

와이블 분포와 정시중단 하에서의 MLE와 LSE의 정확도 비교

김성일*·박민용*†·박정원**

*한양대학교 산업공학과

**한국산업기술시험원

A Comparison of Estimation Methods for Weibull Distribution and Type I Censoring

Seong-Il Kim*·Min-Yong Park*†·Jung-Won Park**

* Hanyang University Department of Industrial Engineering

** Korea Testing Laboratory

Key Words : Weibull Distribution, Type I Censoring, Least Square Estimator, Maximum Likelihood Estimator

Abstract

In this paper, two estimation methods(least square estimation and maximum likelihood estimation) were compared for Weibull distribution and Type I censoring. Data obtained by Monte Carlo simulation were analyzed using two estimation methods and analysis results were compared by MSE(Mean Squared Error). Comparison results show that maximum likelihood estimator is better for censored data and complete data with more than 30 samples and least square estimator is better for small size complete data(less than and equal to 20 samples).

1. 서론

일반적으로 사용되는 수명분포의 파라미터 추정방법에는 최소제곱추정법(Least Square Estimator: LSE)과 최대우도추정법(Maximum Likelihood Estimator: MLE)이 있다. 6 시그마 운동의 전개와 함께 산업계에 널리 사용하게 된 통계 소프트웨어 미니탭에도 추정 방법에 대한 옵션으로 LSE와 MLE를 제시하고 있다. 그런데 이 두 가지 방법이 제시되면서 산업계의 데이터 분석 담당자들은 오히려 혼란스러워하고 있다. 이 두 가지 방법의 추정 결과가 다르기 때문에 어떤 방법을 사용하여야 하는지 선택해야 하는 상황에 놓이기 때문이다. 미니탭(Minitab)에서는 R13버전까지 기본 옵션으로 MLE를 사용하였다가 R14버전부터는 LSE를 사

용하고 있다. 통계 소프트웨어 미니탭을 개발한 Minitab Inc.에서는 다음과 같이 LSE와 MLE의 장단점을 비교하였다[10].

1. 만일 데이터의 형태가 완전자료라면 LSE는 이론상으로 Bias가 없지만, 누적고장확률(plotting position) 계산 선택에 따라 Bias가 있을 수도 있다. 이와 반대로 MLE는 시료의 크기가 증가할수록 Bias가 감소하게 된다.

2. LSE는 분산 추정을 바로 할 수 없기 때문에 분산 추정이 크게 되는데 반해 MLE는 작게 구해진다.

3. 분포의 모형 확정시 사용되는 Correlation Coefficient에 대한 P-Value는 LSE가 MLE보다 더 정밀하다. 하지만 파라미터의 경우는 그 반대이다. 대시료 뿐만 아니라 소시료의 경우에도 MLE는 좋은 추정량을 갖게 된다.

† 교신저자 mypark@hanyang.ac.kr

4. MLE는 Newton-Raphson Method와 같은 최적해 검색 방법을 사용해야 하므로 컴퓨터 통계 패키지 프로그램을 사용하지 않으면 계산이 힘들다. 하지만 LSE는 컴퓨터 통계 패키지 프로그램을 사용하지 않아도 계산이 가능하다.

Minitab Inc.에서 제시한 내용으로만 봐서는 MLE보다 LSE가 더 좋은 것처럼 보인다. 하지만 Gibbons, D. and Vance, C.(1981)의 연구나 Bugaighis(1988)의 연구에서 MSE(Mean Squared Error)를 기준으로 제시한 결과를 보면 전반적으로 MLE가 좋은 특성을 가지고 있음을 알 수 있다. Gibbons, D. and Vance, C.(1981)의 연구에서는 완전데이터와 정수중단데이터(Type II censored data)에 대하여 LSE, MLE, B&A(Bain & Antile) 추정법, Gumbel 추정법, Menon 추정법, 적률(Moment) 추정법 그리고 선형(Linear) 추정법인 최량 선형비편향(Best Linear Unbiased) 추정법과 최량 선형불변(Best Linear Invariant) 추정법 등의 7가지 다양한 추정법을 비교하였다. Bugaighis(1988)는 가속수명시험데이터에 대하여 MLE를 사용한 경우와 선형추정법을 사용한 경우를 비교하였다.

Hossain, A. and Howlader, H. A. (1996)과 Hossain, A. and Zimmerb, W. (2002)의 경우 그 시료가 적고 고장형태에 따른 추정치 변화와 같은 다양한 경우를 적용하지 못한 한계가 있으며 실질적으로 가장 많이 접할 수 있는 데이터 유형인 정시중단데이터를 고려하지 않았다. 또 다른 연구로 Genschel, U. and Meeker, W. Q.(2009)는 다양한 경우를 고려하여 LSE와 MLE를 비교하여 포괄적인 결과를 제시한 반면, 시뮬레이션 조건이 까다로워 현실적으로 일반 사용자들이 볼 때 어려움이 많다. 따라서 본 논문에서는 실제 현장에서 자주 사용되는 시험상황에 맞춰 시뮬레이션을 실시하고, 그 결과에 기초하여 일반 사용자들이 이해하기 쉽게 추정 방법 선택의 가이드라인을 제시하고자 한다.

이와 같은 앞선 연구들로부터 LSE와 MLE가 각각의 장단점을 가지고 있으며, 데이터 유형에 따라 어떤 방법이 좋은지 달라질 수 있음을 알 수 있다. 하지만 다양한 경우에서 어떠한 추정방법을 사용해야 하는지에 대한 가이드라인을 제시해 주지는 못한다.

본 연구에서는 현실적으로 산업계에서 가장 많이 접할 수 있는 데이터 유형인 완전데이터와 정시중단데이터의 경우에 어떤 추정방법을 사용하는 것이 더 정확한 추정을 할 수 있는지 시료 수, 고장 수 그리고 고장 비

율의 여러 조합에 따라 두 추정방법을 비교하였다. 특히, 시료 수와 고장 수를 경험적으로 실질적인 신뢰성 시험을 진행 할 때 가장 많이 볼 수 있는 수로 선정하여 현실적인 산업계 측면에서 이용 할 수 있도록 하였다. 비교 결과를 통해 추정방법의 가이드라인을 제시하였다.

2. 와이블 분포 파라미터 추정방법

LSE와 MLE의 와이블 분포 파라미터 추정방법을 기술 하였다. 이 때, 수식의 이해를 돕기 위해 완전자료의 경우를 가정하였다.

2.1 최소제곱추정법

와이블 분포의 확률밀도함수 $f(t)$ 와 신뢰도 함수 $R(t)$ 그리고 분포함수 $F(t)$ 는 식 (1)과 식 (2) 그리고 식 (3)과 같다.

$$f(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1} \exp\{-(\alpha t)^\beta\} \quad (1)$$

$$R(t) = \exp\{-(\alpha t)^\beta\} \quad (2)$$

$$F(t) = 1 - \exp\{-(\alpha t)^\beta\} \quad (3)$$

단, α 는 와이블 분포의 척도파라미터, β 는 와이블 분포의 형상파라미터, t 는 고장 발생 시간이다.

$\frac{1}{t_0} = \alpha^\beta$ 으로 대치하여 풀면 $R(t)$ 는 식 (4)와 같이 된다.

$$R(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t^\beta}{t_0}\right)\right\} \quad (4)$$

α 와 β 의 추정치를 유도하기 위해 양변에 대수를 취하여 풀면 아래와 같이 정의된다.

$$\ln \frac{1}{R(t)} = \frac{t^\beta}{t_0}$$

위 식에 다시 양변에 대수를 취하고, $R(t)$ 대신에 $1 - F(t)$ 를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \beta \ln t - \ln t_0$$

위 식을 $y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)}$ 과 $x = \ln t$ 그리고

$b = -\ln t_0$ 로 변수 변환하면 이것은 $y = \beta x + b$ 의 선형직선이 되므로 α 와 β 의 추정치는 각각 식 (5)와 식 (6)과 같이 된다[1].

$$\hat{\alpha} = (t_0)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} = \exp\left(\frac{\hat{b}}{\hat{\beta}}\right) \quad \text{단, } \hat{b} = y_i - \hat{\beta}x_i \quad (5)$$

$$\hat{\beta} = \frac{r \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{r \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad (6)$$

단, n 은 총 시료 수, r 은 n 개의 시료 중 고장 개수, x_i 는 고장 시간 t_i 에 대한 $\ln t_i$ 그리고 y_i 는 고장 시간 t_i 에 대한 누적고장확률 $F(t_i)$ 이다.

LSE 적용시 x 와 y 가 바뀐 LSE방법이 추정 정밀도가 더 좋다고 알려져 있으나 일반식을 적용하기 위해 전통적인 방법을 사용하였다.

2.2 최대우도추정법

먼저, 최대우도추정법을 구하기 위한 우도 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; \text{data}) &= \prod_{i=1}^n \alpha \beta (\alpha t_i)^{\beta-1} \exp\{- (\alpha t_i)^\beta\} \\ &= \beta^n \alpha^{n\alpha} \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \exp\left\{- \alpha^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right\} \end{aligned}$$

단, n 은 총 시료 수, t_i 는 i 번째 고장 발생 시간이다. 정의된 우도함수 양변에 로그를 취해주면 다음과 같이 로그-우도함수가 정의 된다.

$$\ln L = n \ln \beta + n \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta$$

정의된 로그-우도함수를 이용하여 α 와 β 각각에 대해 편미분을 해주면 식 (7)과 식 (8)과 같이 구할 수 있다[8].

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n\beta}{\alpha} - \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha^\beta \ln \alpha \sum_{i=1}^n t_i^\beta \\ &\quad - \alpha^\beta \sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln t_i = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

α 와 β 의 추정치는 반복적 수치해석법을 이용하여 식 (7)과 식 (8)을 동시에 만족하는 해로부터 구할 수 있다.

3. LSE와 MLE의 비교 방법

LSE와 MLE의 정확도 비교를 위하여 몬테카를로 시뮬레이션에 의하여 미리 정한 파라미터(와이블 분포의 척도모수 α 와 형상모수 β)를 갖는 와이블 분포를 따르는 고장시간을 미리 설정한 상황(시료 수, 고장 수)에 맞게 만들어 낸 후 두 추정방법으로 α 와 β 를 추정하였다.

랜덤 와이블 변수를 발생 시켰을 때 얻어진 값을 고장 시간이라 보고 변수를 정렬하여 정시중단시험을 진행한 것으로 가정하였다. 또한, 시료 수와 고장 수가 동일하다면 완전자료를 얻은 것으로 가정하였다.

이와 같은 과정을 미리 정한 반복회수만큼 반복하여 MSE를 산출하였다. 이때, MSE를 구하는 식은 다음과 같다.

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{Bias}(\hat{\theta}, \theta))^2$$

단, $\hat{\theta}$ 는 추정치이다.

또한, 추정치의 과대/과소추정 여부를 알기 위해 Bias를 산출하여 두 방법의 정확도를 비교하였다. 이때, 시뮬레이션을 실행한 조건은 다음과 같다.

- $\alpha=1, \beta=0.5, 1, 3$
- 시료 수 : 5~40개
- 고장 수 : 2개, 3개, 10%~100% (10%씩 증가시키며 정수로 고장 수가 결정되는 백분율 적용)

각 경우에 대하여 1000번씩 시뮬레이션을 실행했으며 데이터 분석에는 SAS 9.1을 사용하였다. 위 조건에서 β 를 0.5, 1, 3으로 정한 것은 와이블 분포의 고장확률밀도함수에서 형상 파라미터가 $\beta < 1$ 과 $\beta = 1$ 그리고 $\beta > 1$ 인 경우 고장형태가 각각 초기, 우발, 마모 고장인 것을 이용하여 각 고장 형태별로 LSE와 MLE의 차이점을 알아보기 위한 것이다.

여기서 고장 수는 정시 중단 시험 후 고장이 발생했다는 가정하에서의 기대 고장 수이다. 고장 수를 2개, 3개 그리고 고장비율로 정한 것은 실제적인 신뢰성 시험에서 고장이 많이 발생하지 않는다. LSE에 경우 와이블 분포의 파라미터 추정을 위한 최소 고장 수가 2개 이상이지만 MLE는 고장 수가 1개라도 추정이 가능하다.

다. 하지만 고장 수가 1개일 경우에 LSE와 비교가 불가능하고, 추정치 또한 신뢰할 수 없으므로 최소 고장 수를 2개로 정하였다. 또한, 고장비율은 고장 수/시료 수로 같은 고장비율이 같을 때 추정방법에 따른 영향을 파악하기 위함이다. 예를 들면 시료 수가 10개이고 고장 수가 5개, 그리고 시료 수가 30개이고 고장 수가 15개라면 두 경우 모두 고장비율이 50%로 동일하다. 따라서 고장비율이 동일하다면 시료 수와 고장 수에 상관없이 추정방법에 차이가 있는지 알아보았다. 하지만 고장 수 2개와 3개는 각 시료 수에 따라 고장비율이 다르지만 신뢰성 시험에서 고장이 많이 발생하지 않는다는 가정하에서 정한 것이다.

이 때, LSE의 누적고장확률 계산은 Blom 방법을 사용하였다. Blom 방법은 주로 사용하는 누적고장확률 계산 방법인 메디안 순위법을 개선한 것이다[3]. Blom 방법의 식은 다음과 같다.

$$F(t_{(i)}) = \frac{i-0.375}{n+0.25}$$

단, i 는 순서, n 은 총 시료 수이다.

4. 시뮬레이션 결과

각 조건에 대하여 시뮬레이션한 결과를 표 1과 표 2에 나타내었다.

표 1은 α 에 대한 LSE와 MLE의 비교 결과로 MSE와 Bias를 기준으로 나타낸 표이다. 먼저, 과대/과소 추정여부를 살펴보면 Bias가 양수로 과대 추정이 되었음을 알 수 있다.

표 2에서 LSE의 경우에 모든 시료 수에서 중도절단 자료의 추정치가 좋지 않다. 하지만 고장 수가 커짐에 따라 MSE와 Bias가 작아지다가 완전자료에서 급격히 작아지는 것을 볼 수 있다.

MLE의 경우에는 모든 시료 수에서 고장비율이 50% 이하이면 추정치가 좋지 않지만 고장비율이 50%이상이면 MSE와 Bias가 급격히 작아지는 것을 볼 수 있다.

<표 1> LSE와 MLE의 비교 결과(α 에 대한 MSE (Bias)를 기준으로)

시료 수	고장 수	고장 비율	$\alpha=1, \beta=0.5$		$\alpha=1, \beta=1$		$\alpha=1, \beta=3$	
			LSE	MLE	LSE	MLE	LSE	MLE
5	2	40%	5.865 (0.110)	5431.399 (3.296)	3.421 (0.084)	21.030 (0.205)	1.951 (0.063)	176.921 (0.595)
	3	60%	6.473 (0.114)	18.070 (0.190)	2.966 (0.077)	1.068 (0.045)	1.575 (0.055)	10.968 (0.148)
	4	80%	6.052 (0.110)	3.132 (0.077)	2.799 (0.077)	0.330 (0.032)	1.325 (0.055)	2.639 (0.071)
	5	100%	1.955 (0.063)	1.431 (0.055)	0.277 (0.032)	0.238 (<0.001)	2.418 (0.071)	2.001 (0.063)
10	2	20%	39.177 (1.442)	1174731 (48.477)	25.192 (0.224)	111345.89 (14.923)	13.231 (0.161)	332271.62 (25.779)
	3	30%	40.079 (0.283)	374468.7 (27.366)	25.478 (0.226)	179.496 (0.599)	10.746 (0.145)	1699.899 (1.844)
	4	40%	39.199 (0.279)	1452.03 (1.704)	22.263 (0.212)	16.133 (0.179)	8.698 (0.130)	136.415 (0.522)
	5	50%	37.678 (0.274)	69.097 (0.371)	19.289 (0.197)	3.253 (0.084)	7.037 (0.118)	28.804 (0.241)
	6	60%	34.668 (0.263)	13.861 (0.167)	16.191 (0.179)	0.981 (0.045)	5.273 (0.105)	8.762 (0.134)
	7	70%	32.519 (0.255)	3.747 (0.084)	13.964 (0.167)	0.398 (0.032)	4.059 (0.089)	3.486 (0.084)
	8	80%	29.940 (0.245)	1.499 (0.055)	11.226 (0.148)	0.194 (<0.001)	3.251 (0.084)	1.812 (0.063)
	9	90%	26.297 (0.230)	0.904 (0.045)	9.899 (0.141)	0.138 (<0.001)	2.402 (0.071)	1.343 (0.055)
	10	100%	0.879 (0.045)	0.665 (0.032)	0.152 (<0.001)	0.126 (<0.001)	1.153 (0.045)	0.968 (0.045)

<표 1> LSE와 MLE의 비교 결과(α 에 대한 MSE (Bias)를 기준으로) -계속-

시료 수	고장 수	고장 비율	$\alpha=1, \beta=0.5$		$\alpha=1, \beta=1$		$\alpha=1, \beta=3$	
			LSE	MLE	LSE	MLE	LSE	MLE
20	2	10%	208.549 (0.646)	109967296 (468.972)	149.592 (0.547)	6678577.4 (115.573)	112.407 (0.474)	15711746 (177.268)
	3	15%	217.562 (0.660)	44992850 (6707.638)	155.485 (0.558)	262477.87 (22.912)	111.161 (0.471)	1563573.1 (55.921)
	4	20%	220.974 (0.665)	12643227 (159.019)	149.039 (0.546)	8074.744 (4.019)	100.104 (0.447)	39383.77 (8.875)
	6	30%	119.734 (0.489)	61285.892 (11.071)	115.217 (0.480)	125.078 (0.500)	82.970 (0.407)	1089.375 (1.476)
	8	40%	180.207 (0.600)	821.116 (1.281)	96.538 (0.439)	13.634 (0.164)	63.756 (0.358)	126.893 (0.504)
	10	50%	164.053 (0.573)	50.390 (0.318)	79.651 (0.399)	2.939 (0.077)	47.056 (0.307)	26.988 (0.232)
	12	60%	146.238 (0.540)	9.218 (0.134)	63.447 (0.356)	0.841 (0.045)	37.774 (0.276)	7.817 (0.126)
	14	70%	129.845 (0.510)	2.250 (0.063)	50.833 (0.319)	0.275 (0.032)	26.934 (0.232)	2.669 (0.071)
	16	80%	114.618 (0.479)	0.722 (0.032)	39.280 (0.281)	0.116 (<0.001)	19.328 (0.197)	1.148 (0.045)
	18	90%	97.975 (0.443)	0.424 (0.032)	29.503 (0.243)	0.070 (<0.001)	12.181 (0.155)	0.618 (0.032)
20	100%	0.384 (0.032)	0.272 (0.032)	0.062 (<0.001)	0.053 (<0.001)	0.599 (0.032)	0.519 (0.032)	
25	2	8%	360.567 (0.849)	181932202 (603.212)	276.286 (0.744)	15164464 (174.152)	208.425 (0.646)	31156274 (249.626)
	3	12%	374.875 (0.866)	99653681 (9471.444)	276.166 (0.743)	1885781.6 (61.413)	208.707 (0.646)	6518267.5 (144.177)
	5	20%	354.205 (0.841)	11072287 (148.812)	235.139 (0.686)	8190.251 (4.047)	181.747 (0.602)	43863.268 (9.366)
	10	40%	282.805 (0.752)	558.674 (1.057)	144.528 (0.538)	12.972 (0.161)	109.387 (0.468)	118.178 (0.486)
	15	60%	220.257 (0.664)	8.081 (0.126)	90.656 (0.425)	0.801 (0.045)	61.477 (0.351)	7.269 (0.122)
	20	80%	170.022 (0.583)	0.614 (0.032)	53.554 (0.327)	0.104 (<0.001)	31.472 (0.251)	0.924 (0.045)
	25	100%	0.263 (0.032)	0.211 (<0.001)	0.052 (<0.001)	0.045 (<0.001)	0.437 (0.032)	0.386 (0.032)

<표 1> LSE와 MLE의 비교 결과(α 에 대한 MSE (Bias)를 기준으로) -계속-

시료 수	고장 수	고장 비율	$\alpha=1, \beta=0.5$		$\alpha=1, \beta=1$		$\alpha=1, \beta=3$	
			LSE	MLE	LSE	MLE	LSE	MLE
30	2	7%	547.071 (1.055)	222415740 (666.965)	431.032 (0.936)	25474880 (225.727)	349.327 (0.591)	53667347 (327.620)
	3	10%	574.752 (1.084)	166048710 (576.286)	442.739 (0.944)	6390795.5 (113.058)	352.476 (0.840)	16874761 (183.712)
	6	20%	536.596 (1.043)	11767250 (153.401)	343.263 (0.814)	5266.629 (3.256)	278.701 (0.746)	35193.386 (8.390)
	9	30%	465.69 (0.973)	27773.492 (7.459)	270.058 (0.728)	104.399 (0.445)	214.725 (0.655)	937.003 (1.369)
	12	40%	408.782 (0.897)	527.45 (1.026)	214.660 (0.645)	12.702 (0.150)	163.915 (0.573)	116.685 (0.483)
	15	50%	361.683 (0.851)	45.367 (0.291)	165.060 (0.578)	2.902 (0.074)	120.271 (0.491)	25.920 (0.228)
	18	60%	317.947 (0.808)	8.037 (0.134)	126.591 (0.495)	0.833 (0.044)	87.482 (0.418)	7.115 (0.118)
	21	70%	272.097 (0.747)	2.023 (0.077)	93.799 (0.426)	0.261 (0.027)	62.679 (0.354)	2.343 (0.071)
	24	80%	236.250 (0.693)	0.620 (0.035)	74.458 (0.386)	0.091 (<0.001)	42.633 (0.292)	0.840 (0.045)
	27	90%	198.410 (0.642)	0.275 (0.030)	50.015 (0.332)	0.048 (<0.001)	28.319 (0.239)	0.430 (0.032)
	30	100%	0.215 (<0.001)	0.169 (0.021)	0.041 (0.014)	0.034 (<0.001)	0.379 (0.032)	0.343 (0.032)
	40	2	5%	1049.951 (1.449)	388282970 (881.230)	837.729 (1.294)	57105324 (337.951)	704.657 (1.187)
3		8%	1100.448 (1.484)	300729633 (775.539)	866.979 (1.317)	23954488 (218.881)	763.645 (22.395)	49122384 (313.441)
4		10%	1113.44 (1.493)	222219177 (666.663)	837.256 (1.294)	5362141.5 (103.558)	716.107 (1.197)	19389428 (196.924)
8		20%	963.673 (1.388)	11746359 (153.274)	649.467 (1.140)	3632.862 (2.696)	546.103 (1.045)	26336.362 (7.258)
12		30%	842.729 (1.298)	29174.52 (7.639)	500.282 (1.000)	100.762 (0.449)	400.674 (0.895)	868.171 (1.318)
16		40%	728.251 (1.207)	476.682 (0.976)	363.473 (0.853)	12.628 (0.158)	293.245 (0.766)	115.526 (0.481)
20		50%	639.247 (1.130)	42.880 (0.293)	276.301 (0.744)	2.864 (0.077)	222.249 (0.768)	25.472 (0.226)
24		60%	545.651 (1.045)	7.137 (0.118)	209.969 (0.648)	0.804 (0.045)	162.078 (0.569)	7.112 (0.118)
28		70%	459.130 (0.958)	1.710 (0.055)	155.847 (0.559)	0.234 (<0.001)	108.932 (0.467)	2.082 (0.063)
32		80%	396.869 (0.891)	0.472 (0.032)	107.282 (0.464)	0.078 (<0.001)	76.521 (0.391)	0.698 (0.032)
36		90%	313.587 (0.792)	0.191 (<0.001)	74.215 (0.385)	0.035 (<0.001)	44.794 (0.300)	0.313 (0.032)
40		100%	0.139 (<0.001)	0.117 (<0.001)	0.032 (<0.001)	0.028 (<0.001)	0.273 (0.032)	0.247 (<0.001)

<표 2> LSE와 MLE의 비교 결과(β 에 대한 MSE (Bias)를 기준으로)

시료 수	고장 수	고장 비율	$\alpha=1, \beta=0.5$		$\alpha=1, \beta=1$		$\alpha=1, \beta=3$	
			LSE	MLE	LSE	MLE	LSE	MLE
5	2	40%	245.789 (0.701)	0.059 (<0.001)	42.326 (0.292)	0.242 (<0.001)	41.732 (0.288)	0.207 (<0.001)
	3	60%	0.374 (0.032)	0.063 (<0.001)	0.891 (0.045)	0.410 (0.032)	1.209 (0.045)	0.233 (<0.001)
	4	80%	0.106 (<0.001)	0.097 (<0.001)	0.375 (0.032)	0.429 (0.032)	0.438 (0.032)	0.378 (0.032)
	5	100%	0.127 (<0.001)	0.289 (0.032)	0.374 (0.032)	0.828 (0.045)	0.372 (0.032)	0.796 (0.045)
10	2	20%	2.298 (0.071)	0.071 (<0.001)	11.340 (0.152)	0.293 (0.032)	76.889 (0.392)	0.298 (0.032)
	3	30%	0.184 (<0.001)	0.056 (<0.001)	0.852 (0.045)	0.238 (<0.001)	0.591 (0.032)	0.223 (<0.001)
	4	40%	0.134 (<0.001)	0.045 (<0.001)	0.545 (0.032)	0.181 (<0.001)	0.579 (0.032)	0.177 (<0.001)
	5	50%	0.123 (<0.001)	0.035 (<0.001)	0.483 (0.032)	0.136 (<0.001)	0.477 (0.032)	0.141 (<0.001)
	6	60%	0.108 (<0.001)	0.027 (<0.001)	0.424 (0.032)	0.111 (<0.001)	0.422 (0.032)	0.098 (<0.001)
	7	70%	0.097 (<0.001)	0.021 (<0.001)	0.369 (0.032)	0.087 (<0.001)	0.368 (0.032)	0.089 (<0.001)
	8	80%	0.082 (<0.001)	0.019 (<0.001)	0.307 (0.032)	0.082 (<0.001)	0.316 (0.032)	0.071 (<0.001)
	9	90%	0.063 (<0.001)	0.025 (<0.001)	0.260 (0.032)	0.083 (<0.001)	0.256 (0.032)	0.112 (<0.001)
	10	100%	0.025 (<0.001)	0.034 (<0.001)	0.115 (<0.001)	0.161 (<0.001)	0.102 (<0.001)	0.153 (<0.001)
	20	2	10%	1.006 (0.045)	0.075 (<0.001)	2.815 (0.077)	0.408 (0.032)	13.010 (0.161)
3		15%	0.197 (<0.001)	0.082 (<0.001)	0.743 (0.032)	0.355 (0.032)	0.771 (0.045)	0.361 (0.032)
4		20%	0.184 (<0.001)	0.079 (<0.001)	0.723 (0.032)	0.328 (0.032)	0.709 (0.032)	0.313 (0.032)
6		30%	0.165 (<0.001)	0.062 (<0.001)	0.655 (0.032)	0.254 (0.032)	0.667 (0.032)	0.257 (0.032)
8		40%	0.150 (<0.001)	0.049 (<0.001)	0.596 (0.032)	0.193 (<0.001)	0.597 (0.032)	0.194 (<0.001)
10		50%	0.135 (<0.001)	0.036 (<0.001)	0.536 (0.032)	0.147 (<0.001)	0.528 (0.032)	0.144 (<0.001)
12		60%	0.117 (<0.001)	0.026 (<0.001)	0.469 (0.032)	0.104 (<0.001)	0.471 (0.032)	0.104 (<0.001)
14		70%	0.100 (<0.001)	0.017 (<0.001)	0.401 (0.032)	0.069 (<0.001)	0.397 (0.032)	0.070 (<0.001)
16		80%	0.083 (<0.001)	0.012 (<0.001)	0.326 (0.032)	0.044 (<0.001)	0.324 (0.032)	0.046 (<0.001)
18		90%	0.063 (<0.001)	0.009 (<0.001)	0.250 (<0.001)	0.034 (<0.001)	0.241 (<0.001)	0.033 (<0.001)
20	100%	0.012 (<0.001)	0.013 (<0.001)	0.050 (<0.001)	0.054 (<0.001)	0.048 (<0.001)	0.050 (<0.001)	

<표 2> LSE와 MLE의 비교 결과(β 에 대한 MSE (Bias)를 기준으로) -계속-

시료 수	고장 수	고장 비율	$\alpha=1, \beta=0.5$		$\alpha=1, \beta=1$		$\alpha=1, \beta=3$	
			LSE	MLE	LSE	MLE	LSE	MLE
25	2	8%	24.847 (0.224)	0.070 (<0.001)	1.469 (0.055)	0.431 (0.032)	9.589 (0.138)	0.416 (0.032)
	3	12%	0.191 (<0.001)	0.082 (<0.001)	0.775 (0.045)	0.401 (0.032)	0.780 (0.045)	0.395 (0.032)
	5	20%	0.184 (<0.001)	0.080 (<0.001)	0.738 (0.032)	0.327 (0.032)	0.741 (0.032)	0.327 (0.032)
	10	40%	0.152 (<0.001)	0.049 (<0.001)	0.602 (0.032)	0.192 (<0.001)	0.619 (0.032)	0.197 (<0.001)
	15	60%	0.117 (<0.001)	0.025 (<0.001)	0.466 (0.032)	0.097 (<0.001)	0.477 (0.032)	0.104 (<0.001)
	20	80%	0.082 (<0.001)	0.011 (<0.001)	0.324 (0.032)	0.040 (<0.001)	0.331 (0.032)	0.044 (<0.001)
	25	100%	0.010 (<0.001)	0.009 (<0.001)	0.039 (<0.001)	0.033 (<0.001)	0.043 (<0.001)	0.040 (<0.001)
30	2	7%	7.964 (7.948)	0.064 (0.064)	3.894 (3.886)	0.443 (0.442)	2.661 (2.256)	0.425 (0.424)
	3	10%	0.202 (0.202)	0.079 (0.079)	0.817 (0.815)	0.425 (0.424)	0.849 (0.847)	0.419 (0.418)
	6	20%	0.191 (0.191)	0.083 (0.083)	0.755 (0.753)	0.336 (0.335)	0.757 (0.755)	0.332 (0.331)
	9	30%	0.172 (0.172)	0.064 (0.064)	0.689 (0.688)	0.264 (0.263)	0.695 (0.694)	0.263 (0.262)
	12	40%	0.155 (0.155)	0.050 (0.050)	0.625 (0.624)	0.203 (0.203)	0.625 (0.624)	0.199 (0.199)
	15	50%	0.138 (0.138)	0.037 (0.037)	0.551 (0.550)	0.149 (0.149)	0.555 (0.554)	0.149 (0.149)
	18	60%	0.121 (0.121)	0.026 (0.026)	0.480 (0.479)	0.104 (0.104)	0.481 (0.480)	0.101 (0.101)
	21	70%	0.101 (0.101)	0.016 (0.016)	0.408 (0.407)	0.065 (0.065)	0.408 (0.407)	0.067 (0.067)
	24	80%	0.083 (0.083)	0.010 (0.010)	0.337 (0.336)	0.042 (0.042)	0.326 (0.325)	0.039 (0.039)
	27	90%	0.063 (0.063)	0.006 (0.006)	0.244 (0.244)	0.025 (0.025)	0.247 (0.247)	0.023 (0.023)
	30	100%	0.008 (0.008)	0.006 (0.006)	0.031 (0.031)	0.027 (0.027)	0.034 (0.034)	0.026 (0.026)

<표 2> LSE와 MLE의 비교 결과(β 에 대한 MSE (Bias)를 기준으로) -계속-

시료 수	고장 수	고장 비율	$\alpha=1, \beta=0.5$		$\alpha=1, \beta=1$		$\alpha=1, \beta=3$	
			LSE	MLE	LSE	MLE	LSE	MLE
40	2	5%	0.411 (0.126)	0.057 (<0.001)	1.624 (0.089)	0.445 (0.032)	3.773 (0.636)	0.414 (0.032)
	3	8%	0.216 (<0.001)	0.071 (<0.001)	0.852 (0.045)	0.453 (0.032)	0.875 (0.045)	0.439 (0.032)
	4	10%	0.212 (<0.001)	0.082 (<0.001)	0.839 (0.045)	0.435 (0.032)	0.836 (0.045)	0.431 (0.032)
	8	20%	0.195 (<0.001)	0.084 (<0.001)	0.784 (0.032)	0.345 (0.032)	0.782 (0.032)	0.340 (0.032)
	12	30%	0.177 (<0.001)	0.067 (<0.001)	0.717 (0.032)	0.270 (0.032)	0.709 (0.032)	0.269 (0.032)
	16	40%	0.159 (<0.001)	0.051 (<0.001)	0.635 (0.032)	0.204 (<0.001)	0.636 (0.032)	0.206 (<0.001)
	20	50%	0.142 (<0.001)	0.038 (<0.001)	0.566 (0.032)	0.151 (<0.001)	0.570 (0.032)	0.153 (<0.001)
	24	60%	0.123 (<0.001)	0.026 (<0.001)	0.492 (0.032)	0.106 (<0.001)	0.498 (0.032)	0.106 (<0.001)
	28	70%	0.102 (<0.001)	0.016 (<0.001)	0.418 (0.032)	0.069 (<0.001)	0.412 (0.032)	0.067 (<0.001)
	32	80%	0.085 (<0.001)	0.009 (<0.001)	0.332 (0.032)	0.038 (<0.001)	0.342 (0.032)	0.039 (<0.001)
	36	90%	0.061 (<0.001)	0.005 (<0.001)	0.247 (<0.001)	0.021 (<0.001)	0.245 (<0.001)	0.021 (<0.001)
	40	100%	0.006 (<0.001)	0.005 (<0.001)	0.026 (<0.001)	0.017 (<0.001)	0.025 (<0.001)	0.018 (<0.001)

<표 3> 고장 형태에 따른 완전자료의 MSE (Bias)의 차이 (β 를 기준으로)

시료 수	$\alpha=1, \beta=0.5$		$\alpha=1, \beta=1$		$\alpha=1, \beta=3$	
	LSE	MLE	LSE	MLE	LSE	MLE
21	0.012 (<0.001)	0.011 (<0.001)	0.050 (<0.001)	0.047 (<0.001)	0.441 (0.032)	0.425 (0.032)
22	0.011 (<0.001)	0.011 (<0.001)	0.044 (<0.001)	0.040 (<0.001)	0.431 (0.032)	0.416 (0.032)
23	0.010 (<0.001)	0.010 (<0.001)	0.043 (<0.001)	0.037 (<0.001)	0.403 (0.032)	0.358 (0.032)
24	0.010 (<0.001)	0.009 (<0.001)	0.045 (<0.001)	0.038 (<0.001)	0.346 (0.032)	0.330 (0.032)
25	0.011 (<0.001)	0.010 (<0.001)	0.042 (<0.001)	0.036 (<0.001)	0.363 (0.032)	0.308 (0.032)
26	0.010 (<0.001)	0.008 (<0.001)	0.040 (<0.001)	0.033 (<0.001)	0.312 (0.032)	0.281 (0.032)
27	0.009 (<0.001)	0.007 (<0.001)	0.034 (<0.001)	0.029 (<0.001)	0.347 (0.032)	0.273 (0.032)
28	0.009 (<0.001)	0.008 (<0.001)	0.037 (<0.001)	0.030 (<0.001)	0.355 (0.032)	0.292 (0.032)
29	0.009 (<0.001)	0.007 (<0.001)	0.038 (<0.001)	0.030 (<0.001)	0.292 (0.032)	0.231 (<0.001)

표 2는 β 에 대한 LSE와 MLE의 비교 결과로 MSE와 Bias를 기준으로 나타낸 표이다. 먼저, 과대/과소 추정 여부를 살펴보면 Bias가 양수로 과대 추정이 되었음을 알 수 있다. 표 2에서 보는 바와 같이 시료 수가 5개와 10개 그리고 20개일 때 완전자료는 LSE가 좋은 추정치를 보여주고, 중도절단자료는 MLE가 좋은 추정치를 보여주고 있다. 하지만 시료 수가 25개를 넘어 갈 때 완전자료와 중도절단자료 모두 MLE가 좋은 추정치를 보여주고 있다.

모든 시료 수에서 고장 수가 2개일 때 LSE의 추정이 좋지 않다. 이는 와이블 분포 확률지에 타점한다고 가정할 때 타점이 2개라면 회귀선이 무조건 직선이 되므로 와이블 분포 파라미터의 추정이 어렵기 때문이다. 하지만 MLE의 경우 수치 해석법을 사용하여 추정하기 때문에 고장 수가 2개라도 추정치가 계산될 수 있음을 볼 수 있다.

LSE와 MLE의 비교 시뮬레이션을 진행하면서 다른 시료 수와 α 에 대해서는 LSE와 MLE의 결과가 뚜렷했다. 하지만 시료 수가 20개 초과에서 30개 미만 사이이고 완전자료일 경우 β 에 대한 더 좋은 추정치에 대한 결과가 바뀌는 경우를 볼 수 있었다. 따라서, 시료 수가 20개 초과에서 30개 미만 사이이고 완전자료라면 LSE와 MLE의 선택이 모호해 질 수 있다.

이를 알아보기 위해 표 3에 시료 수가 20개 초과에서 30개 미만 사이이고 완전자료일 때 β 에 대한 LSE와 MLE의 비교 결과를 MSE와 Bias를 기준으로 나타냈다.

표 1과 표 2, 그리고 표 3의 시뮬레이션 결과를 종합한 결과, 표 4와 같은 가이드라인을 선택할 수 있었다. 표 4에서 보는 바와 같이 중도절단자료의 경우는 시료 수와 관계없이 MLE가 좋은 추정치를 보이지만 완전자료의 경우에는 시료 수에 따라 추정 방법이 달라질 수 있다.

<표 4> LSE와 MLE의 선택 가이드라인

시료 수	고장 자료의 형태	
	완전자료	중도절단자료
≤20	LSE	MLE
21~29	LSE와 MLE 비교 후 사용	MLE
≥30	MLE	MLE

5. 결 론

본 연구에서는 산업계에서 수명분포로서 일반적으로 사용되는 와이블 분포를 이용하여 완전데이터와 정지 중단데이터를 시료 수, 고장 수, 고장 비율의 여러 조합에 따라 LSE와 MLE 중 어떤 추정방법이 더 좋은지 비교해 보았다.

비교 결과, LSE와 MLE의 선택 가이드라인을 설정할 수 있었다.

1. 모든 시료 수에서 고장 자료의 형태가 중도절단자료라면 MLE를 사용한다.
2. 시료 수가 20개 이하이고 완전자료일 경우 LSE를 사용한다.
3. 시료 수가 20개 초과에서 30개 미만 사이이고 완전자료일 경우 LSE와 MLE를 비교하여 더 나은 추정치를 사용한다.
4. 시료 수가 30개 이상이고 완전자료일 경우에는 MLE를 사용한다.

본 연구에서 제시한 가이드라인을 사용하여 상황에 따라서 적절한 추정방법을 선택한다면 수명 추정의 정확도를 높일 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- [1] 이상용(2003), 「신뢰성공학」, 형설출판사.
- [2] Bugaighis, M. M. (1988), "Efficiencies of MLE and BLUE for Parameters of an Accelerated Life-Test Model", *IEEE transactions on reliability*, Vol. 37, No. 2, pp. 230-233.
- [3] Dods, B. (1994), *Weibull analysis*, American Society for Quality Press, Milwaukee, Wisconsin.
- [4] Genschel, U. and Meeker, W. Q.(2009-06), "A Comparison of Maximum Likelihood and Median Rank Regression for Weibull Estimation", Iowa State University.
- [5] Gibbons, D. and Vance C.(1981), "A simulation study of estimators for the 2-Parameter Weibull Distribution", *IEEE transactions on reliability*, Vol. R30, No. 1, pp. 61-66.
- [6] Hossain, A. and Howlader, H. A. (1996), "Unweighted least squares estimation of Weibull parameters", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 54, pp.265-271.

- [7] Hossain, A. and Zimmerb, W. (2002), "Comparison of estimation methods for Weibull parameters: Complete and censored samples", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 73, pp.145-153.
- [8] Law, Averill M. and David Kelton, W.(1982), *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- [9] Lawless, J.F(1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Wiley, New York.
- [10] http://www.minitab.co.kr/minitab/member/mtbqna_view.asp?board=All&number=5165&page=1&abspos=1

2010년 6월 23일 접수, 2010년 8월 14일 1차 수정, 2010년 9월 10일 2차 수정,
2010년 11월 12일 3차 수정, 2010년 11월 24일 채택