Journal of the Korean Data & Information Science Society
2010, **21**(6), 1281–1288

한국데이터정보과학회지

윷놀이에서 말이 가는 거리의 분포[†]

김도형[1] · 오창혁[2]

[12]영남대학교 통계학과

접수 2010년 10월 16일, 수정 2010년 11월 20일, 게재확정 2010년 11월 23일

요 약

한 조로 사용 되는 네 개의 윷가지의 크기와 모양이 같아서 각 윷가지의 등이 나올 확률이 같은 윷놀이를 생각한다. 윷놀이에서서는 모나 윷이 나오면 한 번 더 던지는 규칙이 있으므로, 한 사람의 차례에서 윷을 던져 말이 가는 거리 X에 관심이 있게 된다. 따라서, 거리 X에 대한 확률질량함수를 구하고, 각 윷가락의 등이 나올 확률의 몇 개의 값에 대하여 확률을 표로 나타낸다. 또한, 거리 X의 기댓값, 분산, 왜도, 첨도를 구하며, 주어진 윷의 등의 확률의 몇 개 값에 대하여 값을 구하여 표로 나타낸다.

주요용어: 기댓값, 분산, 왜도, 윷분포, 첨도.

1. 서론

한국고유의 민속놀이인 윷놀이는 삼국시대 이전부터 전해 내려오며, 오늘 날에도 설날과 같은 고유 명절에 가족 놀이로 이용되고 있을 뿐만 아니라, 넷마블 (netmarble.com)이나 한게임 (hangame.com)과 같은 국내 인터넷 게임 포털에서 윷놀이가 서비스되고 있으며, 더욱이, 스마트폰에서 응용 프로그램으로 개발되어 판매되고도 있다.

이러한 윷놀이에 관하여는 많은 연구가 이루어졌다. 이일영 (1976), 임재해 (1991)와 이양수 (1999)는 윷놀이의 유래와 윷놀이의 규칙, 윷놀이의 민속학적 의미 등에 관하여 연구를 하였으며, 김미경과 허명회 (1995)와 박진경과 박홍선 (1996)은 윷놀이에서 윷의 각 사위, 즉, 도, 개, 걸, 윷, 모가 출현할 확률에 관한 연구를 하였다. 한편, 오창혁 (2010)은 윷놀이에서 윷의 각 사위가 출현할 확률에 관한 분포인 윷이항분포를 정의하였으며, 이에 근거하여 "좋은 윷"을 정의하는 것에 관한 연구를 하였다.

기존의 윷의 확률에 관한 연구는 윷가지 한 개에 대하여 등이 나올 확률과 네 개의 윷가지를 던졌을 때, 각 사위가 나올 확률에 한정되어 있다. 다만, 오창혁 (2010)은 윷놀이에서 한 사람의 차례에서 말이 가는 거리에 대한 평균을 구한 바 있다. 윷놀이에서는 어떤 사람이 자기가 윷을 놀 차례가 돌아오면 네 개의 윷가지를 던지게 되는데 모나 윷이 나오지 않을 때까지 계속해서 던지게 된다. 따라서 한 사람의 차례에서 나오는 사위의 조합에 따라 윷판 위의 말이 갈 수 있는 거리가 정해지게 된다.

한 사람의 차례에서 말이 가는 거리는 윷놀이에서 중요한 우연 현상이므로, 본 연구에서는 이에 대한 분포와 이 분포의 적률을 구하고자 한다. 따라오는 2절에서는 한 사람의 차례에서 말이 가는 거리에 관한 분포의 확률질량함수를 구하고, 각 윷가지의 등의 확률에 따른 거리의 확률값을 표로 나타낸다. 또한, 이 거리에 대한 평균과, 분산, 왜도, 첨도를 계산하고, 등의 확률에 따라 값을 계산하여 표로 제시한다. 마지막 3절에서는 논의와 결론을 다룬다.

[†] 이 연구는 2010학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.
[1] (712-749) 경상북도 경산시 대동 214-1, 영남대학교 이과대학 통계학과, 석사과정.
[2] 교신저자: (712-749) 경상북도 경산시 대동 214-1, 영남대학교 이과대학 통계학과, 교수.
E-mail: choh@yu.ac.kr

2. 윷분포와 적률

윷놀이는 네 개의 윷을 던져서 나오는 사위, 즉, 도, 개, 걸, 윷, 모에 따라서 윷판 위의 말이 가는 거리가 정해지는 게임이다. 네 개의 윷을 한 조라고 하며, 한 조의 윷이 모두 크기와 모양이 같아서 각각의 윷이 등이 나올 확률이 모두 같은 경우를 생각한다. 오창혁 (2010)은 한 조의 윷을 한 번 던질 때, 나오는 사위에 따라 말이 가는 거리 Y의 확률분포로 윷이항분포를 정의하였다. 확률질량함수

$$f_Y(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix} q^{4-y}(1-q)^y, & \text{y=1, 2, 3, 4,} \\ q^4, & \text{y=5} \end{cases} \tag{2.1}$$

를 가지는 확률변수 Y를 등이 나올 확률 q인 윷이항분포라고 하며, $Y \sim YB(q)$로 나타내었다. 또한, 윷이항분포 $YB(q)$를 따르는 확률변수 Y의 평균과 분산은

$$E(Y) = 4q + 5q^4,$$
$$V(Y) = 4q(1-q_1) + 25q^4 - 40q^5 - 25q^8$$

로 주어짐이 보여졌다.

윷놀이에서는 어떤 사람이 자기 차례가 되면 윷을 던지게 되는 데, 모나 윷이 나오지 않을 때까지 계속해서 던지게 된다. 여기서 "윷을 던진다"는 표현은 "한 조의 윷을 던진다"는 것을 의미한다. 한 사람의 차례에서 윷을 던져 말이 가게 되는 거리 X가 관심의 대상이 될 수 있다. X를 "윷거리"라고 부르기로 하자. 본 연구에서는 윷거리 X의 분포와 기댓값, 분산, 왜도, 첨도를 구해본다.

윷거리 X가 1, 2, 또는 3 이 될 확률은 한 사람의 차례에서 첫 번째로 윷을 던질 때, 도, 개, 또는 걸이 나올 확률이므로 각각 p_1, p_2, p_3가 된다. 또한, 윷거리 X가 4 인 경우는 발생하지 않음을 쉽게 알 수 있다. 그리고 X의 값이 5 이상인 경우에는 모나 윷이 몇 번씩 나오고 난 후에 도, 개, 또는 걸이 나오는 경우이다. 따라서, 주어진 x에 대하여 사위의 개수의 조합은

$$\begin{aligned} \widetilde{F_x} = \{\boldsymbol{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5) |\ n_y = 0, 1, 2, \cdots, y = 1, 2, 3, \cdots; \\ n_1 + n_2 + n_3 = 1,\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = x\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

로 나타낼 수 있다. 여기에서 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5은 각각 한 사람의 차례에서 나타난 도, 개, 걸, 윷, 모의 개수이다. $x \leq 35$의 경우에 대하여 $\widetilde{F_x}$의 원소를 부록에 실었다.

한편, 모와 윷이 나오는 순서를 고려하면 다음의 식과 같이 X의 확률분포를 구할 수 있다.

$$f_X(x) = P(X = x|q) = \begin{cases} p_x, & x = 1, 2, 3, \\ 0, & x = 4, \\ \sum_{\boldsymbol{n} \in \widetilde{F}_x} \begin{pmatrix} n_4 + n_5 \\ n_4 \end{pmatrix} \prod_{y=1}^{5} p_y^{n_y}, & x = 5, 6, 7, \cdots. \end{cases} \tag{2.3}$$

식 (2.3)의 확률질량함수를 가지는 윷분포 (Yut distribution)라고 부르기로 한다. 윷분포의 확률질량함수에 대하여 $q = 0.4(0.01)0.5$인 경우 확률 값을 계산하여 표 2.1에 제시하였다. 여기에서 q의 값을 0.4와 0.5사이로 제한한 이유는 이 구간의 q값은 오창혁 (2010)에서 좋은 윷의 조건으로 제시한 "개<걸<윷<모"의 조건을 만족하기 때문이다.

표 2.1 윷거리 X의 확률분포 ($q = 0.4(0.01)0.5$)

X	등의 확률 q										
	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50
1	0.1536	0.1627	0.1719	0.1813	0.1908	0.2005	0.2102	0.2201	0.2300	0.2400	0.2500
2	0.3456	0.3511	0.3560	0.3604	0.3643	0.3675	0.3702	0.3723	0.3738	0.3747	0.3750
3	0.3456	0.3368	0.3278	0.3185	0.3091	0.2995	0.2897	0.2799	0.2700	0.2600	0.2500
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0199	0.0197	0.0195	0.0191	0.0188	0.0183	0.0179	0.0174	0.0168	0.0162	0.0156
6	0.0487	0.0471	0.0456	0.0442	0.0430	0.0419	0.0409	0.0401	0.0395	0.0392	0.0391
7	0.0536	0.0507	0.0482	0.0459	0.0441	0.0425	0.0412	0.0403	0.0396	0.0392	0.0391
8	0.0088	0.0095	0.0102	0.0109	0.0116	0.0123	0.0130	0.0137	0.0143	0.0150	0.0156
9	0.0026	0.0024	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010
10	0.0068	0.0063	0.0058	0.0053	0.0049	0.0046	0.0043	0.0040	0.0038	0.0036	0.0034
11	0.0082	0.0075	0.0069	0.0064	0.0059	0.0056	0.0053	0.0051	0.0050	0.0049	0.0049
12	0.0025	0.0026	0.0027	0.0027	0.0028	0.0029	0.0029	0.0030	0.0031	0.0033	0.0034
13	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0009	0.0009	0.0010
14	0.0010	0.0008	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003
15	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005
16	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
17	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
18	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
20	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
합계	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

윷분포의 개략적인 모양을 살펴보기 위하여 그림 2.1, 2.2, 2.3에서 $q = 0.4, 0.46, 0.5$에 대한 X의 확률분포의 히스토그램을 그림에 나타내었다. 이들 그림에서 윷분포는 세 개의 봉우리를 가지는 삼봉 형태임을 볼 수 있다. 여기서, 하나의 윷가지를 던질 때 등이 나오는 확률 $q = 0.46$은 오창혁 (2010)에서 좋은 윷을 위한 확률로 제시한 값이다.

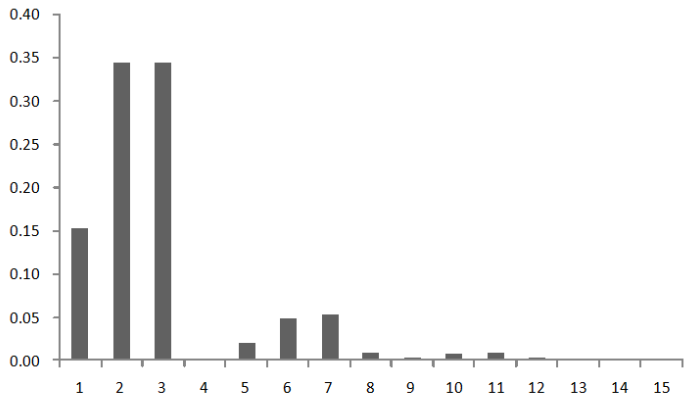

그림 2.1 q= 0.40 일 때 X의 확률질량함수

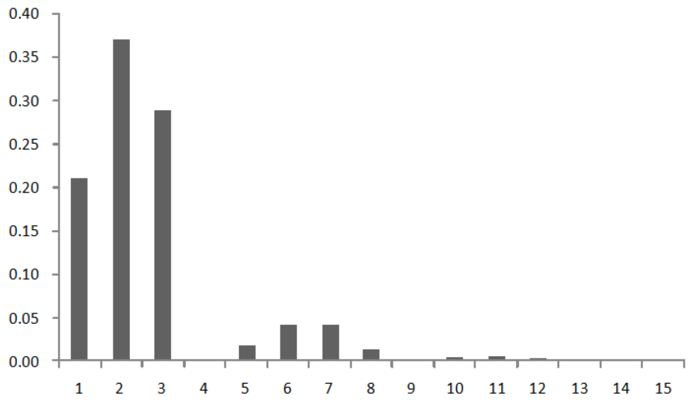

그림 **2.2** q= 0.46 일 때 X의 확률질량함수

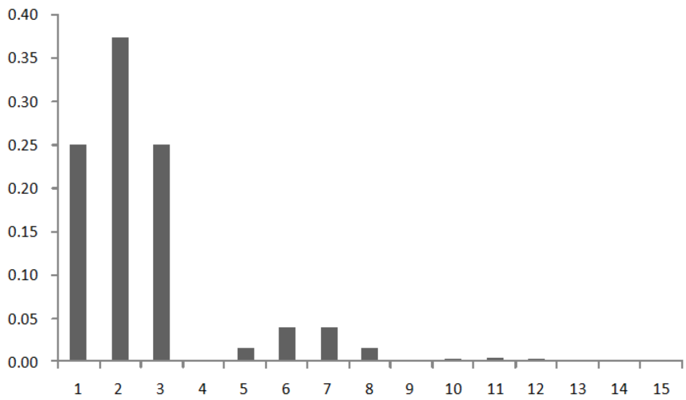

그림 **2.3** q= 0.50 일 때 X의 확률질량함수

오창혁 (2010)은 윷거리 X의 기댓값 $E(X)$을 구하였으며

$$E(X) = \frac{p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5}{1 - p_4 - p_5} \tag{2.4}$$

로 주어진다. 여기에서는 X의 분산, 왜도, 첨도를 구하여 본다. 이를 위하여 한 사람의 차례에서 첫 회에 윷을 던져서 나오는 사위의 거리를 나타내는 확률변수 Z를 생각한다. 그러면, $E(X^2)$는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left\{E(X^2|Z)\right\} = \sum_{z=1}^{5} E(X^2|Z=z)P\{Z=z\} \\ &= p_1 + 4p_2 + 9p_3 + E\left\{(4+X)^2\right\}p_4 + E\left\{(5+X)^2\right\}p_5. \end{aligned} \tag{2.5}$$

식 (2.5)를 $E(X^2)$에 관하여 풀면 다음을 얻는다.

$$\beta E(X^2) = p_1 + 4p_2 + 9p_3 + 16p_4 + 25p_5 + 8E(X)p_4 + 10E(X)p_5. \tag{2.6}$$

여기서, $\beta = 1 - p_4 - p_5$이다. 따라서 식 (2.4)의 $E(X)$에 대하여 값을 대입하면 $E(X^2)$의 값을 구할 수 있다. 한편, $E(X^3)$은 다음과 같이 얻어진다.

$$E(X^3) = p_1 + 8p_2 + 27p_3 + E\left\{(4+X)^3\right\}p_4 + E\left\{(5+X)^3\right\}p_5. \tag{2.7}$$

여기에서 $E(X^3)$에 관하여 풀면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\beta E(X^3) = {} & p_1 + 8p_2 + 27p_3 + 64p_4 + 125p_5 \\ & + 48E(X)p_4 + 12E(X^2)p_4 + 75E(X)p_5 + 15E(X^2)p_5.\end{aligned} \tag{2.8}$$

따라서, 식 (2.4), (2.6)의 $E(X)$와 $E(X^2)$의 값을 대입하여 $E(X^3)$을 얻을 수 있다. 한편, $E(X^4)$은 다음과 같이 얻어진다.

$$E(X^4) = p_1 + 16p_2 + 81p_3 + E\left\{(4+X)^4\right\}p_4 + E\left\{(5+X)^4\right\}p_5. \tag{2.9}$$

여기에서 $E(X^4)$에 관하여 풀면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\beta E(X^4) = {} & p_1 + 16p_2 + 81p_3 + 256p_4 + 625p_5 + 256E(X)p_4 + 96E(X^2)p_4 + 16E(X^3)p_4 \\ & + 500E(X)p_5 + 150E(X^2)p_5 + 20E(X^3)p_5.\end{aligned} \tag{2.10}$$

따라서, 다음과 같은 결과를 얻을수 있다.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2, \\ \alpha_3 &= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)\mu + 2\mu^3}{\{Var(X)\}^{3/2}}, \\ \alpha_4 &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)\mu + 6E(X^2)\mu^2 - 4E(X)\mu^3 + \mu^4}{\{Var(X)\}^2} - 3. \end{aligned}$$

표 2.2는 $q = 0.4(0.01)0.5$에 대하여 확률변수 X의 기댓값, 분산, 왜도, 그리고 첨도의 값을 계산한 것이다.

표 2.2 등의확률 q에 따른 X의 기댓값, 분산, 왜도, 첨도의 값

모멘트	등의 확률 q										
	0.4	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.5
기댓값	2.99	2.94	2.89	2.85	2.81	2.77	2.74	2.71	2.68	2.66	2.64
분산	4.34	4.20	4.08	3.99	3.92	3.87	3.84	3.83	3.84	3.86	3.91
왜도	2.41	2.42	2.43	2.45	2.46	2.48	2.49	2.50	2.52	2.53	2.54
첨도	8.25	8.34	8.44	8.53	8.63	8.71	8.80	8.87	8.94	9.00	9.05

3. 논의와 결론

본 논문에서는 윷놀이를 할 때, 한 사람의 차례에서 말이 갈 수 있는 거리에 대한 분포를 윷분포라고 명명하고, 윷분포의 확률질량함수를 구하였다. 확률질량함수는 그림을 그렸을 때, 봉우리가 세 개인 삼봉 형태를 띠고 있다. 일정한 범위의 윷가지의 등의 확률에 대하여 분포표를 제시하였다. 또한, 윷분포의 기댓값, 분산, 왜도, 첨도를 유도하였다.

실제로 윷을 놀 때는 한 사람의 차례에서 무한정 윷을 던질 필요가 없는 데, 이는 말이 일정한 거리를 가게 되면 말이 '나기' 때문이다. 하나의 말이 날 수 있는 최단거리의 사위는 (모, 윷, 걸)이며, 그 다음의 최단거리를 위한 사위의 조합은 모 하나를 포함하여 모 또는 윷을 합쳐 세 번 이상 나타나는 조합이며, 최대거리를 위한 사위의 조합은 윷이 네번 나타나는 사위의 조합이다. 이들 세 가지 경우의 확률은 모두 0에 가까운 값이므로, 이 연구에서 제시된 확률질량함수는 실제 윷놀이에서 말이 가는 거리의 근사값으로 사용하기에 적절할 것으로 판단된다. 그러나, 실제 윷판에서 말이 가는 방향과 거리를 고려한 말이 날 확률에 관한 분포는 추가적 연구도 흥미있는 연구가 될 것으로 여겨진다.

부록

부록 A. X의 값에 따른 가능한 사위의 조합

x	도	개	걸	윷	모
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0
6	1	0	0	0	1
	0	1	0	1	0
7	0	1	0	0	1
	0	0	1	1	0
8	0	0	1	0	1
9	1	0	0	2	0
10	1	0	0	1	1
	0	1	0	2	0
11	1	0	0	0	2
	0	1	0	1	1
	0	0	1	2	0
12	0	1	0	0	2
	0	0	1	1	1
13	0	0	1	0	2
	1	0	0	3	0
14	1	0	0	2	1
	0	1	0	3	0
15	1	0	0	1	2
	0	1	0	2	1
	0	0	1	3	0
16	1	0	0	0	3
	0	1	0	1	2
	0	0	1	2	1

x	도	개	걸	윷	모
17	0	1	0	0	3
	0	0	1	1	2
	1	0	0	4	0
18	0	0	1	0	3
	1	0	0	3	1
	0	1	0	4	0
19	1	0	0	2	2
	0	1	0	3	1
	0	0	1	4	0
20	1	0	0	1	3
	0	1	0	2	2
	0	0	1	3	1
21	1	0	0	0	4
	0	1	0	1	3
	0	0	1	2	2
	1	0	0	5	0
22	0	1	0	0	4
	0	0	1	1	3
	1	0	0	4	1
	0	1	0	5	0
23	0	0	1	0	4
	1	0	0	3	2
	0	1	0	4	1
	0	0	1	5	0
24	1	0	0	2	3
	0	1	0	3	2
	0	0	1	4	1

x	도	개	걸	윷	모
25	1	0	0	1	4
	0	1	0	2	3
	0	0	1	3	2
	1	0	0	6	0
26	1	0	0	0	5
	0	1	0	1	4
	0	0	1	2	3
	1	0	0	5	1
	0	1	0	6	0
27	0	1	0	0	5
	0	0	1	1	4
	1	0	0	4	2
	0	1	0	5	1
	0	0	1	6	0
28	0	0	1	0	5
	1	0	0	3	3
	0	1	0	4	2
	0	0	1	5	1
29	1	0	0	2	4
	0	1	0	3	3
	0	0	1	4	2
	1	0	0	7	0
30	1	0	0	1	5
	0	1	0	2	4
	0	0	1	3	3
	1	0	0	6	1
	0	1	0	7	0

x	도	개	걸	윷	모
31	1	0	0	0	6
	0	1	0	1	5
	0	0	1	2	4
	1	0	0	5	2
	0	1	0	6	1
	0	0	1	7	0
32	0	1	0	0	6
	0	0	1	1	5
	1	0	0	4	3
	0	1	0	5	2
	0	0	1	6	1
33	0	0	1	0	6
	1	0	0	3	4
	0	1	0	4	3
	0	0	1	5	2
	1	0	0	8	0
34	1	0	0	2	5
	0	1	0	3	4
	0	0	1	4	3
	1	0	0	7	1
	0	1	0	8	0
35	1	0	0	1	6
	0	1	0	2	5
	0	0	1	3	4
	1	0	0	6	2
	0	1	0	7	1
	0	0	1	8	0

참고문헌

김미경, 허명회 (1995). 윷의 확률. <한국통계학회 95년도 춘계학술발표회논문집>, 91-97.

민대기, 현무성 (2009). 신경망을 이용한 우승자 예측 모형. <한국데이터정보과학회지>, **20**, 1119-1128.

박진경, 박홍선 (1996). 윷의 확률 추정에 대하여. <응용통계연구>, **9**, 83-94.

오창혁 (2010). 윷놀이와 확률. <한국데이터정보과학회지>, **21**, 719-727.

이양수 (1999). 擲柶 (윷)에 관한 연구. <문화사학>, **11** ·**12** ·**13**, 903-916.

이일영 (1976). 윷의 由來와 名稱 등에 관한 考察. <韓國學報>, **2**, 130-158.

임재해 (1991). 윷놀이의 신명성과 민중적 세계관. <월간말>, **56**, 210-213.

Woo, Dukkwan and Oh, Changhyuck (2010). Bent coin toss probability. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 147-153.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2010, **21**(6), 1281–1288

한국데이터정보과학회지

A study on the distribution of the distance of Mal movement in Yut board game†

Dohyeong Kim[1] · Changhyuck Oh[2]

[12]Department of Statistics, Yeungnam University

Received 16 October 2010, revised 20 November 2010, accepted 23 November 2010

Abstract

We consider Yut board game with four Yut sticks which are of the same shape and the same size so that they have the same probability of showing back when they are tossed. Since, in Yut board game, a player have to toss four sticks one more when sawi Mo or sawi Yut appears, the player may be interested in the distance which Mal can move in one's turn. Therefore, the probability mass function of the distance is obtained and probabilities with several values of back probability are summarized in a table. Also, the expectation, the variance, the skewness, and the kurtosis of the distribution are calculated and their values are also tablized for some values of back probability.

Keywords: Expectation, kurtosis, skewness, variance,Yut distribution.

† This research was supported by the Yeungnam University research grants in 2010.
[1] Graduate student. Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongbuk 712-749, Korea
[2] Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongbuk 712-749, Korea. E-mail: choh@yu.ac.kr