

6자유도를 갖는 병렬형 기구의 병진속도와 회전속도 성능 지표에 관한 연구

김찬수*

호남대학교 게임애니메이션학과*

cskim@honam.ac.kr

A Study on Translational and Rotational Velocity Performance Indices of Six-Degree-of-Freedom Parallel Mechanism

Chan-Soo Kim*

Dept. of Game & Animation, Honam University*

요 약

본 논문에서는 6자유도를 갖는 병렬형 기구의 출력 속도 공간에서 성능을 평가할 수 있는 지표를 제안하였다. Manipulability와 condition number에 기반을 둔 성능 지표가 단위계의 불일치로 인한 물리적 의미의 결함이 없도록 출력공간을 병진속도 공간과 회전속도 공간으로 분리하는 방법을 제안하였다. 각 공간에서 단위 입력에 대응하는 mobility ellipsoid를 정의하여 이를 기반으로 병진운동 출력공간에서 두 종류 성능 지표와 회전운동 공간에서 두 종류의 성능 지표를 제안하였다.

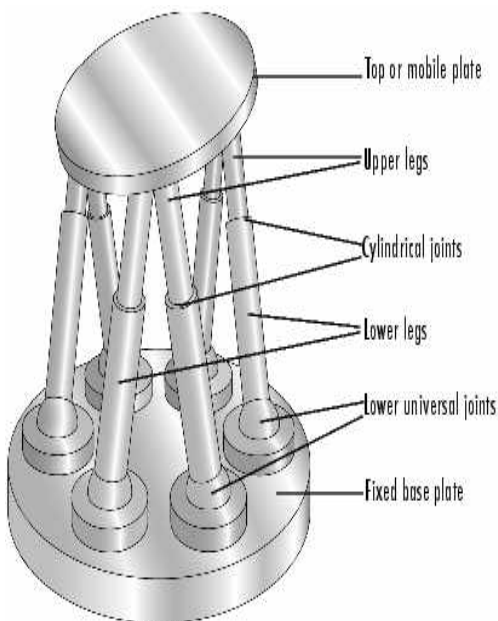
ABSTRACT

In this paper, mobility performance indices are proposed which may be used to estimate characteristics of output velocity space in six-degree-of-freedom parallel mechanism. In order for manipulability and condition number to not suffer from lack of the physical meaning due to dimensional inhomogeneity, output space is partitioned into translational velocity space and rotational velocity space, respectively. In each space, mobility ellipsoids corresponding to unit input space are defined and two types of mobility performance in translational velocity spaces indices are derived. Two types of mobility performance in rotational velocity spaces indices are derived

Keywords : mobility performance index(운동 성능 지표), manipulability, condition, number, parallel mechanism(병렬 구조 기구), mobility ellipsoid

1. 서 론

6자유도를 갖는 병렬형 구조의 기구는 모의비행 시험기나 입체가상체험 게임기에서 움직임을 주기 위하여 사용될 수 있다. 가장 잘 알려진 병렬형 구조의 기구는 Stewart platform[1]으로 [그림 1]에서 보는바와 같이 고정된 판위에 6개의 universal-cylindrical-universal joint로 구성된 다리를 움직이는 판위에 연결하는 구조로 되어 있으며, cylindrical joint가 기구를 움직이기 위한 actuator로 사용된다.



[그림 1] Stewart Platform의 구조

직렬형 구조를 갖는 기구가 일반적으로 산업현장에서 용접이나 조립용 로봇으로 많이 사용되는 것과 대조적으로 병렬형의 기구가 모의체험기나 입체가상 체험 게임기에서 사용된다. 직렬형 구조의 기구는 상대적으로 빠른 운동 특성을 가지고 있는 반면, 병렬형 구조의 기구는 직렬형 기구에 비하여 큰 하중을 견딜 수 있기 때문이다.

6개의 다리를 배치하는 방식에 따라 이 기구는

서로 다른 운동 성능을 보이게 될 것이다. [그림 2]는 두 개의 다리를 짝을 지어 결합하여 제작한 모습을 보여준다.



[그림 2] Stewart Platform

각기 다른 모양으로 제작된 병렬형 기구가 갖는 운동 특성을 구별하기 위하여, 또는 특정 운동 특성을 갖는 기구를 제작하기 위하여 운동 성능 지표를 정의할 필요가 있다. 기구가 갖는 운동특성에 관한 연구는 많은 연구자들에 의하여 연구되었다.

Manipulability[2], condition number[3], minimum singular value[4] 등이 기구의 운동 특성을 나타내는 지표로 제안되었다. 이러한 지표는 3자유를 갖는 wrist-joint 구조의 기구[5], planar finger 기구[6], 3 자유도 평면 병렬형 기구[7], 구관절 3자유도 병렬형 기구[8]의 설계를 최적화하기 위하여 사용되었다.

본 논문에서는 기존의 제안된 운동 성능 지표를 6자유도 병렬형 기구에 적용할 경우 발생하는 문제점을 지적하고, 이를 해결하는 방법을 제안한다. 2장에서는 기존에 제안되었던 Manipulability [2], condition number[3], minimum singular value[4] 운동 성능 지표를 병렬형 구조를 갖는 기구에 적용될 수 있도록 유도하고, 각 성능 지표가 의미하는 물리적 의미를 해석하고, 6자유도를 갖는 기구에 단순 적용할 경우 발생하는 문제점을 기술하였다. 3장에서는 출력공간을 병진 운동 공간과 회전 운동 공간으로 분리할 수 있는 방법을 유도하여

제시하였다. 병진 운동 공간과 회전 운동 공간 공간에서 각각 적용할 수 있는 mobility ellipsoid를 유도하였고, 이를 기반으로 각각의 출력 공간에 적용할 수 있는 운동 성능 지표를 추출하였다.

2. 운동성능 지표

2.1 입력속도공간과 출력속도공간의 norm 관계

n 자유도를 갖는 병렬형 기구의 입력 변수가 $l=(l_1, \dots, l_n)$, 출력 변수 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 이고 입력과 출력이 함수 $l = g(x)$ 로 주어졌을 때, 입력속도와 출력 속도의 관계는 아래와 같이 Jacobian으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{l} = J\dot{x} \quad (\text{식 1})$$

Jacobian $J = \frac{\partial g}{\partial x}$, $J \in R^{n \times n}$ 는 출력 속도를 입력 속도로 변환한다.

단위 입력속도 $\|\dot{l}\| = 1$ 이 주어졌을 때, 출력속도의 크기 함수 $h = x^T \dot{x}$ 에 대한 특성은 Lagrange multiplier λ 를 도입하여 다음 함수 H의 극한 값을 구하여 살펴볼 수 있다.

$$H = x^T \dot{x} - \lambda^2 (x^T J^T J x - 1) \quad (\text{식 2})$$

$\partial H / \partial \dot{x} = 0$ 을 이용하면, 함수 H가 극한 값을 갖는 필요조건은 다음 식과 같다.

$$\lambda^2 J^T J \dot{x} = \dot{x} \quad (\text{식 3})$$

위의 (식 3)은 출력속도의 크기 함수 h는 \dot{x} 가 행렬 $J^T J$ 의 eigenvector일 때 극한값을 갖는 것을 의미하므로 (식 3)을 $h = x^T \dot{x}$ 에 대입하여, h는 극한값을 (식 4)와 같이 갖는다.

$$h = \lambda^2 x^T J^T J x = \lambda^2 \quad (\text{식 4})$$

σ^2 를 행렬 $J^T J$ 의 eigenvalue라 하면, $J^T J \dot{x} = \sigma^2 \dot{x}$ 이고 (식 3)으로부터 $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ 이므로 극한값은 다음 식으로 주어진다.

$$h = \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{식 5})$$

행렬 $J^T J$ 의 eigenvalue의 최소값과 최대값은 출력 속도의 크기의 상한 값과 하한 값을 나타내므로

$$\frac{\|\dot{l}\|}{\sigma_1} \leq \|\dot{x}\| \leq \frac{\|\dot{l}\|}{\sigma_n} \quad (\text{식 6})$$

$$\frac{1}{\sigma_1} \leq \frac{\|\dot{x}\|}{\|\dot{l}\|} \leq \frac{1}{\sigma_n} \quad (\text{식 7})$$

여기서 σ_1^2 는 $J^T J$ 의 maximum eigenvalue를 σ_n^2 은 minimum eigenvalue를 나타낸다.

$J^T J$ 의 eigenvalue의 제곱근은 J의 singular value와 같기 때문에, $J^T J$ 의 eigenvalue는 J의 SVD(singular value decomposition)을 이용하여 구할 수 있다[3]. SVD 기법을 사용하여 Jacobian J는 $J = U \Sigma V^T$ 로 분해될 수 있다. 여기서 $U \in R^{m \times m}$ and $V \in R^{n \times n}$ 는 직교행렬이고, $\Sigma = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{m \times n}$ 이며 $S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ 이고 $0 \leq \sigma_n \leq \dots \leq \sigma_1$. σ_i 는 singular value라 한다. U와 V는 각각 left inverse와 right inverse라 하며, U와 V의 column 벡터는 극한값에서의 입력과 출력 속도의 방향을 의미한다.

2.2 Manipulability와 Condition Number의 운동 성능 지표로서의 의미

Klein and Blaho[4]는 최소 고유값이 기구의 singular 위치에서 다른 고유값에 비하여 빠르게 변하는 특성에 근거하여, 기구의 운동 성능지표로 최소 고유값을 사용할 것을 제안하였다. 최대 고유값과 최소 고유값은 (식 6)과 (식 7)에서 보는 바와 같이 입력 속도와 출력 속도의 비율에 대한 범위를 결정한다. 최대 고유값이 크다면 상대적으로 적은 출력속도가 발생함을 의미할 수 있으며, 최소 고유값이 적다면 상대적으로 큰 출력속도가 발생함을 의미한다. 극단적으로 $\sigma_n = 0$ 이 되면 출력 속도

의 크기는 무한대 값을 갖게 되며, 이는 기구가 singular configuration에 있게 됨을 의미한다. 이때 기구는 σ_n 에 대응하는 eigenvector 방향으로 자유도가 추가됨을 의미한다. 그러므로 최소 고유값은 기구가 singular configuration에 가까운 정도를 나타내는 값으로 생각할 수 있다.

Yoshikawa[2]는 고유값의 곱을 manipulability로 정의하고 직렬 기구가 위치와 방향을 변화시키는 능력을 나타내는 지표로 해석하였다. manipulability는 $D = \sigma_1 \dots \sigma_n$ 로 나타낼 수 있는데, Jacobian이 정방행렬인 경우 manipulability는 행렬의 행렬식 값과 같다.

$x^T J^T J x = 1$ 을 만족하는 n차원 공간의 ellipsoid의 표면은 단위입력 속도에 대한 출력 속도의 mapping 공간을 정의하며 mobility ellipsoid라 부른다[5]. ellipsoid의 주축 방향은 jacobian J의 right inverse의 column vector이며 주축의 크기는 J의 singular value의 역수의 크기를 갖는다. Yoshikawa[2]는 manipulability는 mobility ellipsoid의 부피에 대한 index임을 보였다. 임의의 단위 입력에 대한 출력 공간의 크기를 나타내는 지표가 될 수 있다. 그러므로 manipulability가 크다면 상대적으로 큰 출력 속도를 발생시키는 것으로 평가할 수 있다.

Jacobian 행렬이 가역하지 않을 때 행렬의 행렬식은 0 값을 갖는다. 그러나 행렬식 값이 작은 것, manipulability $D = \sigma_1 \dots \sigma_n$ 가 작은 값을 갖는 것이 기구가 near-singular 위치에 있는 것을 반드시 의미하지는 않는다. 작은 manipulability 값은 단지 행렬에 의한 변환의 크기가 작은 것을 의미한다. 그러므로 manipulability 값으로 near-singular 위치에 대한 판정 기준으로 사용할 수는 없다.

행렬의 condition number는 최대 고유값과 최소 고유값의 비율로 정의할 수 있는데 condition number는 행렬의 ill-condition을 판정하는 좋은 수단으로 제안되었다[3]. singular 행렬의 condition number는 무한대 값을 가지며,

condition number가 큰 값일 경우 행렬은 ill-condition하다고 할 수 있다. jacobian의 고유값으로 condition number를 정의하면

$$\text{cond}(J) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (\text{식 8})$$

(식 8)의 condition number는 mobility ellipsoid의 장축과 단축의 비율을 나타낸다. Condition number가 1일 때, 모든 방향의 입력에 대하여 출력의 크기는 동일한 크기를 가지며, 기구가 이러한 condition number를 가지고 있을 때, isotropic configuration을 갖는다고 한다[6]. isotropic configuration에 가까우면(condition number가 1에 가까우면), 모든 방향의 입력에 대하여 출력의 크기가 거의 균등하게 된다. Condition number 값이 커지면, 출력 공간도 균일성을 잃게 되며, condition number 값이 매우 클 때 기구는 near-singular 위치에 있다고 판정할 수 있다. 그러므로 condition number를 사용하여 출력 공간의 균일성과 near-singular 여부를 판정할 수 있다.

manipulability와 condition number가 출력 공간의 크기와 균일성을 판정하는 지표가 되지만, 출력공간의 3개의 위치 변위와 3개의 방향 변위로 구성되어 있으므로 이 지표를 단순히 Jacobian의 고유값에 적용하는 것은 물리적 의미가 분명하지 않게 되는 문제가 있다. 즉, 출력벡터의 크기 $\|x\|$ 는 서로 다른 단위로 구성된 벡터의 크기이므로, 출력 벡터의 크기 $\|x\|$ 가 물리적으로 의미하는 바가 분명하지 않게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여, 동일 단위를 갖는 공간에서 해석이 필요하다. 동일 단위를 갖는 즉 출력공간을 병진 속도와 회전 속도 공간으로 분리하여 다루는 기법이 필요하다.

3. 병진 및 회전 운동공간에서 성능 지표

3.1 병진속도와 회전속도 공간의 분리

병진속도 v 와 회전속도 w 공간으로 분리하기 위하여 Jacobian $J \in R^{6 \times 6}$ 을 분리하면

$$\dot{x} = (v, w), \quad J = [J_1, J_2] \quad (\text{식 9})$$

여기서 $v \in R^3$ 는 병진 속도이고 $w \in R^3$ 는 회전 속도이고 $J_1 \in R^{6 \times 3}$, $J_2 \in R^{6 \times 3}$ 이다.

입력 속도와 출력 속도는

$$\dot{i} = [J_1, J_2] \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{식 10})$$

주어진 입력 속도에 대한 병진속도 및 회전속도는 jacobian의 역행렬을 이용하여

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = J^{-1} \dot{i} \quad (\text{식 11})$$

로 쓸 수 있는데 역행렬 J^{-1} 을 구하여야 한다. 행렬 $J^T J$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J^T J = \begin{bmatrix} J_1^T J_1 & J_1^T J_2 \\ J_2^T J_1 & J_2^T J_2 \end{bmatrix} \quad (\text{식 12})$$

행렬 $J^T J$ 의 역행렬은 잘 알려진 역행렬공식을 사용하여 다음과 같이 유도할 수 있다 $(J^T J)^{-1} = \begin{bmatrix} N_v^{-1} & -N_v^{-1} J_1^T J_2 (J_2^T J_2)^{-1} \\ -N_w^{-1} J_2^T J_1 (J_1^T J_1)^{-1} & -N_w^{-1} \end{bmatrix}$ (식 13)

(식 13)에서 $N_v = J_1^T P_2^\perp J_1$, $N_w = J_2^T P_1^\perp J_2$ 이고 P_1^\perp and P_2^\perp 는 각각 J_1 와 J_2 의 영공간으로의 projection 행렬이다. $P_1^\perp = I - J_1 (J_1^T J_1)^{-1} J_1^T$, $P_2^\perp = I - J_2 (J_2^T J_2)^{-1} J_2^T$ 이다.

이제 J 의 역행렬은 $J^{-1} = (J^T J)^{-1} J^T$ 이므로 (식 13)에 J^T 를 곱하여 Jacobian $J = [J_1, J_2]$ 의 역행렬을 구하면

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}, \quad Q_1^T \in R^{3 \times 6}, \quad Q_2^T \in R^{3 \times 6} \quad (\text{식 14})$$

여기서

$$Q_1^T = N_v^{-1} J_1^T P_2^\perp, \quad \epsilon \in R^{3 \times 6}$$

$$Q_2^T = N_w^{-1} J_2^T P_1^\perp, \quad \epsilon \in R^{3 \times 6}$$

이제 (식 11)과 (식 14)를 이용하여 입력속도 공

간에 대한 출력공간을 동일 단위를 갖는 병진속도 공간과 회전속도공간으로 사상하는 변환식을 얻을 수 있다.

$$v = Q_1^T \dot{i}, \quad w = Q_2^T \dot{i} \quad (\text{식 15})$$

3.2 병진 및 회전속도 공간에서 성능 지표 유도

단위 입력속도 공간을 $S_l = \{\dot{i} : \|\dot{i}\| = 1\}$ 로 정의할 때, J_2^T 와 J_1^T 의 영공간에 속하는 S_l 의 두 개의 부분 공간을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$S_{lv} = \{\dot{i} : \|\dot{i}\| = 1, w = 0, \dot{i} = J_1 v + J_2 w\} \quad (\text{식 16})$$

$$S_{lw} = \{\dot{i} : \|\dot{i}\| = 1, v = 0, \dot{i} = J_1 v + J_2 w\} \quad (\text{식 17})$$

(식 16)의 $\dot{i} \in S_{lv}$ 입력은 회전속도를 생성하지 않는 ($w = 0$) 입력이며, (식 17)의 $\dot{i} \in S_{lw}$ 입력은 병진속도를 생성하지 않는 입력임을 의미한다.

4개의 행렬 $J_1^T J_1, J_2^T J_2, N_v, N_w$ 에 대응하는 고유값 $\beta_i^2, \gamma_i^2, \sigma_i^2, \alpha_i^2, i = 1, 2, 3$ 을 이용하여 출력공간에서 다음과 같은 4개의 mobility ellipsoid를 정의할 수 있다.

$$O_{v\sigma} = \{v : \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 v_i^2 \leq 1\} \quad (\text{식 18})$$

$$O_{v\beta} = \{v : \sum_{i=1}^3 \beta_i^2 v_i^2 = 1\} \quad (\text{식 19})$$

$$O_{w\alpha} = \{w : \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 w_i^2 \leq 1\} \quad (\text{식 20})$$

$$O_{w\gamma} = \{w : \sum_{i=1}^3 \gamma_i^2 w_i^2 = 1\} \quad (\text{식 21})$$

$O_{v\sigma}$ 는 단위 입력 $\dot{i} \in S_l$ 으로 실현할 수 있는 병진 운동 v 에 대한 mobility ellipsoid로, 주축의 크기는 행렬 N_v 의 고유값인 $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ 의 역수이다. $O_{v\beta}$ 는 회전속도를 발생시키지 않는 단위 입력 $\dot{i} \in S_{lv}$ 이 주어졌을 때 실현할 수 있는 병진 속도 v 에 대한 mobility ellipsoid로 주축의 크기는 행렬 $J_1^T J_1$ 의 고유값인 $\beta_i, i = 1, 2, 3$ 의 역수이다.

이를 간단히 표현하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$v \in O_{v\sigma} \text{ for all } \dot{l} \in S_l \quad (\text{식 22})$$

$$v \in O_{v\beta} \text{ for all } \dot{l} \in S_{lv}. \quad (\text{식 23})$$

회전 운동 공간에 대하여 마찬가지로 $O_{v\alpha}$ 는 단위 입력 $\dot{l} \in S_l$ 으로 실현할 수 있는 회전 운동 w 에 대한 mobility ellipsoid로, 주축의 크기는 행렬 N_w 의 고유값인 $\alpha_i, i=1,2,3$ 의 역수이다. $O_{v\gamma}$ 는 병진속도를 발생시키지 않는 단위 입력 $\dot{l} \in S_{lw}$ 이 주어졌을 때 실현할 수 있는 병진 속도 w 에 대한 mobility ellipsoid로 주축의 크기는 $\gamma_i, i=1,2,3$ 의 역수이다. 이를 간단히 표현하면 아래와 같이 표현할 수 있다

$$w \in O_{w\alpha} \text{ for all } \dot{l} \in S_l \quad (\text{식 24})$$

$$w \in O_{w\gamma} \text{ for all } \dot{l} \in S_{lw} \quad (\text{식 25})$$

(식 22)는 다음과 같이 증명할 수 있다.

Singular value decomposition을 사용하여, Q_1^T 를 분해하면

$$Q_1^T = V[AO]U^T \quad (\text{식 26})$$

여기서 V 와 U 는 각각 3×3 과 6×6 직교행렬이고, $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. O 는 3×3 영행렬이다. 위의 식을 (식 15)에 적용하면

$$v = V[AO]U^T \dot{l}, \quad (\text{식 27})$$

위의 식에 $A^{-1}V^T$ 를 곱하면

$$A^{-1}V^T v = U_1^T \dot{l} \quad (\text{식 28})$$

여기서 U_1 은 행렬 U 의 첫 3개 column으로 구성된 6×3 부분행렬이다.

$$v^T V A^{-2} V^T v = \dot{l}^T U_1 U_1^T \dot{l} \leq \dot{l}^T \dot{l} = 1 \quad (\text{식 29})$$

$v = V\bar{v}$ 를 사용하여 기저변환을 수행하면

$$\bar{v}^T A^{-2} \bar{v} = \frac{\bar{v}_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\bar{v}_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\bar{v}_3^2}{\lambda_3^2} \leq 1. \quad (\text{식 30})$$

The singular values Q_1^T 의 singular value는

$Q_1^T Q_1$ 의 고유값의 제곱근과 같고,

$Q_1^T Q_1 = N_v^{-1}$ 이므로 $Q_1^T Q_1$ 의 고유값은 N_v 의 고유값의 역수이다. 즉, $\lambda_i = 1/\sigma_i$. (식 30)을 N_v 의

고유값 σ 를 사용하여 다시 쓰면 $\sigma_1^2 \bar{v}_1^2 + \sigma_2^2 \bar{v}_2^2 + \sigma_3^2 \bar{v}_3^2 \leq 1$. (식 31)

위의 식은 병진속도가 주축이 $1/\sigma_i$ 인 mobility ellipsoid에 의하여 bound되어 있음을 보여준다. 위 식의 등호는 \dot{l} 이 행렬 U 의 첫 3개의 column일 때, 즉 $Q_1 Q_1^T$ 의 0이 아닌 고유값에 대응하는 고유 벡터일 때 성립된다. Ellipsoid의 주축 방향은 행렬 V 의 column vector 즉 N_v 의 고유벡터에 대응된다.

(식 23)은 다음과 같이 쉽게 증명할 수 있다. 회전 출력을 발생시키지 않는 ($w = 0$ 으로 하는) 단위 입력 $\dot{l} \in S_{lv}$ 이 주어졌을 때 $\dot{l} = J_1 v$ 이 성립한다.

그러므로 $v^T J_1^T J_1 v = \dot{l}^T \dot{l} = 1$ 이고, $J_1^T J_1$ 는 symmetric positive definite matrix이므로 유사변환을 사용하여 항상 대각행렬화 할 수 있다. 유사변환으로 행렬을 대각화하면 대각성분은 행렬의 고유값 $\beta_i, i=1,2,3$ 을 갖게 된다. 그러므로

$$\beta_1^2 \bar{v}_1^2 + \beta_2^2 \bar{v}_2^2 + \beta_3^2 \bar{v}_3^2 = 1. \quad (\text{식 32})$$

유사한 방법을 사용하여 회전운동 공간에 대한 (식 24)와 (식 25)도 타당함을 보일 수 있다.

이제 병진 운동 출력 공간의 특성을 보여주는 2개의 mobility ellipsoid를 정의하였으므로, 병진 운동 출력 공간에서 성능 지표는 다음 [표 1]과 같이 정리할 수 있다.

[표 1] 병진운동 출력에 대한 성능 지표

입력공간	manipulability	condition number
S_l	$D_\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	$C_\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$
S_{lv}	$D_\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3$	$C_\beta = \frac{\beta_1}{\beta_3}$

또한 회전 운동 출력 공간의 특성을 보여주는 2개의 mobility ellipsoid를 정의하였으므로, 병진 운동 출력 공간에서 성능 지표는 다음 [표 2]와 같이 정리할 수 있다.

[표 2] 회전운동 출력에 대한 성능 지표

입력공간	manipulability	condition number
S_l	$D_\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	$C_\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$
S_{lv}	$D_\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$	$C_\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_3}$

단위 입력 $\dot{l} \in S_l$ 에 대한 출력 속도가 극한값 $\|v\| = 1/\sigma_i$ 을 가질 때, 회전운동 w 는 0이 아님을 주목할 필요가 있다. 이때 수반되는 회전운동의 값을 유도하면, v 가 극한값일 때 입력 \dot{l} 는 행렬 $Q_1 Q_1^T$ 의 고유벡터이므로

$$Q_1 Q_1^T \dot{l} = \frac{1}{\sigma_i^2} \dot{l}, i = 1, 2, 3. \quad (식 33)$$

위 식의 양변에 Q_2^T 를 곱하면

$$Q_2^T Q_1 Q_1^T \dot{l} = \frac{1}{\sigma_i^2} Q_2^T \dot{l} \quad (식 34)$$

(식 15)를 사용하여 정리하면,

$$Q_2^T Q_1 v = \frac{1}{\sigma_i^2} w \quad (식 35)$$

$Q_2^T Q_1 = -(J_2^T J_2)^{-1} J_2^T J_1 N_v^{-1}$ 이므로

$$-(J_2^T J_2)^{-1} J_2^T J_1 N_v^{-1} v \sigma_i^2 = w \quad (식 36)$$

$N_v^{-1} v \sigma_i^2 = v$ 이므로 병진출력 v 가 극한값을 가질 때 수반되는 회전 운동 w 값을 구할 수 있다.

$$w = -(J_2^T J_2)^{-1} J_2^T J_1 v \quad (식 37)$$

동일한 방법을 사용하여 회전운동 w 가 극한값을 가질 때 수반되는 병진운동 v 는

$$v = -(J_1^T J_1)^{-1} J_1^T J_2 w \quad (식 38)$$

3.3 Stewart Platform의 Jacobian

Stewart platform은 고정된 판위에 6개의 universal-cylindrical-universal joint로 구성된 다리를 움직이는 판위에 연결하는 구조로 되어있다.

고정된 아래 판에 각각의 조인트 위치는 $B_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 로 움직이는 상판 조인트 위치는 $P_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 로 표기한다 ([그림 3] 참조). 상판에 고정된 좌표계에서 조인트의 위치 벡터는 $p_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 로 아래 판에 설정된 좌표계로부터 상판 고정좌표계의 원점은 벡터 o 로 벡터 좌표 변환 행렬은 R 로 표기한다. 아래 판 고정 좌표계에서 상판의 조인트 위치 $P_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 는

$$P_i = R p_i + o \quad (식 39)$$

점 B_i 에서 점 P_i 를 연결하는 선 $P_i B_i$ 는 stewart platform의 각각의 다리 벡터 l_i 를 정의한다.

$$l_i = P_i - B_i = R p_i + o - B_i \quad (식 40)$$

각각의 다리 길이 l_i 는

$$l_i^2 = l_i \cdot l_i \quad (식 41)$$

위의 식을 미분하면 각각의 다리의 길이 변화 속도 \dot{l}_i 를 구할 수 있다.

$$\dot{l}_i = \frac{l_i \cdot \dot{l}_i}{\|l_i\|}, i = 1, 2, \dots, 6 \quad (식 42)$$

식(40)을 미분하면 각각의 다리의 속도 벡터를 구할 수 있다.

$$\dot{l}_i = v + \omega \times p_i \quad (식 43)$$

여기서 $v = \dot{o}$ 상판 원점의 속도이고, ω 는 상판의

회전 각속도이고 $p_i = R p'_i$ 이다.

다리 방향의 단위벡터를 $e_i = \frac{l_i}{\|l_i\|}$ 로

표기하면 (식 42)는 $\dot{l}_i = e_i \cdot \dot{l}_i$ 이 되고 여기에 (식 43)을 대입하면

$$\dot{l}_i = e_i \cdot v + P_i \times e_i \cdot \omega \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{식 44})$$

위의 식은 상판의 속도 $\dot{x} = [v^T, \omega^T]^T$ 와 다리의 속도 $\dot{l} = [l_1, \dots, l_6]^T$ 를 변환하는 선형방정식이 되며

$$\dot{l} = J \dot{x} \quad (\text{식 45})$$

여기서 J 는 Jacobian 행렬로 다음과 같다.

$$J = \begin{bmatrix} e_1^T (p_1 \times e_1)^T \\ \vdots \\ e_6^T (p_6 \times e_6)^T \end{bmatrix} \quad (\text{식 46})$$

이제 Jacobian J 를 부분행렬로 나타내면

$$J_1 = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_6^T \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} (p_1 \times e_1)^T \\ \vdots \\ (p_6 \times e_6)^T \end{bmatrix} \quad (\text{식 47})$$

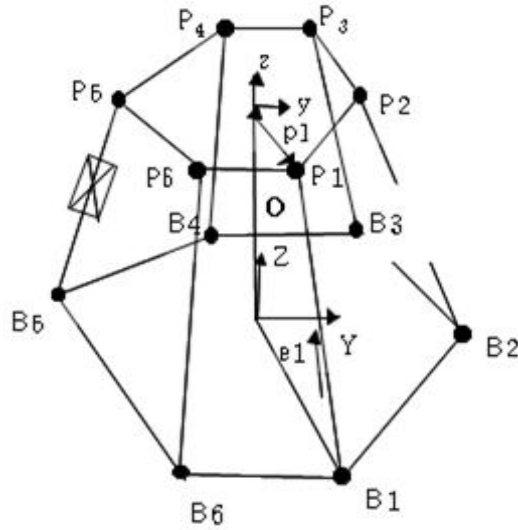
$J_1^T J_1, J_2^T J_2, J_1^T J_2$ 를 e_i 와 p_i 로 나타내면

$$J_1^T J_1 = \sum_{i=1}^6 e_i e_i^T \quad (\text{식 48})$$

$$J_2^T J_2 = \sum_{i=1}^6 (p_i \times e_i)(p_i \times e_i)^T \quad (\text{식 49})$$

$$J_1^T J_2 = \sum_{i=1}^6 e_i (p_i \times e_i)^T \quad (\text{식 50})$$

이제 (식 48), (식 49), (식 50)의 표현을 사용하여 $J_1^T J_1, J_2^T J_2, N_v, N_w$ 를 구할 수 있고 대응하는 고유값 $\beta_i^2, \gamma_i^2, \sigma_i^2, \alpha_i^2, i = 1, 2, 3$ 을 구할 수 있다.



[그림 3] Stewart Platform의 좌표계

4. 결 론

기구의 운동 성능 지표로 기존에 제안된 manipulability와 condition number가 갖는 물리적 의미를 해석하였고, 이 성능 지표를 6자유도를 갖는 병렬형 기구에 적용할 경우 출력공간의 3개의 위치 변위와 3개의 방향 변위로 구성되어 있으므로 이 지표를 단순히 Jacobian의 고유값에 적용하는 것은 물리적 의미가 분명하지 않게 되는 문제가 있음을 보였다. 동일 단위를 갖는 공간에서 운동 성능 지표를 추출하기 위하여 출력 공간을 병진 속도와 회전 속도 공간으로 분리하는 방법을 제시하였다((식 15) 참조). 또한, 병진 출력 공간에서 단위 입력에 대응하는 mobility ellipsoid와 ((식 22) 참조) 회전운동을 수반하지 않는 입력에 대응하는 mobility ellipsoid를 ((식 23) 참조) 유도하였고 이를 기반으로 병진 운동 출력 성능 지표를 ([표 1] 참조) 정의하였다.

유사한 방법으로 회전 출력 공간에서 단위 입력에 대응하는 mobility ellipsoid와 ((식 24) 참조) 회전운동을 수반하지 않는 입력에 대응하는 mobility ellipsoid를 ((식 25) 참조) 유도하였고 이

를 기반으로 회전 운동 출력 성능 지표를 ([표 2] 참조) 정의하였다.

제안된 성능 지표를 사용하여 서로 다른 구조를 갖는 6자유도 병렬형 기구의 특성을 구별하고, 이러한 기구를 설계할 때 설계의 평가 수단으로 활용할 수 있다.

참고문헌

- [1] D. Stewart, "A Platform with six degrees of freedom", Proc. of the Institution of Mechanical Engineerings, pp 371-386, London, England, 1965
- [2] Tsuneo Yoshikwa, "Manipulability of robotic mechanism", The International Journal of Robotics Research, 4(2), 1985
- [3] V. C. Klema and A. J. Laub, "The singular value decomposition: Its computation and some applications", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 25(2), pp. 164-176, 1980,
- [4] C. A. Klein and B. E. Blaho, "Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators", The International Journal of Robotics Research, 6(2), 1987.
- [5] H. Asada and J. A. C. Granlto, "Kinematic and static characterization of wrist joints and their optimal design", Proc. Of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 244-250, 1985.
- [6] J. Kenneth Salisbury and John J. Craig "Articulated hands: Force control and kinematic issues", The International Journal of Robotics Research, 1(1), 1982
- [7] C. Gosselin and J. Angeles, "The optimum kinematic design of a planar three degree-of-freedom parallel manipulator", Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 110, June 1988.
- [8] C. Gosselin and J. Angeles, "The optimum kinematic design of a spherical three degree-of-freedom parallel manipulator", Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 111, June 1989.



김 찬 수 (Kim, Chan Soo)

1982 한양대학교 정밀기계공학과 학사
1990 Louisiana State University, ME
1993 Louisiana State University, Ph. D.
1993-1995 고등기술연구원 선임연구원
1995-2010 호남대 게임애니메이션학과 교수

관심분야 : 게임 프로그래밍, 게임 물리, 물리시뮬레이션