망소특성에서 잡음인자의 수준결정에 관한 소고

윤원영*†·서순근**

* 부산대학교 산업공학과
** 동아대학교 산업경영공학과

A Note on Determining the Level of Noise Factor for Smaller-the- Better Characteristics

Won Young Yun*†·Sun-Keun Seo**

* Department of Industrial Engineering, Pusan National University
** Department of Industrial and Management Systems Engineering, Dong-A University

Key Words : Taguchi method, smaller-the-better, noise factor, mean square error

Abstract

In this note, we deal with a design problem for determining the levels of noise factors in the Taguchi method. Recently, Ree(2009) proposed a new method to determine the levels of noise factors that is dependent on the distribution of the noise factors. We discuss the original suggestion from Taguchi method, propose a way to compare the two methods and investigate the performance(mean square error) of two proposals by examples.

1. 서 론

이상복(2009)은 현장에서 제품이나 공정의 최적조건을 구하는 방법론인 다구찌(Taguchi) 방법에서 특히 파라메터 설계를 실시할 때 외측배열에 두는 잡음인자의 실험수준을 어떻게 정할 것인가 하는 문제를 다루었다. 그리고 논문에서 다구찌가 제안한 방법으로 “잡음인자 수준을 가능하면 많이 선정하여 실험하면 좋지만, 실험이 어려우면 잡음인자의 최대치와 최소치(혹은 좋은조건, 나쁜조건) 2가지 수준에서 실험하라고 제안하였다”고 언급하고 있다.

그리고 이상복(2009)에는 잡음인자의 수준결정을 제안하고 있는데 잡음인자가 실제 현장에서 어떻게 산포하는가에 따라 6가지를 분류하고 각각에 대해 수준결정 방법을 제안하고 있다[이상복(2009)의 표 1참고]. 저자가 제안하는 방법은 기본적으로 잡음인자의 대표값(주로 평균, 혹은 자주 발생하는 최빈값)을 수준으로 정하여 실험하면 된다고 설명하고 있다. 그러나 기본적으로 다구찌방법의 원리는 잡음인자에 둔감한 설계변수의 조건(Robust design)을 찾고자하는 것을 목적으로 한다. 그러므로 잡음인자 실험조건을 정하는 경우에도 잡음인자의 전체범위에 대해 안정된 성능, 즉 SN비를 정확하게 추정 가능하도록 실험조건을 정하여야 할 것이다.

본 소고는 잡음인자의 실험조건을 정하는 문제에 대한 다구찌가 제안하는 내용을 인용하고 예제를 통해 두 방법의 차이를 보이고자 한다.

다구찌는 잡음인자가 현장에서 평균(m)과 분산(s^2)을 가지고 나타나는 경우 잡음인자의 성능인자에의 영향이 1차관계인가, 2차관계인가에 따라 다음과 같이 추천한 것으로 알려져 있다.(Kackar(1988)와 Taguchi (1987) 참고)

1차관계인 경우 : $(m-s),(m+s)$ 으로 두 수준
2차관계인 경우:
$(m-\sqrt{\frac{3}{2}}s),(m),(m+\sqrt{\frac{3}{2}}s)$으로 세 수준

---

† 교신저자 wonyun@pusan.ac.kr

※ 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음

여기서는 기본적으로 잡음인자의 분포가 대칭적임(symmetric distribution)을 가정하는 것으로 되어 있다.

그러므로 다구찌는 잡음인자의 수준결정은 잡음인자의 분포형태 및 모수값과 잡음인자와 성능변수간의 관계에 근거하여 수준을 정하여야 하는 것으로 되어 있다.

2. 잡음인자 수준결정문제

다구찌방법에서 잡음인자의 수준결정문제는 기본적으로 다음과 같은 다양한 요소들을 고려하여야 한다. 먼저 최적조건의 형태(망대, 망소, 망목, 동적특성 등)가 어떠한가에 따라 최적화의 목적함수가 달라지므로 이것을 고려하여야 한다. 그리고 성능변수와 잡음인자간의 함수형태도 고려하여야 한다. 잡음인자가 다수일 때 잡음인자들간의 상호관계도 고려되어야 한다. 마지막으로 잡음인자가 현장에서 어떻게 분포하는가 즉 잡음인자의 분포도 고려되어야 할 것이다.

지금부터 예제를 통해 잡음인자 수준결정 문제를 보다 구체적으로 언급하고자 한다. 그리고 이의 결정방법으로는 이상복(2009)에서 제안된 것과 다구찌가 제안한 것을 비교하고자 한다.

고려되는 성능변수 Y는 망소특성이라고 가정한다. [망소특성이 가장 모형이 간단하므로 가정함] 잡음인자와의 관계로서 두 가지를 모형을 고려하고자 한다.

1차 모형의 경우

먼저 1차 모형(즉, 잡음인자와 성능변수간에는 1차적인 관계가 있음)

$$Y = \alpha + \beta X + \epsilon$$

여기서 X 는 잡음인자(random factor 로서 고려됨)이며 평균과 분산이 m, s^2 인 정규분포을 따른다고 하자. 그리고 ϵ 는 다른 잡음인자들의 영향을 고려한 확률변수로서 X 와는 독립이고 평균은 0이고 분산은 σ^2 인 정규분포를 따른다고 한다. 그러면 망소특성의 경우 EY^2 를 최소로 하는 조건을 찾고자 하므로 이를 정확하게 추정하여야 한다. 여기서

$$EY^2 = (\alpha+\beta m)^2 + \beta^2 s^2 + \sigma^2 \quad (1)$$

이다.

이를 추정하기 위해 2개의 수준에서 실험을 한다고 하면 먼저 이상복(2009)에서 제안된 방법을 사용한다면 최빈값인 평균에서 2번 실험하면 될 것이다. 그러므로 모형

$$Y_1 = \alpha + \beta m + \epsilon$$

에서의 두 개의 샘플을 Y_{11}, Y_{12}라고 하면 이 샘플로부터의 SN 비 통계량은

$\dfrac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2}{2}$ 이며 그리고

$$E[\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2}{2}] = (\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2$$

로서 불편추정량이 아니다. 여기서 앞으로의 계산에서 사용을 위해 X 가 평균과 분산이 m, s^2 인 정규분포를 따르면

$$EX^3 = m^3 + 3ms^2$$
$$EX^4 = m^4 + 3s^2(2m^2 + s^2)$$
$$Var[X^2] = 2s^2(2m^2 + s^2) \quad (2)$$

이다. 이를 이용하면 위의 통계량의 분산을 구하면

$$Var[\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2}{2}] = \frac{1}{4}[Var\, Y_{11}^2 + Var\, Y_{11}^2]$$
$$= \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2) \quad (3)$$

이다.

다구찌가 제안한 방법으로는

$$Y_{21} = \alpha + \beta(m - s) + \epsilon$$
$$Y_{22} = \alpha + \beta(m + s) + \epsilon$$

이며

$$E[\frac{Y_{21}^2 + Y_{22}^2}{2}] = (\alpha+\beta m)^2 + \beta^2 s^2 + \sigma^2$$

그러므로 기댓값이 식(1)과 같으므로 이 경우 불편추정량이다. 그리고 분산은

$$Var[\frac{Y_{21}^2 + Y_{22}^2}{2}] = \frac{1}{4}[Var\, Y_{21}^2 + Var\, Y_{22}^2]$$
$$= \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2 + 2\beta^2 s^2) \quad (4)$$

식(3)과 (4)로부터 두 방법의 Mean square error (MSE)를 구하여 보면 이상복(2009)모형의 경우

$$MSE_1 = \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2) + \beta^4 s^4$$

이고 다구찌방법의 경우 MSE는 불편추정량이므로 분산과 동일한

$$MSE_2 = \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2 + 2\beta^2 s^2)$$

이다. 두 MSE를 비교하면

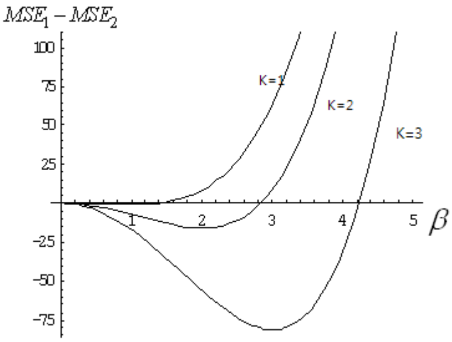
$$MSE_1 - MSE_2 = (\beta^2 s^2 - 2\sigma^2)\beta^2 s^2$$

이고 $\beta^2 s^2 < 2\sigma^2$ 인 경우 이상복(2009) 모형이 다구찌방법보다 MSE가 작게 된다. 이는 잡음인자의 효과가 작고 분산이 상대적으로 작은 경우에 해당한다.

예제 1. 1차 모형에서는 두 방법의 MSE 차이는 세 개의 매개변수, β, s, σ에 의해 결정된다. 여기서 순수오차와 잡음인자의 표준편차들의 관계를 $\sigma = ks$ (단, $k>0$)로 두면 두 방법의 MSE의 차는 다음과 같이 잡음인자의 분산의 함수형태로 나타낼 수 있다.

$$MSE_1 - MSE_2 = (\beta^2 - 2k^2)\beta^2 s^4$$

그러므로 β^2가 $2k^2$보다 클 경우(즉, $|\beta| > \sqrt{2}k$)에 α, m, s 에 관련 없이 방법2(다꾸지 방법에서 제안된 실험조건)가 방법 1보다 SN비를 정확히 추정하게 된다. s=1의 경우에 대한 β 에 대한 MSE의 차를 나타낸 것이 그림 1이다.



<그림 1> 1차 모형에서 $MSE_1 - MSE_2 (k=1,2,3)$

2차 모형의 경우

여기서는 잡음의 영향이 간단한 이차모형인 다음 경우에 대해 다루고자 한다.

$$Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \epsilon$$

그러면

$$EY = \alpha + \beta m + \gamma(m^2 + s^2)$$

$$Var\,Y = \beta^2 s^2 + 2s^2(2m^2+s^2)\gamma^2 + 4ms^2\beta\gamma + \sigma^2$$

$$EY^2 = \beta^2 s^2 + 2s^2(2m^2+s^2)\gamma^2 + 4ms^2\beta\gamma + \sigma^2 + [\alpha+\beta m+\gamma(m^2+s^2)]^2 \quad (5)$$

망소특성이므로 각 실험조건에서 EY^2를 추정하기 위해 3개의 수준에서 실험을 한다고 하자. 먼저 이상복(2009)에서 제안된 방법을 사용한다면

$$Y_1 = \alpha + \beta m + \gamma m^2 + \epsilon$$

이며 $Y_1 \sim N(\alpha+\beta m+\gamma m^2, \sigma^2)$ 이다. 이 분포에서 3개의 샘플을 구하는 것으로 통계량은

$$\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2 + Y_{13}^2}{3}$$

이며 이것은

$$E[\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2 + Y_{12}^2}{3}] = (\alpha+\beta m+\gamma m^2)^2 + \sigma^2$$

로서 식(5)와 비교하면 참값을 과소 추정하는 편의추정량이며 편의는

$$Bias_1 = -[2\alpha\gamma s^2 + \beta s^2(\beta + 6\gamma m) + \gamma^2 s^2(6m^2 + 3s^2)]$$

그리고 추정량의 분산은 식(2)로부터

$$Var[\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2 + Y_{12}^2}{3}] = \frac{1}{3} Var\,Y_{11}^2$$

$$= \frac{2}{3}\sigma^2[2(\alpha+\beta m+\gamma m^2)^2 + \sigma^2]$$

로 주어진다.

다구찌가 제안한 방법으로는

$$Y_{21} = \alpha + \beta(m - \sqrt{\frac{3}{2}}s) + \gamma(m - \sqrt{\frac{3}{2}}s)^2 + \epsilon,$$

$$Y_{22} = \alpha + \beta m + \gamma m^2 + \epsilon$$

$$Y_{23} = \alpha + \beta(m + \sqrt{\frac{3}{2}}s) + \gamma(m + \sqrt{\frac{3}{2}}s)^2 + \epsilon,$$

로서 추정량의 평균은

$$E[\frac{Y_{21}^2 + Y_{22}^2 + Y_{23}^2}{3}] = \alpha^2 + 2\alpha\beta m + (2\alpha\gamma + \beta^2)(m^2+s^2) + 2\beta\gamma(m^3 + 3ms^2) + \gamma^2(m^4 + 6m^2 s^2 + \frac{3}{2}s^4) + \sigma^2] \quad (6)$$

그리고 식(6)과 식(5)를 비교하면 이 추정량은 정확히 불편추정량은 아니지만 근사적으로 접근함을 알 수 있다. 즉 편의는

$$B_2 = -\frac{3}{2}\gamma^2 s^4$$

이다. 그리고 추정량의 분산은 다음과 같이 구해진다.

$$Var[\frac{Y_{21}^2 + Y_{22}^2 + Y_{23}^2}{3}] =$$
$$\frac{2}{3}\sigma^2[2\alpha^2 + 4\alpha\beta m + (4\alpha\gamma + 2\beta^2)(m^2+s^2)$$
$$+4\beta\gamma(m^3+3ms^2$$
$$+\gamma^2(2m^4+12m^2s^2+3s^4)+\sigma^2]$$

이다.

그리고 두 추정량의 MSE는 다음과 같다.

$$MSE_1 = \frac{2}{3}\sigma^2[2(\alpha+\beta m+\gamma m^2)^2+\sigma^2$$
$$+[2\alpha\gamma s^2 + \beta s^2(\beta+6\gamma m)+\gamma^2 s^2(6m^2+3s^2)]^2 \quad (7)$$

이고

$$MSE_2 = \frac{2}{3}\sigma^2[2\alpha^2+4\alpha\beta m+$$
$$(4\alpha\gamma+2\beta^2)(m^2+s^2)+4\beta\gamma(m^3+3ms^2)$$
$$+\gamma^2(2m^4+12m^2s^2+3s^4)+\sigma^2]$$
$$+\frac{9}{4}\gamma^4 s^8 \quad (8)$$

그러므로 식(7)과 (8)의 두 MSE를 비교하면 두 방법의 상대적인 정밀도를 파악할 수 있을 것이다. 기본적으로 MSE의 차이는 모형 매개변수, $\alpha,\beta,\gamma,m,s,\sigma$의 값에 영향을 받는다.

예제 2. 여기서 6개의 매개변수 모두에 대한 분석은 너무 복잡하므로 이 가운데 중요한 변수의 영향을 파악하고자 먼저 $\alpha=\beta=0, m=1$인 단순화한 경우(즉 2차 효과에 대한 계수와 잡음인자의 분포)를 고려하자. 먼저 $\sigma = k_1 s$ (단, $k_1 > 0$), $\gamma = k_2 s$ (k_2는 망소특성인 경우이므로 양수 값을 가진다고 볼 수 있음)로 두면 두 방법의 MSE의 차는 다음과 같이 잡음인자의 분산의 함수 형태로 나타낼 수 있다.

$$MSE_1 - MSE_2 =$$
$$\frac{k_2^2 s^6}{4}[9k_2^2 s^2(16+16s^2+3s^4)-8k_1^2(4+s^2)]$$

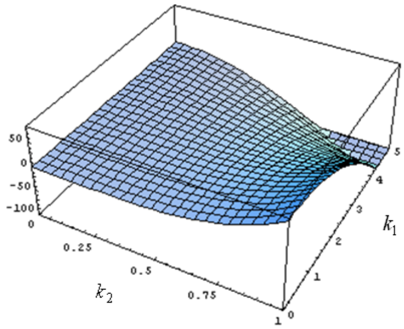
s값에 따라 MSE_2가 MSE_1보다 작게 되는 k_1와 k_2의 관계를 구한 것이 표 1에 정리되어 있다.

<표 1> 방법2의 MSE가 방법 1보다 작아지는 조건

s	조 건
0.1	$k_2^2 > 22.057k_1^2$
0.5	$k_2^2 > 0.74854k_1^2$
1	$k_2^2 > 0.12698k_1^2$
5	$k_2^2 > 0.01389k_1^2$
10	$k_2^2 > 0.00003k_1^2$

k_1과 k_2가 모두 양수라고 간주하면 <표 1>에서 s가 증가할수록 방법2(다꾸지 방법에서 제안된 실험조건)가 방법 1보다 SN비를 정확히 추정하게 되는 k_1와 k_2의 관계에 따른 영역이 넓어진다.

그리고 α와 m(망소특성이므로 두 값도 양수로 간주함)을 증가시키면 이 현상이 더욱 뚜렷해진다. 그림 2는 s=1 경우 MSE의 차이를 보이고 있는 예이다.



<그림 2> 2차모형에서의 $MSE_1 - MSE_2$

3. 결론

본 논문에서는 다구찌 실험설계에서 잡음인자의 실험조건을 정하는 문제를 다루었다. 특히 이상복(2009)의 연구에서 제시된 최적실험조건의 결정방식은 모든 경우에 적용될 수 있는 것이 아니며 특히 현장에서의 잡음의 분산이 큰 경우는 다구찌방법에서 제안하는 경우보다 최적이라고 할 근거가 미약함을 몇 가지 예를 통해 언급하였다. 그러나 이 소고에서 다룬 모형은 망

소특성과 관련하여 간단한 모형의 경우이지만 잡음인자의 수준결정에서 유의하여야 할 내용을 언급한 것으로 판단된다. 현장에서 잡음인자의 실험조건을 결정하기 위해서는 다양한 측면에서의 최적결정방법에 대한 검토가 실험 전에 검토되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] Kackar, R.N.(1985), "Off-line quality control, parameter design, and the Taguchi method", *Journal of Quality Technology*, Vol. 17, pp.176-206.

[2] Taguchi, Genichi(1987), *System of experimental design Vol 1 and 2*, American Supplier Institute, Inc., Michigan.

[3] 이상복(2009), "다양한 확률분포하에서 다꾸지 기법의 잡음인자수준정하는 방법", 품질경영학회지, 37 권, 4호, pp.10-15.

2010년 7월 5일 접수, 2010년 8월 13일 1차 수정, 2010년 9월 3일 2차 수정, 2010년 9월 6일 채택