

공정평균의 변화율이 정규분포인 제조공정의 최적 목표값

이재훈* · 박태호** · 권혁무*** · 홍성훈**** · 이민구*****†

* (주)엠브레인

** 산호세주립대학교 경영대학

*** 부경대학교 시스템경영공학과

**** 전북대학교 산업정보시스템학과

***** 충남대학교 정보통계학과

Optimum target values for manufacturing processes when drifting rate in the process mean is normally distributed

Jae-Hoon Lee* · Taeho Park** · Hyuck Moo Kwon***

Sung-Hoon Hong**** · Min-Koo Lee*****†

* Embrain.Co.,LTD

** Department of Organization and Management, College of Business, San Jose State University

*** Department of Systems and Management Engineering, Pukyong National University

**** Department of Industrial & Information Systems Engineering, Research Center of Industrial Technology, Chonbuk National University

***** Department of Information & Statistics, Chungnam National University

Key Words : Optimum Target Value, Process Mean Shift, Linear Shift, Production Cycle

Abstract

We consider the problem of selecting the most profitable initial process mean and length of production cycle for manufacturing processes subject to a constant linear trend during the same cycle that varies after resetting the processes.

Assuming that the quality characteristic of interest is normally distributed, the optimum initial process mean and the length of production cycle are jointly obtained by minimizing the expected loss per unit time. We assume that the quality loss function due to the deviation from the target value is quadratic and resetting loss is constant. We consider both cases of symmetric and asymmetric quality loss function. An illustrative example is given and sensitivity analysis performed.

1. 서 론

기업의 경쟁력은 고객만족을 얼마나 실현시키느냐에 달려있다. 고객만족을 실현하기 위한 주요 세 가지 활동은 제품의 높은 품질, 낮은 원가 및 납기준수를 달성하는 것이다. 그동안 기업의 경쟁력을 향상시키기 위한 많은 노력들이 국내외적으로 이루어져 왔다; 1920년대

제조공정의 불량률 없애기 위한 검사 중심의 품질관리, 1950년대 전 부문에 걸쳐 총체적으로 품질활동을 추진하는 종합적 품질관리, 1960년 대 초 미국에서 일기 시작한 무결점운동, 1980년대 초 모든 구성원의 참여로 고객만족과 조직의 모든 구성원 및 사회의 이익을 통하여 조직의 장기적인 성공을 추구하는 종합적 품질경영 등이 대표적인 품질 활동들이다. 품질보증에 관련된 최근의 연구동향이나 산업체의 움직임은 이미 만들어진 제품의 사후검사를 통하여 일정수준의 품질을 보증하

† 교신저자 sixsigma@cnu.ac.kr

던 기존의 방식에서 벗어나, 설계단계로부터 시작하여 제조공정의 적절한 관리를 통하여 불량률의 발생을 미연에 방지하는 방향으로 가고 있다. 이러한 공정설계 단계의 품질관리 활동을 위해 사용되는 대표적인 방법 중의 하나가 제조공정의 공정평균을 합리적으로 결정하고자 하는 최적 공정평균 결정방법이다.

제조공정에서 만들어지는 제품 중 규격을 만족시키는 제품은 합당한 가격에 판매되나, 규격을 만족시키지 못하는 제품은 재가공 또는 의도한 목적이 아닌 다른 용도에 사용, 할인판매 또는 폐기처분된다. 더욱이 제조공정에서 생산된 불량품이 검사과정에서 발견되지 않고 최종소비자에게 판매된 경우는 불량품의 교환 등을 포함한 많은 비용들이 들어가기 때문에 제품을 생산하는 회사입장에서는 제품의 불량률을 줄여야 한다. 예를 들어 어떤 제품의 주성분 함량의 규격하한이 있고 주성분이 고가인 경우, 만일 주성분의 함량을 결정하는 공정평균을 낮게 하면 함량부족에 따른 불량품으로 인한 손실비용이 늘어나고, 반대로 공정평균을 높게 하면 불량품으로 인한 손실비용은 줄어드나, 초과해서 들어간 주성분 양으로 인해 많은 생산비용이 발생한다. 이와 같이 규격을 만족하는 제품과 만족하지 못하는 제품은 각각 다른 형태의 이익함수를 갖게 되며 따라서 제품의 단위당 기대이익을 최대화 하는 공정평균의 설정문제가 발생하게 된다. 이러한 점에 근거해서 주어진 규격의 형태와 규격을 만족하는 제품과 만족하지 못하는 제품의 이익함수 형태에 따라 제품의 단위당 기대이익을 최대화 하는 공정평균을 설정하는 문제에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔다.

Springer(1951)는 제품에 대한 규격하한과 상한이 있고, 규격하한에 미달되는 제품과 규격상한을 넘는 제품의 별과비용이 서로 다른 경우 총 비용을 최소화하는 공정평균을 결정하는 문제를 다루었고, Betts(1962)는 규격하한이 주어진 문제에서 규격하한에 미달하거나 규격상한(upper limit)을 넘는 제품을 재가공할 때 기대이익을 최대화 하는 공정평균과 규격상한을 결정하는 문제를 다루었다. Hunter와 Kartha(1977)는 규격을 만족하는 제품은 일정한 가격에 판매하고 규격에 미달하는 제품은 할인해서 판매하는 경우에 기대이익을 최대화 하는 공정평균을 결정하는 문제를 다루었다. Golhar(1987)은 규격하한이 주어진 경우, 규격하한을 넘는 제품은 일정한 가격에 판매하고 규격하한에 미달되는 제품은 재가공할 때 기대이익을 최대화 하는 공정평균을 결정하는 문제를 다루었다. Boucher와 Jafari(1991)는

계수형 샘플링 검사에 기초해 제품의 품질을 검사할 때 공정평균과 로트의 합격·불합격 판정기준을 동시에 결정하는 문제를 다루었다. Chen(2004)은 비대칭인 다구찌의 2차 손실함수를 이용하여 최적 공정평균을 결정하는 문제를 다루었다. 이밖에 이민구(2000), Lee 와 Elsayed (2002), 이민구(2005)가 공정평균을 설정하는 문제를 다루었다.

지금까지의 연구들은 제품의 생산시간에 따라 품질 특성치의 평균 (공정평균)이 일정하게 유지되는 것을 가정하고 있다. 그러나 절삭, 밀링, 연삭과 같은 금속가공 공정이나 튜브 롤링 공정 등은 작업자의 에러, 원재료의 불량, 환경적 요인 그리고 공구 운영상의 문제 등으로 품질이 저하되는 경우가 많이 있다. 그 중에서 품질에 영향을 가장 많이 미치는 것은 공구의 마모 또는 부품의 헐거워짐 등이다. 이로 인하여 생산시간이 경과함에 따라 공정평균이 증가하거나 감소하는 경우들이 많이 존재한다. 따라서 생산되는 제품의 불량을 줄이기 위하여 어느 정도의 일정한 시간간격을 두고 공정평균을 재설정 해야만 하는 문제가 발생한다. Arcelus와 Banerjee (1985)는 Bisgaard 등(1984)의 연구를 생산시간에 따라 공정평균이 선형적으로 변하는 문제로 확장하였다. Lee와 Bai(1994)는 충전공정에서 공정평균이 선형적으로 변하는 경우 기대이익을 최대화 하는 초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간을 결정하였다. Al-Sultan과 Al-Fawzan(1998)은 다단계(Multi stage) 생산 시스템에서 생산비용을 최소화 하는 최적 초기 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루었다. Rahim과 Tuffaha(2004)는 Chen과 Chung (1996)의 문제를 확장시켜 다구찌 손실함수와 규격상한을 사용, 최적 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 연구를 하였다. Chan 등(2006)은 다변량 품질손실함수(multivariate quality loss function)를 이용, 최적 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루었다. 그러나 튜브롤링공정 등을 살펴보면 공정평균의 변화율이 일정한 것이 아니라 랜덤하게 변하는 확률변수이다. 이런 점에 근거하여 Jang 등 (2000)은 공정평균이 선형적으로 변하는 공정에서 공정평균의 변화율이 균일분포를 따를 때 다구찌의 2차 손실함수가 품질특성치의 목표값에 대하여 대칭일 때와 비대칭일 때 초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루었다.

공정평균이 변하는 제조공정의 형태를 살펴보면 공정평균의 변화율이 균일분포보다는 정규분포에 가까운

경우가 많이 있다. 따라서 본 논문에서는 공정평균의 변화율이 정규분포를 따를 때 다구찌의 2차 손실함수의 품질비용을 고려하여 손실비용모형을 세우고 기대손실을 최소화 하는 초기 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다룬다. 또한 본 논문에서 구한 최적해와 공정평균의 변화율이 균일분포인 경우의 최적해를 비교한다. 2차 손실함수는 목표값을 기준으로 대칭인 경우와 비대칭인 경우를 고려한다.

2. 모형구성

본 논문에서 사용하는 기호와 가정은 다음과 같다.

i) 기호

X_t : t 시점에서 제품의 품질특성치

μ_t : X_t 의 평균(t 시점에서의 공정평균)

σ : X_t 의 표준편차

μ_0 : 초기 공정평균

θ : 단위시간당 공정평균의 변화율

μ_θ : 공정평균의 변화율 θ 의 평균

σ_θ : 공정평균의 변화율 θ 의 표준편차

τ : 공정평균의 재설정시간

$f(x_t)$: X_t 의 확률밀도함수

$f(x_t|\theta)$: θ 가 주어졌을 때 X_t 의 조건부 확률밀도함수

$g(\theta)$: θ 의 확률밀도함수

$\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$: 표준정규분포의 확률밀도함수, 누적분포함수

m : 품질특성치의 목표값

C_1, C_2 : 비대칭인 손실함수의 비용계수

$C = C_1 = C_2$: 대칭인 손실함수의 비용계수

R : 공정평균의 재설정비용

$L(x_t, \theta)$: 손실함수

ETL_S : 대칭인 모델의 단위시간당 총 기대손실

ETL : 비대칭 모델의 단위시간당 총 기대손실

ii) 가정

1. 단위시간당 한 개의 제품이 생산되며 전수검사를 실시한다.

2. 품질특성치 X_t 는 정규분포를 따른다 $X_t \sim N(\mu_t = \mu_0 + \theta t, \sigma^2)$.

3. 생산하는 시간에 따라서 공정평균은 단위시간당

θ 의 비율로 증가한다; $\mu_t = \mu_0 + \theta t$.

4. 공정평균 변화율 θ 는 정규분포를 따른다, $\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$.

제품의 품질특성치 X_t 가 제품을 생산하는 시간 t에 따라서 변하며 X_t 는 평균이 μ_t 이고 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다. 공정평균의 변화율 θ 는 평균이 μ_θ 이고 표준편차가 σ_θ 인 정규분포를 따르는 확률변수이다. 표준편차 σ 는 변하지 않으면 그 값은 알고 있다. 다구찌가 제안한 2차 손실함수의 개념은 제품의 품질특성치가 목표값 m 에 벗어나면 벗어난 정도의 제품에 비례하여 손실이 발생한다. 즉, 품질특성치 X_t 가 목표값 m 에 미달하는 구간에서는 $C_1(x_t - m)^2$ 의 형태로 손실이 발생하며, 품질특성치 X_t 가 목표값 m 보다 큰 구간에서는 $C_2(x_t - m)^2$ 의 형태로 손실이 발생한다. 따라서 t 시점에서 생산된 제품에 대한 손실함수 $L(x_t, \theta)$ 는

$$L(x_t, \theta) = \begin{cases} C_1(x_t - m)^2 & , \quad x_t < m \\ C_2(x_t - m)^2 & , \quad x_t \geq m \end{cases} \quad (1)$$

이다. 만일 $C_1 = C_2 = C$ 이면 손실함수 $L(x_t, \theta)$ 는 목표값 m 에 대하여 대칭인 형태가 된다.

$$L(x_t, \theta) = C(x_t - m)^2, \quad -\infty < x_t < \infty \quad (2)$$

공정평균의 재설정이 τ 시간 마다 반복해서 이루어진다면 단위시간당 총 기대손실 ETL 은 다음과 같다.

$$ETL = \frac{\int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^m C_1(x_t - m)^2 f(x_t|\theta) g(\theta) dx_t d\theta dt}{\tau} + \frac{\int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty \int_m^\infty C_2(x_t - m)^2 f(x_t|\theta) g(\theta) dx_t d\theta dt}{\tau} + \frac{R}{\tau} \quad (3)$$

여기서 R 은 공정평균을 재설정하는데 소요되는 제반비용을 나타낸다. 식(3)을 다시 간단하게 정리하면 식 (4)와 같다.

$$ETL = C_2(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2) + C_2\mu_0\tau(\mu_0 - m) + \frac{C_2(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)}{3}\tau^2 + \frac{C_1 - C_2}{\tau} \int_0^\tau \{(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2)\alpha_1 - \sigma(\mu_0 - m)\alpha_3\} dt + \frac{C_1 - C_2}{\tau}$$

$$\int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty [\theta t \{2(\mu_0 - m)\alpha_2 - \sigma\alpha_4\} + \theta^2 t^2 \alpha_2] d\theta dt + \frac{R}{\tau}, \quad (4)$$

여기서

$$\alpha_1 = \Phi\left(\frac{m - \mu_0 - \mu_\theta t}{\sqrt{t^2 \sigma_\theta^2 + \sigma^2}}\right), \quad \alpha_2 = g(\theta) \Phi\left(\frac{m - \mu_0 - \theta t}{\sigma}\right),$$

$$\alpha_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \sigma_\theta^2 t^2)}}$$

$$\text{EXP}\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(m - \mu_0 - \mu_\theta t)^2}{\sigma^2 + \sigma_\theta^2 t^2}\right\}\right],$$

$$\alpha_4 = g(\theta) \phi\left(\frac{m - \mu_0 - \theta t}{\sigma}\right) \text{이다.}$$

식 (4)의 보다 자세한 유도 과정은 부록1을 참조하기 바란다.

식 (4)에서 $C_1 = C_2 = C$ 이면 단위시간당 총 기대손실 ETL_S 는 다음과 같이 표현된다.

$$ETL_S = C(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2) + C\left(\mu_0\mu_\theta\tau + \frac{1}{3}(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)\tau^2 - m\mu_\theta\tau\right) + \frac{R}{\tau}. \quad (5)$$

식 (5)의 보다 자세한 유도 과정은 부록2를 참조하기 바란다. 최적 초기 공정평균 μ_0^* 와 공정평균의 재설정시간 τ^* 는 단위시간당 총 기대손실 ETL_S 를 최소로 하는 값이다. μ_0^* 와 τ^* 의 결정방법은 다음 장에서 다룬다.

3. 최적 초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간

3.1 대칭인 손실함수의 최적해

초기 공정평균 μ_0 와 공정평균의 재설정시간 τ 를 결정하기 위해 ETL_S 를 μ_0 와 τ 에 대하여 미분하면

$$\frac{\partial ETL_S}{\partial \mu_0} = 2C\mu_0 - 2mC + C\tau\mu_\theta, \quad (6)$$

$$\frac{\partial ETL_S}{\partial \tau} = C\mu_0\mu_\theta + \frac{2}{3}C(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)\tau - Cm\mu_\theta - \frac{R}{\tau^2}, \quad (7)$$

이 된다. ETL_S 이 Convex function 인지 확인하기 위하여 식 (6)과 (7)을 다시 μ_0 와 τ 에 대하여 미분하면

$$\frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \mu_0^2} = 2C,$$

$$\frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \tau^2} = \frac{2}{3}C(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2) + 3\frac{R}{\tau^3},$$

$$\frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \mu_0 \partial \tau} = C\mu_\theta,$$

이 되고

$$\frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \mu_0^2} = 2C > 0,$$

$$\frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \tau^2} = \frac{2}{3}C(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2) + 3\frac{R}{\tau^3} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \mu_0^2} & \frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \mu_0 \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \mu_0 \partial \tau} & \frac{\partial^2 ETL_S}{\partial \tau^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2C & C\mu_\theta \\ C\mu_\theta & \frac{2}{3}C(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2) + 3\frac{R}{\tau^3} \end{vmatrix} > 0,$$

이기 때문에 Bordered hessian determinant가 positive-definite 이므로 ETL_S 이 μ_0 와 τ 에 대하여 convex function 이다. 따라서 ETL_S 을 최소로 하는 μ_0 와 τ 는 $\partial ETL_S / \partial \mu_0 = 0$ 와 $\partial ETL_S / \partial \tau = 0$ 를 동시에 만족하는 값이 된다. 따라서 최적 μ_0^* 와 τ^* 는 식 (6)과 (7)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\tau^* = \sqrt[3]{\frac{6R}{C(4\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)}}, \quad (8)$$

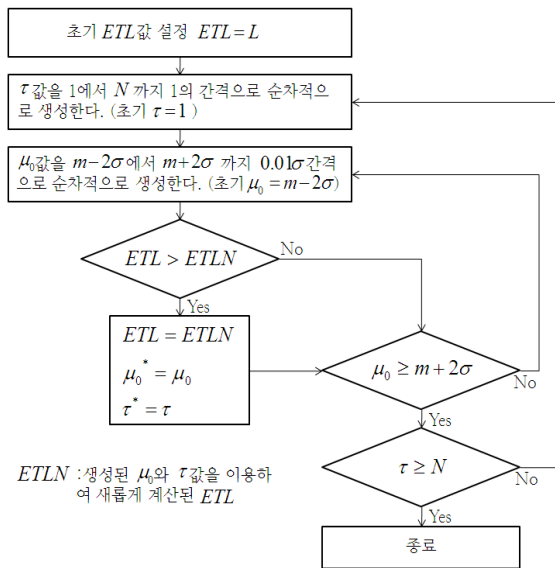
$$\mu_0^* = m - \frac{\tau^* \mu_\theta}{2}, \quad (9)$$

식(8)과 (9)에 정규분포와 균일분포의 관계에 따라 $\mu_\theta = \frac{\theta_L + \theta_U}{2}$, $\sigma_\theta^2 = \frac{(\theta_U - \theta_L)^2}{12}$ 를 대입하 $\tau^* = \sqrt[3]{\frac{72R}{K(7\theta_L^2 - 2\theta_L\theta_U + 7\theta_U^2)}}$, $\mu_0^* = m - \frac{\tau^*(\theta_L + \theta_U)}{4}$ 가 된다. 이는 Jang 등(2000)의 논문의 동일한 상황에 대한 최적 μ_0^* 와 τ^* 와 일치한다. 2차 손실함수가 대칭인 경우는 공정평균의 변화율 θ 의 분포가 정규분포이든 균일분포이든 μ_0^* 와 τ^* 는 동일한 값을 갖는다. 최적화 조건이 2차 손실함수인 경우는 해에 영향을 미치는 것이 θ 에 대한 분포 자체 보다는 θ 의 평

균과 분산이다. 만일 최적화의 조건이 계단형 손실함수의 경우라면 θ 에 대한 분포자책도 해에 영향을 미친다.

3.2 비대칭인 손실함수의 해

ETL에는 정규분포의 확률밀도함수, 누적분포함수 및 적분식이 포함되어 있기 때문에 closed form의 해를 구할 수 없다. 또한 ETL이 μ_0 와 τ 에 대하여 convex function임을 수리적으로 보일 수 없다. 따라서 본 절에서는 <그림 1>과 같은 heuristic algorithm을 이용하여 ETL을 최소로 하는 μ_0 와 τ 의 값을 구하는 방법을 제안한다.



<그림 1> ETL을 최소로 하는 μ_0 와 τ 값을 구하는 알고리즘

충분한 크기의 초기 ETL값을 설정한 후 τ 값을 1부터 N까지, τ 에 따른 μ_0 값을 $m - 2\sigma$ 부터 $m + 2\sigma$ 까지 생성하여 각각의 값에 따른 새로운 단위시간당 총 기대손실, 즉 ETLN을 계산한다. 각각 계산되어진 ETLN 값을 초기 ETL값과 비교하여 $ETL > ETLN$ 일 경우에는 $ETL = ETLN$ 으로 교체하며 $\mu_0^* = \mu_0$ 로, $\tau^* = \tau$ 로 저장한다. τ 와 μ_0 값의 증가에 따라 위의 과정을 거치게 되며 μ_0 가 $m + 2\sigma$ 보다 큰 값을 가지며 τ 가 N보다 큰 값을 가지면 과정을 종료하게 된다. 최적 τ 값이 N이거나 최적 μ_0 값이 $m - 2\sigma$ 혹은 $m + 2\sigma$ 일 경우에는 N값

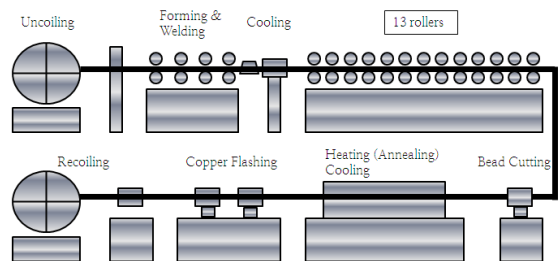
을 높이거나 μ_0 값의 범위를 증가시키면서 최적해를 구한다. 여기서 N과 L값은 제조공정의 상황이나 종류에 따라 다른 값을 할당할 수 있다.

본 절에서 제안한 해를 구하는 알고리즘의 구현은 FORTRAN 프로그램을 사용하였으며 표준정규분포의 누적분포함수와 적분은 IMSL(1987)을 이용하였다. 대부분의 경우 구하고자하는 해는 몇 분 이내에 구해졌다.

4. 수치 예제 및 민감도 분석

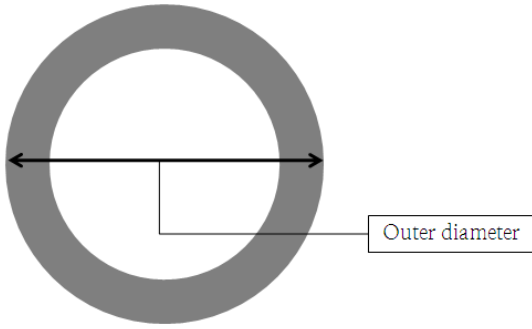
4.1 수치 예제

본 절에서 Jang 등(2000)의 논문에서 사용한 예제를 사용하여 앞에서 제안한 최적 초기공정평균 및 공정평균의 재설정시간을 구하는 방법을 설명한다. 튜브 롤링 공정은 <그림 2>에서 알 수 있듯이 감겨있는 튜브를 풀어 모양을 만들고 13개의 롤러를 통과하면서 튜브의 바깥지름을 결정한 후 비즈커팅(the bead's cutting)과 풀림(annealing), 동 플래싱(copper flashing) 작업을 거쳐 다시 감는 단계로 공정이 진행된다. 품질특성치는 튜브의 바깥지름, 강도, 경도, 두께 등이 있지만 무엇보다 중요한 품질특성치는 13개의 롤러를 통과하면서 결정되는 바깥지름이다.



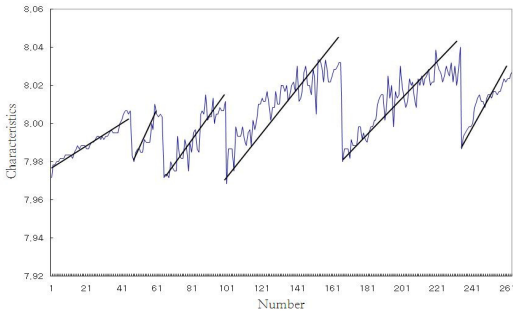
<그림 2> 튜브 롤링 공정

튜브 롤링 공정의 바깥지름은 13개의 롤러들에 의해 결정되며 이들 롤러들은 쉽게 마모된다. 이로 인하여 생산시간이 경과함에 따라서 튜브의 지름 X_t 는 증가하게 되며 불량제품이 나오는 비율이 증가하게 된다. 따라서 마모되어진 롤러들을 재조정해야 하는 문제가 발생하게 되는데, 롤러의 마모 정도를 측정하는 것은 불가능하고 비경제적이기 때문에 <그림 3>과 같이 튜브의 지름을 주기적으로 측정한다.



<그림 3> 튜브의 바깥지름

목표치가 8mm인 튜브 제조 공정에서 12달 동안 튜브 바깥지름을 측정된 값에 대한 데이터를 그래프로 나타낸 것이 <그림 4>이다.



<그림 4> 튜브 데이터의 그래프와 추세선

<그림 4>으로부터 우리는 롤러가 5차례 재설정 이 되었으며 6개의 부분군이 형성 되었다. 또한 추세선의 기울기들이 평균을 중심으로 랜덤하게 변하는 것으로 나타난다.

공정평균의 변화율 θ 가 주어졌을 때 지름 X_t 는 평균이 $\mu_t = \mu_0 + \theta t$ 이고 분산이 $(0.0165mm)^2$ 인 정규분포를 따르며 공정평균 변화율 θ 는 평균이 0.00155이고 분산이 $(0.000375)^2$ 인 정규분포를 따른다. 또한 공정평균의 재설정비용과 손실함수의 계수가 각각 $R = \$100$, $C_1 = \$1200$, $C_2 = \$1000$ 일 때 2차 손실함수의 형태가 품질특성치의 목표값($m = 8mm$)을 중심으로 비대칭인 경우 최적 μ_0^* 와 τ^* 그리고 ETL 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_0^* &= 7.960mm, \\ \tau^* &= 55h, \\ ETL &= \$3.092. \end{aligned}$$

만일 $C = C_1 = C_2 = \$1150$ 이면 2차 손실함수의 형

태가 품질특성치의 목표값($m = 8mm$)을 중심으로 대칭이 된다. 이 때 τ^* 와 μ_0^* 그리고 ETL_S 은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \tau^* &= \sqrt[3]{\frac{6R}{C(4\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{6 \times 100}{1150(4(0.000375)^2 + (0.00155)^2)}} \approx 56h, \\ \mu_0^* &= m - \frac{\tau \mu_\theta}{2} = 8 - \frac{\tau^* \times 0.00155}{2} = 7.957mm \\ ETL_S &= C(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2) \\ &+ C\left(\mu_0\mu_\theta\tau + \frac{1}{3}(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)\tau^2 - m\mu_\theta\tau\right) + \frac{R}{\tau} \\ &= 1150(0.0165^2 + 7.957^2 - 2 \times 8 \times 7.957 + 8^2) \\ &+ 1150(7.957 \times 0.00155 \times 56 \\ &+ \frac{1}{3}(0.000375^2 + 0.00155^2)56^2 \\ &- 8 \times 0.00155 \times 56) + \frac{100}{56} = \$2.99 \end{aligned}$$

C_1/C_2 의 비율의 차이에 따른 μ^* 와 τ^* 그리고 ETL 의 값은 <표 1>과 같다. C_1/C_2 가 커질수록 μ_0^* 와 ETL 은 증가하며 τ^* 는 감소한다. 이는 품질특성치가 목표값보다 작은 경우에 비용이 많이 들기 때문에 초기공정평 균을 높게 설정하고 재설정시간을 줄여 불량품의 비율을 줄이는 것이 더 효과적이기 때문이다.

<표 1> C_1/C_2 의 비율의 차이에 따른 μ^* 와 τ^* 그리고 ETL 의 변화

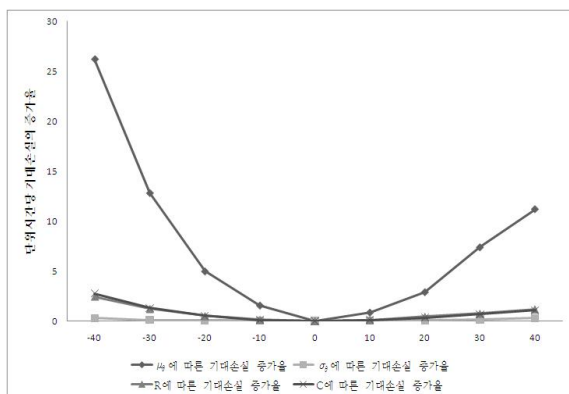
| C_1/C_2 | μ_0^* | τ^* | ETL |
|-----------|-----------|----------|-------|
| 1.1 | 7.959 | 55 | 3.043 |
| 1.2 | 7.960 | 55 | 3.092 |
| 1.3 | 7.961 | 54 | 3.137 |
| 1.4 | 7.963 | 53 | 3.178 |
| 1.5 | 7.964 | 53 | 3.217 |
| 1.6 | 7.965 | 53 | 3.254 |
| 1.7 | 7.966 | 52 | 3.289 |
| 1.8 | 7.967 | 52 | 3.321 |
| 1.9 | 7.968 | 51 | 3.353 |
| 2.0 | 7.969 | 51 | 3.382 |

4.2 민감도 분석

본 절에서는 모수(σ_θ , μ_θ , R , C)를 잘못 추정하였을

경우 단위시간당 기대손실의 증가를 평가하기 위하여 기대손실의 증가율을 이용하여 민감도를 분석한다.

기대손실의 증가율은 $\frac{[ETL_S(\mu_{0r}) - ETL_S(\mu_{0r})]}{ETL_S(\mu_{0r})} \times 100$ 로 정의한다. 여기서 $ETL_S(\mu_{0r})$ 는 올바르게 추정한 모수들을 가지고 계산한 기대손실이고 $ETL_S(\mu_{0r})$ 는 잘못 추정한 모수들을 가지고 계산한 단위시간당 기대손실이다. 기대손실의 증가율은 잘못 추정한 모수들을 사용해서 구한 초기 공정평균을 사용했을 때 올바르게 추정된 모수들을 가지고 구한 초기 공정평균에 비해서 기대손실이 몇 %나 증가하였는지를 나타내 주는 양이다. 앞절의 손실함수가 대칭인 예제에서 실제 σ_θ 값을 0.00375, μ_θ 값을 0.00155, R 값을 100, C 값을 1150으로 하여 σ_θ 값을 $-40\%(0.000225)$ 에서 $+40\%(0.000525)$ 까지 잘못 추정했을 경우, μ_θ 값을 $-40\%(0.000930)$ 에서 $+40\%(0.002170)$ 까지 잘못 추정했을 경우, R 값을 $-40\%(60)$ 에서 $+40\%(140)$ 까지 잘못 추정했을 경우 그리고 C 값을 $-40\%(690)$ 에서 $+40\%(1610)$ 까지 잘못 추정했을 경우 단위시간당 기대손실의 증가율을 그림으로 나타낸 것이 <그림 5>이다. <그림 5>에서 X축은 잘못 추정된 비율을 나타내고 Y축은 단위시간당 기대손실 증가율의 값을 나타낸다. σ_θ 의 값에 따른 증가율은 전 구간에서 변화가 미미하고 R 과 C 의 값은 실제 값보다 작게 추정하는 것이 크게 추정하는 것 보다 더 민감하다.



<그림 5> $\sigma_\theta, \mu_\theta, R, C$ 를 잘못 추정 했을 때의 단위시간당 기대손실 증가율

μ_θ 의 값을 실제 값보다 작게 추정하는 것이 크게 추정하는 것 보다 더 민감하며 그림에 나타난 것과 같이

μ_θ 가 나머지 모수에 비하여 상당히 민감함을 알 수 있다. 따라서 μ_θ 의 잘못 추정된 비율이 조금만 증가해도 단위시간당 기대손실의 증가율이 급격히 증가한다. 따라서 μ_θ 값의 정확한 추정이 필요하다. 비대칭인 모델의 경우도 대칭인 모델과 비슷한 결과가 얻어졌다. 자세한 설명은 지면상 생략한다.

5. 결 론

본 논문에서는 공정평균의 변화율이 정규분포를 따를 때 다구찌의 2차 손실함수의 품질비용을 고려하여 손실비용모형을 세우고 기대손실을 최소화 하는 초기 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루었다. 2차 손실함수는 목표값을 기준으로 대칭인 경우와 비대칭인 경우를 고려하였다.

손실함수가 대칭인 경우에는 단위시간당 기대손실이 결정변수 (초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간)에 대하여 단봉함수가 됨을 수리적으로 증명하였으며 최적해를 구했다. 손실함수가 비대칭인 경우에는 단위시간당 기대손실이 결정변수에 대하여 단봉함수가 됨을 수리적으로 증명할 수 없어 초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간을 구하는 휴리스틱 알고리즘을 제안하였다. 해를 구하는 알고리즘의 구현은 FORTRAN 프로그램을 사용하였으며 표준정규분포의 누적분포함수와 적분의 계산은 IMSL(1987)을 이용하였다. 대부분의 경우 구하고자 하는 해는 몇 분 이내에 구해졌다. 2차 손실함수가 대칭인 경우는 공정평균의 변화율 θ 의 분포가 정규분포이든 균일분포이든 초기 공정평균과 공정평균의 재설정시간은 동일한 값을 갖는다는 것을 알 수 있었다. 수치예제를 제시하였으며 모수($\mu_\theta, \sigma_\theta, R, C$)의 변화에 따른 단위 시간당 기대손실의 변화를 살펴 본 결과 공정평균의 변화율의 평균 μ_θ 에 가장 민감한 변화를 보인다는 것을 알았다. 따라서 μ_θ 값의 정확한 추정이 필요하다.

본 논문에서 제시한 방법을 제조현장에 적용하면 다양한 공정 상황에서 비효율적인 공정평균의 재설정을 방지할 수 있으며 또한 비용절감과 품질향상을 이룰 수 있다.

추후 연구과제로는 제조공정에서 공정평균의 변화뿐만 아니라 공정분산의 변화에 따른 초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제 및 주 품질특

성치 대신에 대용품질특성치로 검사하는 제조공정의 초기 공정평균, 공정평균의 재설정시간 및 대용변수의 검사기준값을 결정하는 문제가 있다.

부록 1: 식 (4)의 유도

다음의 관계식을 이용하여 단위시간당 기대손실 ETL을 유도한다.

$$i) \int_{-\infty}^m x_t f(x_t|\theta) dx_t = \mu_t \Phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) - \sigma \phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) \quad (A.1)$$

$$ii) \int_{-\infty}^m x_t^2 f(x_t|\theta) dx_t = (\sigma^2 + \mu_t^2) \Phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) - (m + \mu_t) \sigma \phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) \quad (A.2)$$

$$iii) \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) \Phi\left(\frac{m-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right) d\theta = \Phi\left(\frac{m-\mu_0-\mu_0 t}{\sqrt{t^2 \sigma_\theta^2 + \sigma^2}}\right) \quad (A.3)$$

$$iv) \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) \phi\left(\frac{m-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right) d\theta = \frac{\sigma \text{EXP}\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{(m-\mu_0-\mu_0 t)^2}{\sigma^2 + \sigma_\theta^2 t^2} \right\}\right]}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \sigma_\theta^2 t^2)}} \quad (A.4)$$

t 시점에서의 공정평균의 재설정비용을 제외한 기대손실함수의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} EL &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^m C_1(x_t - m)^2 f(x_t|\theta) g(\theta) dx_t d\theta \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_m^{\infty} C_2(x_t - m)^2 f(x_t|\theta) g(\theta) dx_t d\theta \\ &= (C_1 - C_2) \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 + \mu_t^2) g(\theta) \Phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) d\theta \\ &- (C_1 - C_2) \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (m + \mu_t) g(\theta) \phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) d\theta \\ &- 2(C_1 - C_2) m \int_{-\infty}^{\infty} \mu_t g(\theta) \Phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) d\theta \\ &+ 2(C_1 - C_2) m \sigma \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) \phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (C_1 - C_2) m^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) \Phi\left(\frac{m-\mu_t}{\sigma}\right) d\theta \\ &+ C_2 \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 + \mu_0^2 + 2\mu_0 \theta t + \theta^2 t^2 - 2m\mu_0 - 2m\theta t + m^2) g(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (A.5)$$

$\mu_t = \mu_0 + \theta t$ 와 식 (A.1)-(A.4)를 이용하여 (A.5)의 식을 다시 정리하면

$$\begin{aligned} EL &= C_2(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2) + C_2(\mu_0 \mu_\theta - 2m\mu_\theta) t \\ &+ C_2(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2) t^2 + (C_1 - C_2)(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2) \alpha_1 \\ &- (C_1 - C_2)(\mu_0 - m) \sigma \alpha_3 d\theta \\ &+ 2(C_1 - C_2)(\mu_0 - m) \int_{-\infty}^{\infty} \theta t \alpha_2 d\theta \\ &+ (C_1 - C_2) \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 t^2 \alpha_2 d\theta \\ &- (C_1 - C_2) \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \theta t \alpha_4 d\theta \end{aligned}$$

이 된다. 공정평균의 재설정비용을 포함한 총 기대손실 ETL은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ETL &= C_2(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2) + C_2 \mu_0 \tau (\mu_0 - m) \\ &+ \frac{C_2(\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)}{3} \tau^2 \\ &+ \frac{C_1 - C_2}{\tau} \int_0^\tau \{(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2) \alpha_1 - \sigma(\mu_0 - m) \alpha_3\} dt \\ &+ \frac{C_1 - C_2}{\tau} \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} [\theta t \{2(\mu_0 - m) \alpha_2 - \sigma \alpha_4\} + \theta^2 t^2 \alpha_2] d\theta dt \\ &+ \frac{R}{\tau} \end{aligned} \quad (A.7)$$

여기서 $\alpha_1 = \Phi\left(\frac{m-\mu_0-\mu_0 t}{\sqrt{t^2 \sigma_\theta^2 + \sigma^2}}\right)$,

$\alpha_2 = g(\theta) \Phi\left(\frac{m-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)$,

$\alpha_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \sigma_\theta^2 t^2)}} \text{EXP}\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{(m-\mu_0-\mu_0 t)^2}{\sigma^2 + \sigma_\theta^2 t^2} \right\}\right]$,

$\alpha_4 = g(\theta) \phi\left(\frac{m-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)$ 이다.

부록 2: 식 (5)의 유도

$\mu_t = \mu_0 + \theta t$ 와 식(A.1)-(A.4)를 이용하여 t 시점에서 공정평균의 재설정비용을 제외한 기대손실함수 EL_S 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
EL_S &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_t|\theta)g(\theta)C(x_t-m)^2 dx_t d\theta \\
&= C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_t^2 - 2mx_t + m^2)f(x_t|\theta)g(\theta) dx_t d\theta \\
&= C \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) \{(\sigma^2 + \mu_t^2) - 2m\mu_t + m^2\} d\theta \\
&= C \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) (\sigma^2 + \mu_0^2 + 2\mu_0\theta t) \\
&= C \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) (\sigma^2 + \mu_0^2 + 2\mu_0\theta t + \theta^2 t^2 - 2m\mu_0 - 2m\theta t + m^2) d\theta \\
&= C(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2 + 2\mu_0\mu_\theta t + (\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)t^2 - 2m\mu_\theta t)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

따라서 공정평균의 재설정비용을 포함한 총 기대손실 ETL_S 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
ETL_S &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau C(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2 + 2\mu_0\mu_\theta t \\
&\quad + (\sigma_\theta^2 + \mu_\theta^2)t^2 - 2m\mu_\theta t) dt + \frac{R}{\tau} \tag{A.9}
\end{aligned}$$

식 (A.9)를 다시 정리하면 식 (5)가 얻어진다.

참고문헌

- [1] 이민구(2005), "혼합물 생산공정의 최적 공정평균의 경제적 선정," 「품질경영학회지」, 33권, 4호, pp. 111-116.
- [2] 이민구(2000), "2개의 상관변수를 이용한 생산공정의 최적 공정평균 및 검사기준값의 설정," 「품질경영학회지」, 28권, 3호, pp. 155-164.
- [3] Springer C. H.(1951), "A Method for Determining the Most Economic Position of a Process Mean," *Industrial Quality Control*, Vol. 8, pp. 36-39.
- [4] Chan W. M.; Ibrahim R. N.; Lochert P. B.(2006), "Designing the Optimal Process Means and the Optimal Production run for a Deteriorating Process," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 31, pp. 367-373.
- [5] Golhar D. Y.(1987), "Determination of the Best Mean Contents for a Canning problem," *Journal of Quality Technology*, Vol. 19, pp. 82-84.
- [6] Al-Sultan K. S. and Al-Fawzan M. A. (1998), "Determination of the Optimal Process Means and Production Cycles for Multistage Production Systems Subject to Process Deterioration," *Production Plan Control*, Vol. 9, pp. 66-73.
- [7] Hunter W. G. and Kartha, C. D.(1977), "Determining the Most Profitable Target Value for a Production Process," *Journal of Quality Technology*, Vol. 9, pp. 176-180.
- [8] Chen C. H.(2004), "Determining the optimum process mean based on Asymmetric Quality Loss Function and Rectifying Inspection Plan." *IEEE: Industrial Engineering Management Conference*, pp. 1080-1084.
- [9] Lee M. K. and Bai D. S.(1994), "Determination of the Optimal Target Values for a Canning Process with Linear Shift in the Mean," *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, Vol. 20, pp. 3-13.
- [10] Bisgaard S.; Hunter W. G.; Pallesen L.(1984), "Economic Selection of Quality of Manufactured Product," *Technometrics*, Vol. 26, pp. 9-18.
- [11] Betts D. C.(1962), "Finding an Optimum Target Value in Relation to a Fixed Lower Limit and an Arbitrary Upper Limit." *Applied statistics*, Vol. 11, pp. 202-210.
- [12] Rahim M. A. and Tuffaha F.(2004), "Integrated Model for Determining the Optimal Initial Settings of the Process Mean and the Optimal Production Run Assuming Quadratic Loss Functions," *International Journal of Production Research*, Vol. 42, pp. 3281-3300.
- [13] Jang J. S.; Ahn D. G.; Lee M. K.; Elsayed E. A.(2000), "Optimum Initial Process Mean and Production Cycle for Processes with Linear Trend," *Quality Engineering*, Vol. 13, pp. 229-235.
- [14] Lee, M. K. and Elsayed, E. A.(2002), "Process Mean and Screening Limits for Filling Processes under Two-Stage Screening Procedure," *European Journal of Operational Research*, Vol. 138, pp. 118-126.
- [15] Arcelus F. J. and Banerjee P. K.(1985), "Selection of the Most Economical Production Plan in a Tool-Wear Process," *Technometrics*, Vol. 27, pp. 433-437.
- [16] Boucher T. O. and Jafari M.(1991), "The Optimum Target Value for Single Filling Operations with Quality Sampling Plans." *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, pp. 44-47.