 4는 비대칭 단면의 형상을 보여주고 있으며 경계조건은 외팔보 및 양단고정인 곡선보 구조를 생각한다. 보의 길이는 200cm이며 재료



(a) 모드 1

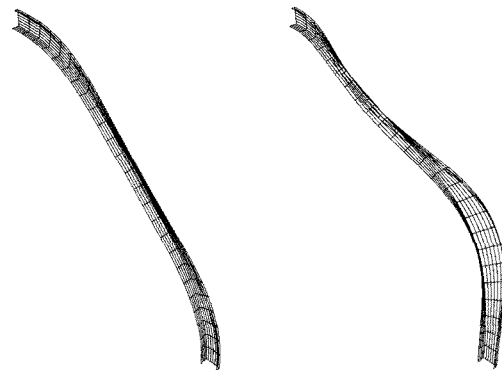
(b) 모드 2



(c) 모드 3

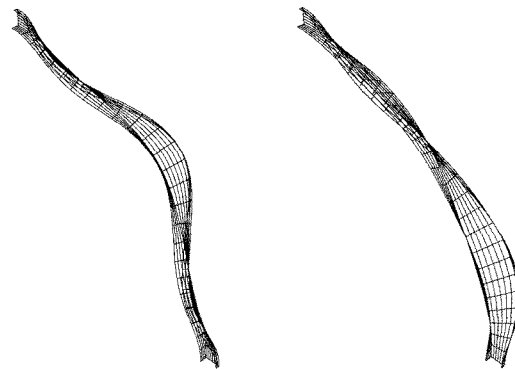
(d) 모드 4

〈그림 5〉 비대칭 단면을 갖는 외팔곡선보의 진동모드 $\psi = 90^\circ$



(a) 모드 1

(b) 모드 2



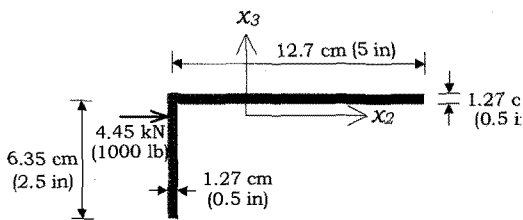
(c) 모드 3

(d) 모드 4

〈그림 6〉 비대칭 단면을 갖는 양단고정 곡선보의 진동모드 $\psi = 90^\circ$

상수는 다음과 같다: $E=294300\text{N/cm}^2$, $G=112815\text{N/cm}^2$, $\rho=0.077009\text{kg/cm}^3$. 먼저, 보의 총길이를 일정하게 유지하고 내부각 ψ 가 각각 10° 와 90° 인 외팔보와 양단고정보에 대하여 본 연구의 도심-전단중심 정식화에 의하여 산정된 고유진동수를 표 1과 2에 제시하였다. 비교를 위하여 도심정식화에 의한 해⁽²²⁾와 상용유한요소프로그램인 300개의 ABAQUS 9절점 쉘요소(S9R5)로부터 얻어진 결과를 함께 제시하였다. 표 1과 2로부터 본 연구에 의한 결과가 도심정식화에 의한 결과와 정확히 일치하는 것을 알 수 있으며 ABAQUS의 결과와도 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 추가적으로 지간 중앙에서 비틀모멘트 $1000\text{N}\cdot\text{cm}$ 를 받는 양단 고정된 곡선보에 대하여 지간 중앙의 전단중심에서 횡변위 U_y 와 수직변위 U_z , 비틀각 θ 를 계산하여 표 3에 제시하였다. 표 3에서 볼 수 있듯이 본 연구에 의한 결과와 도심정식화에 의한 결과가 정확히 일치하는 것을 알 수 있다. 그림 5와 6은 내부각 $\psi=90^\circ$ 인 외팔보와 양단고정보의 진동모드를 각각 보여주고 있다. 그림 5와 6에서도 볼 수 있듯이 단면이 비대칭 단면이므로 축방향 및 휨과 비틀모드가 연계된 복잡한 거동을 보임을 알 수 있다.

4.2 L형 단면을 가진 곡선보



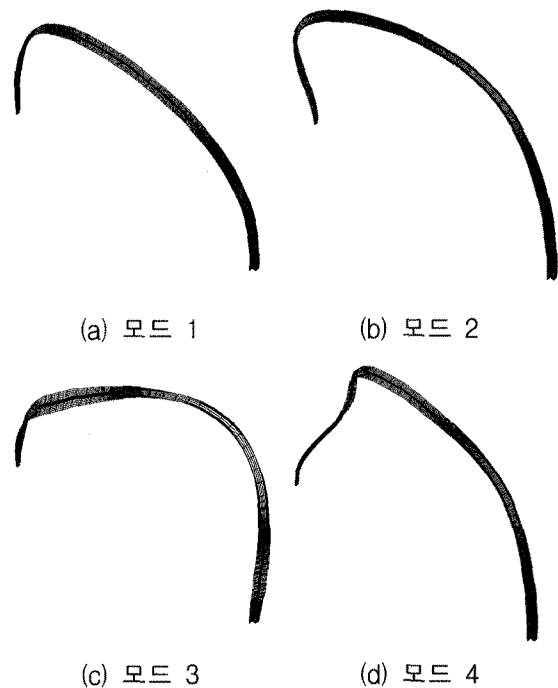
<그림 7> L형 단면의 형상

본 예제의 목적은 뒹변형을 무시한 비대칭 단면을 갖는 곡선보 구조에 대하여, 본 연구에서 제안한 곡선보이론에 의한 결과를 ABAQUS 쉘요소, 도심정식화이론 및 선행 연구자들의 결과와 비교함으로써 구조물의 동적 및 정적거동을 잘 예측할 수 있음을 보이기 위함이다. 그림 7은 L형 단면의 형상을 보여주고 있으며 재료

상수 및 곡률반경 그리고 보의 길이는 다음과 같다: $E=20684.28\text{kN/cm}^2$, $G=7955.49\text{kN/cm}^2$, $\rho=0.077009\text{N/cm}^3$, $R=914.4\text{cm}$, $l=609.6\text{cm}$. 곡선보는 양단이 고정이고 중앙부에서 면외 횡하중 4.45kN (1000lb)을 받고 있다.

<표 4> L형 단면을 갖는 양단고정 곡선보의 고유진동수(rad/sec)²

모드	본 연구	도심정식화	ABAQUS
1	5.6246	5.6246	5.5925
2	6.0305	6.0305	6.1635
3	10.792	10.792	11.001
4	17.427	17.427	17.224
5	19.116	19.116	19.461
6	23.800	23.800	23.917
7	28.498	28.498	28.332
8	30.329	30.329	30.585
9	34.996	34.996	34.712
10	36.862	36.862	36.129

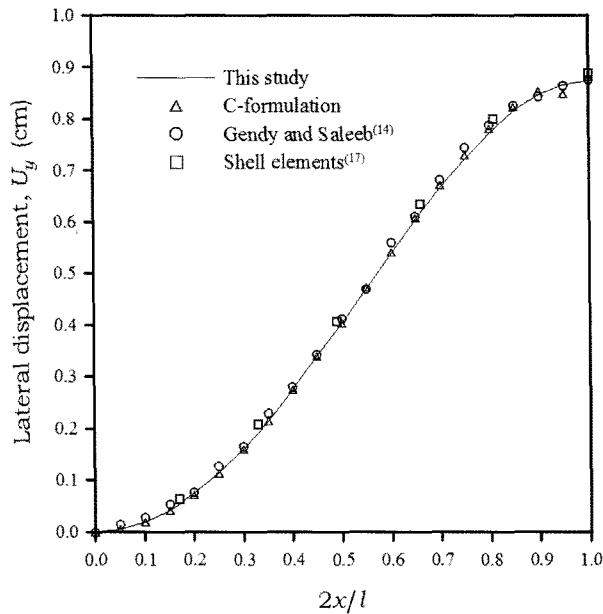


<그림 8> L형 단면을 가진 양단고정 곡선보의 진동모드

표 4는 본 연구에 의한 고유진동수와 도심정식화 및 240개의 ABAQUS 쉘요소를 이용하여 얻어진 결과를 보여주고 있으며 그림 8에 진동

모드를 보여주고 있다.

표 4로부터 본 연구에 의한 결과가 도심정식화에 근거하여 산정된 결과 및 ABAQUS에 의한 결과와 상당히 일치함을 알 수 있다. 이 결과로부터 전단중심에서 뒹함수가 영이 되는 비대칭 단면을 가지는 곡선보에 대하여 본 곡선보이론은 구조물의 진동거동을 정확히 예측하는 것으로 판단할 수 있다. 다음으로, 면외 횡하중을 받는 곡선보에 대하여 L형 단면의 전단중심에서의 횡변위 U_y 의 변화를 그림 9에 도시하였다. 대칭성을 고려하여 10개의 곡선보 요소를 사용하였으며 결과의 비교를 위하여 도심정식화에 근거하고 8개의 곡선보요소를 사용한 Gendy와 Saleeb⁽¹⁴⁾의 결과 및 Saleeb 등⁽¹⁷⁾에 의하여 개발된 24개의 쉘요소를 사용하여 얻어진 결과를 함께 제시하였다. 그림 9에서 볼 수 있듯이 본 연구에 의한 결과가 기존의 연구결과와 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.



〈그림 9〉 L형 단면의 전단중심의 횡변위

5. 결 론

본 연구에서는 비대칭단면을 갖는 박벽곡선보의 자유진동 및 처짐해석을 위하여 도심-전단중심 정식화에 근거한 개선된 곡선보이론을 제시하였다. 본 연구에서 제시한 곡선보이론의

타당성을 검증하기 위하여 3차 Hermitian곡선보요소를 사용한 유한요소해를 도심정식화, 선형연구의 결과 그리고 ABAQUS의 쉘요소를 이용하여 얻어진 결과와 비교하였다. 결과적으로 다음의 결과를 얻었다.

1. 도심-전단중심 정식화를 이용하여 전단중심에서의 뒹변형을 무시한 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 진동해석과 처짐해석을 위하여 뒹변형과 관련된 단면상수를 단순히 제거함으로써 간단한 변형에너지 및 운동에너지를 유도할 수 있게 되었다. 따라서 이러한 단면을 갖는 곡선보구조의 진동 및 처짐해석 시 뒹변형과 관련한 추가적인 단면상수를 계산하여야하는 기존의 도심정식화에 의한 곡선보이론의 단점을 극복할 수 있었다.
2. L형 단면을 포함하는 비대칭단면을 갖는 곡선보 구조의 진동 및 처짐해석 시 본 연구에 의한 결과가 도심정식화에 의한 결과, 기존의 연구결과 및 ABAQUS 쉘요소를 이용하여 얻어진 결과와 잘 일치하는 것을 볼 수 있었다.

참고문헌

1. Vlasov, V.Z. (1961), Thin-walled elastic beams, 2nd Ed., National Science Foundation, Washington, D.C.
2. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), Theory of elastic stability. 2nd Ed., McGraw-Hill, N.Y.
3. Dabrowski, R. (1968), Curved thin-walled girders. (Translated from the German), Cement and concrete association, London.
4. Heins, C.P. (1975), Bending and torsional design in structural members. D.C. Health and Company.
5. Gjelsvik, A. (1981), The theory of thin walled bars. John Wiley & Sons, Inc.
6. Raveendranath, P. Singh, G. and Pradhan, B. (2000), Free vibration of arches using a curved beam element based on a coupled

- polynomial displacement field, *Computers & Structures*, Vol.78, 583-590.
7. Lee, J.H. (2003), In-plane free vibration analysis of curved Timoshenko beams by the pseudospectral method, *KSME International Journal*, Vol.17, 1156-1163.
 8. Gupta, A.K. and Howson, W.P. (1994), Exact natural frequencies of plane structures composed of slender elastic curved members, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.175, 145-157.
 9. Chucheepsakul, S. and Saetiew, W. (2002), Free vibrations of inclined arches using finite elements, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.13, 713-730.
 10. Cortínez, V.H. and Piován, M.T. (1999), Out of plane vibrations of thin-walled curved beams considering shear flexibility, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.8, 257-272.
 11. Yang, Y.B. and Kuo, S.R. (1987), Effect of curvature on stability of curved beams, *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, Vol.113, 1185-1202.
 12. Yang, Y.B. and Kuo, S.R. (1986), Static stability of curved thin-walled beams, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol.112, 821-841.
 - 13 윤기용, 강영중, “유한요소법을 이용한 수평곡선 I 형교의 자유진동해석”, 한국강구조학회 논문집, 제 10권 제 1호 1993, pp.47~61.
 14. Gendy, A.S. and Saleeb, A.F. (1992), On the finite element analysis of the spatial response of curved beams with arbitrary thin-walled sections, *Computers & Structures*, Vol.44, 639-652.
 15. Gendy, A.S. and Saleeb, A.F. (1994), Vibration analysis of coupled extensional/flexural/torsional modes of curved beams with arbitrary thin-walled sections, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.174, 261-274.
 16. Hu, N., Hu, B., Fukunaga, H. and Sekine, H. (1999), Two kinds of C^0 -type elements for buckling analysis of thin-walled curved beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.171, 87-108.
 17. Saleeb, A.F. and Gendy, A.S. (1991), Shear-flexible models for spatial buckling of thin-walled curved beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.31, 729-757.
 - 18 서광진, 민병철, 김문영, “곡률이 변하는 박벽곡선보의 3차원 자유진동 및 좌굴해석”, 전산구조공학회 논문집, 제13권 제3호 2000, pp.321-328.
 - 19 민병철, 김문영, “비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성해석 I: 해석적 방법”, 전산구조공학회 논문집, 제11권 제4호 1998, pp.239-251.
 20. Tong, G. and Xu, Q. (2002), An exact theory for curved beams with any thin-walled open sections, *Advances in Structural Engineering*, Vol.5, 195-209.
 21. ABAQUS (2003), Standard user's manual, Ver. 6.1, Hibbit, Kalsson & Sorensen Inc.
 22. Kim, M.Y., Kim, N.I. and Min, B.C. (2002), Analytical and numerical study on spatial free vibration of non-symmetric thin-walled curved beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.258, 595-618.

- ▶ 접수일자 : 2010년 7월 28일
- ▶ 심사 완료일자 : 2010년 12월 9일
- ▶ 게재 확정일자 : 2010년 12월 10일