

## 상단 집중질량을 갖는 근입 말뚝의 진동 특성

### Vibration Characteristics of Embedded Piles Carrying a Tip Mass

최 동 찬\* · 변 요 셉\* · 오 상 진† · 천 병 식\*\*

Dongchan Choi, Yoseph Byun, Sang Jin Oh and Byungsik Chun

(2010년 3월 9일 접수 ; 2010년 3월 17일 심사완료)

**Key Words :** Embedded Pile(근입 말뚝), Tip Mass(집중질량), Flexibly Support(연약지지), Free Vibration(자유 진동), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(진동형)

#### ABSTRACT

The vibration characteristics of fully and partially embedded piles with flexibly supported end carrying an eccentric tip mass are investigated. The pile model is based on the Bernoulli-Euler theory and the soil is idealized as a Winkler model for mathematical simplicity. The governing differential equations for the free vibrations of such members are solved numerically using the corresponding boundary conditions. The lowest three natural frequencies and corresponding mode shapes are calculated over a wide range of non-dimensional system parameters: the rotational spring parameter, the relative stiffness, the embedded ratio, the mass ratio, the dimensionless mass moment of inertia, and the tip mass eccentricity.

#### 1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 정, 동적 거동에 관한 연구는 구조 및 기초 공학 분야에서 중요한 연구과제로서 이에 대한 많은 연구<sup>(1-7)</sup>가 이루어져 왔다. 지반과 구조물의 상호거동을 해석하기 위해서는 지반특성을 표현할 수 있는 지반모형의 개발이 이루어져야 한다. 그러나 지반은 성질이 다양하고 복잡하여 정확한 수학적 모형을 얻기 어려우므로 지반과 구조물의 상호거동을 규명하는 것은 매우 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위한 시도로서 Winkler, Hentenyi, Pasternak, Vlazov, Kerr 등은 지반특성을 설명하기 위한 다양한 수학적 모형을 제시하였다<sup>(8)</sup>. 그러나 지반과 구조물의 상호거동

해석을 위한 연구들에서 가장 많이 채택하고 있는 지반모형은 지반을 무한개의 스프링으로 구성된 것으로 가정하는 Winkler모형이다.

말뚝은 축을 통해 상부하중을 수직으로 분배시키거나 선단을 통해 지지층에 하중을 직접 전달시키기 위하여 사용될 뿐만 아니라 때로는 사면활동을 방지하기 위한 목적 등에도 이용되고 있다. 이와 같은 목적에 이용되는 말뚝은 지반에 전근입(fully embedded) 또는 부분근입(partially embedded)상태에 있기 때문에 일반적인 기둥 문제와는 달리 말뚝의 강성, 주변의 지반특성 및 말뚝 선단의 지점특성 등을 고려한 해석이 필요하다<sup>(9)</sup>. 그리고 말뚝에 의해 지지되는 말뚝 상단의 상부구조 및 말뚝 캡(pile cap)은 집중질량으로 모형화할 수 있다<sup>(6,7,10)</sup>.

이 논문에서는 상단에 집중질량을 갖는 근입 말뚝의 진동특성을 고찰하는데 연구목적이 있다. 말뚝이 근입된 지반은 수학적 모형의 단순화를 위하여 Winkler모형으로 이상화한다. 말뚝 상단에는 상단으로부터 일정 거리에 질량중심이 있는 집중질량을

† 교신저자 ; 정희원, 전남도립대학 토목환경과

E-mail : sjoh@dorip.ac.kr

Tel : (061)380-8502, Fax : (061)380-8679

\* 한양대학교 대학원 토목공학과

\*\* 한양대학교 토목공학과

고려하며, 말뚝 하단은 회전스프링으로 구속된 회전 단의 단부조건을 고려한다. 대응하는 단부조건에 따른 경계조건을 이용하여 대상 구조의 자유진동에 대한 지배 미분방정식을 수치해석하였으며, 최저차 3개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 해석 결과로서 다양한 제변수 변화에 따른 무차원 고유진동수 및 진동형의 변화를 고찰하였다.

## 2. 수학적 모형

Fig. 1(a)는 지반에 부분 근입된 지간길이  $l$ 인 말뚝을 나타낸 것이며, Fig. 1(b)는 지반을 Winkler가 제안한 탄성스프링으로 모형화한 것이다. Fig. 1에서  $M$ 과  $d$ 는 각각 말뚝 상단 질량중심까지의 크기 및 말뚝 상단으로부터 질량중심까지의 거리,  $J$ 는 질량관성모멘트이며,  $\alpha$ 는 말뚝의 근입된 정도를 나타내는 근입비(embedded ratio),  $K_r$ 는 지반탄성계수,  $K_f$ 은 회전스프링상수이다. 그리고  $w=w(x,t)$ 는 부재축상 임의점에서의 진동변위를 나타낸다.

Bernoulli-Euler이론을 적용한 말뚝의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (1)과 같다<sup>(11)</sup>.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_f w = 0, \quad 0 \leq x \leq \alpha l \quad (1a)$$

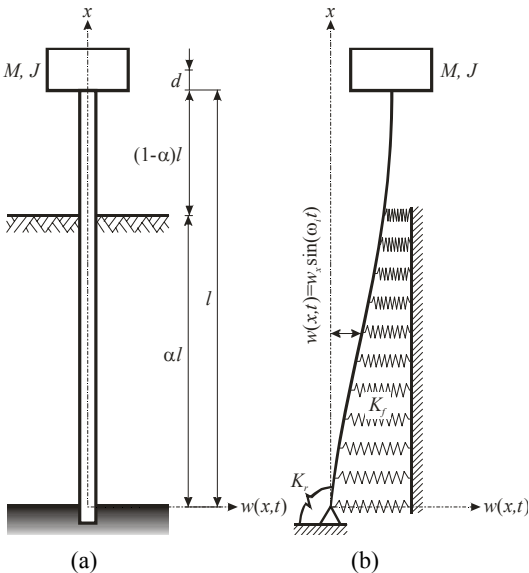


Fig. 1 (a) Embedded pile, (b) mathematical model

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \alpha l \leq x \leq l \quad (1b)$$

식 (1)에서  $EI$ 와  $A$ 는 각각 말뚝의 휨강성 및 단면적이며,  $\rho$ 는 말뚝 재료의 밀도이다.

말뚝이 조화진동을 한다고 가정하면 진동변위에 대한 조화진동식은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (2)$$

식 (2)에서  $w_x$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이고,  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/s),  $i$ 는 모드번호,  $t$ 는 시간이다.

지배방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 말뚝 축상 임의점의 좌표  $x$  및  $x$ 위치에서의 진폭을 지간길이로 정규화하면 각각 식 (3), (4)와 같다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l \quad (3,4)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하고, 식 (3), (4)의 무차원 변수들을 이용하여 나타내면 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = (C_i^4 - \varepsilon) \eta, \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (5a)$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = C_i^4 \eta, \quad \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (5b)$$

식 (5)에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)로 그 내용은 식 (6)과 같고,  $\varepsilon$ 은 상대강성(relative stiffness)으로서 식 (7)과 같다.

$$C_i = [\omega_i^4 l^4 \rho A / (EI)]^{1/4}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

$$\varepsilon = K_f l^4 / EI \quad (7)$$

말뚝 하단( $x=0$ )은 회전스프링을 갖는 힌지단이므로 진동변위와 휨모멘트는 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다. 그리고 말뚝 상단( $x=l$ )에는 질량관성모멘트  $J$ , 말뚝 상단으로 질량중심까지의 거리가  $d$ 인 질량  $M$ 이 존재하므로 말뚝 상단에서 휨모멘트 및 전단력은 식 (9)와 같이 쓸 수 있다.

$$w = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K_r \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8a,b)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -(J + Md^2) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - Md \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9a)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Md \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (9b)$$

식 (8), (9)를 식 (3), (4)의 무차원 변수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = 0, \quad d^2 \eta / d\xi^2 - k_r d\eta / d\xi = 0 \quad (10a,b)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = (j + me^2) C_i^4 \frac{d\eta}{d\xi} + me C_i^4 \eta \quad (11a)$$

$$\frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = -me C_i^4 \frac{d\eta}{d\xi} - m C_i^4 \eta \quad (11b)$$

식 (10)에서  $k_r$ 은 회전스프링계수(rotational spring parameter)로서 식 (12)와 같고, 식 (11)에서  $m, j$  및  $e$ 는 각각 집중질량과 말뚝 전체 질량의 비(tip mass ratio), 무차원 질량관성모멘트(dimensionless mass

moment of inertia) 및 말뚝 상단으로부터 질량중심까지의 거리인 이심률(tip mass eccentricity)로서 그 내용은 식 (13)~(15)와 같다.

$$k_r = K_r l / EI \quad (12)$$

$$m = M / (\rho A l) \quad (13)$$

$$j = J / (\rho A l^3) \quad (14)$$

$$e = d / l \quad (15)$$

### 3. 수치해석방법 및 해석 예

이 연구에서는 식 (5)의 지배 미분방정식을 수치 해석하여 대상구조의 고유진동수 및 진동형을 산출 하였으며, 해석과정을 간단히 정리하면 다음과 같다. 식 (5)의 미분방정식에는 미지의 불확정량인 무차원 고유진동수  $C_i$ 항이 포함되어 있으므로 먼저  $C_i$ 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후 말뚝 하단에서의 경계조건을 이용하여 미분방정식의 수치 적분을 시행한다. 가정한 값이 대상구조의 자유진동에 대한 고유치인지는 말뚝 상단에서의 경계조건 만족여부로 판단하며, 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용한다. 이 연구에서 지배 미분방정식의 수치적분은 정도가 매우 높아 공학문제에 많이 이용되는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 행렬값 탐사법의 적용과정에서 고유치  $C_i$ 값을 찾기 위해서는 Regula-Falsi method를 이용하였다<sup>(12,13)</sup>. 이 연구에서는 이상의 수치해석방법을 이용하여 회전스프링 계수, 상대강성, 근입비, 질량비, 무차원 질량관성모멘트, 집중질량의 이심률에 따른 최저차 3개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 계산하였다.

Table 1은 이 연구결과를 검증하기 위하여 문헌들<sup>(14-16)</sup>의 결과와 비교한 것이다. 여기서  $k_r = 10^8$ 인 경우 말뚝 하단이 고정단으로 변환됨을 의미하며,  $m = j = 10^8$ 인 경우는 말뚝 상단이 고정단으로 변환됨을 의미한다. 한편  $\alpha = 0$ 인 경우에는 말뚝이 근입되지 않은 것을 의미하므로 상대강성  $\varepsilon$  값과는 관계가 없다.

Table 1에서 ( $\alpha = 0, m = 2, j = 1, e = 0$ ), ( $\alpha = 0, m = j = e = 0.1$ )에 대한 결과 중  $k_r = 10^8$ 인 경우 무차원 고유진동수는 문헌<sup>(14)</sup>의 상단 집중질량, 하단은

Table 1 Comparison of results

$\alpha, \varepsilon, m, j, e$	$k_r$	Frequency parameter, $C_i$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\alpha=0$ $m=2$ $j=1$ $e=0$	1	0.67331	1.47039	4.15882
	10	0.84797	1.61655	4.53261
	$10^2$	0.88159	1.67993	4.78471
	$10^4$	0.88566	1.68927	4.82889
	$10^8$	0.88570 (0.88570) <sup>†</sup>	1.68937 (1.68937)	4.82936 (4.82936)
$\alpha=0$ $m=0.1$ $j=0.1$ $e=0.1$	1	1.07665	2.30671	4.70967
	10	1.40606	2.50620	5.05267
	$10^2$	1.47717	2.60831	5.31042
	$10^4$	1.48595	2.62411	5.35751
	$10^8$	1.48604 (1.48603) <sup>†</sup>	2.62427 (2.62427)	5.35802 (5.35801)
$\alpha=1$ $\varepsilon=2\pi^4$ $m=0$ $j=0$ $e=0$	1	3.74262	4.62515	7.26381
	10	3.77191	4.88236	7.56538
	$10^2$	3.78580	5.07041	7.88334
	$10^4$	3.78791	5.10438	7.95199
	$10^8$	3.78793 (3.79342) <sup>*</sup>	5.10474 (5.10784)	7.95277 (7.95550)
$\alpha=0$ $m=10^8$ $j=10^8$ $e=0$	1	4.04183 (4.04185) <sup>**</sup>	7.13384 (7.13396)	10.2566 (10.2570)
	10	4.43027 (4.43027) <sup>**</sup>	7.44987 (7.44991)	10.5218 (10.5220)
	$10^2$	4.68528 (4.68528) <sup>**</sup>	7.78114 (7.78113)	10.8977 (10.8977)
	$10^4$	4.72957 ( - ) <sup>**</sup>	7.85242 ( - )	10.9945 ( - )
	$10^8$	4.73004 (4.73004) <sup>**</sup>	7.85321 (7.85320)	10.9959 (10.9956)

† Results of Ref. (14).

\* Results of Ref. (15).

\*\* Results of Ref. (16).

**Table 2** Influence of rotational spring parameter  $k_r$  on the frequency parameters of the pile

$m, j, e$	$\alpha$	$k_r$	Frequency parameter, $C_i$								
			$\varepsilon=5$			$\varepsilon=500$			$\varepsilon=2000$		
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$m=0$ $j=0$ $e=0$	0	1	1.24792	4.03114	7.13413	1.24792	4.03114	7.13413	1.24792	4.03114	7.13413
		10	1.72274	4.39952	7.45106	1.72274	4.39952	7.45106	1.72274	4.39952	7.45106
		$10^2$	1.85679	4.64973	7.78267	1.85679	4.64973	7.78267	1.85679	4.64973	7.78267
		$10^4$	1.87492	4.69362	7.85398	1.87492	4.69362	7.85398	1.87492	4.69362	7.85398
		$10^8$	1.87510	4.69409	7.85489	1.87510	4.69409	7.85489	1.87510	4.69409	7.85489
	0.5	1	1.31114	4.04111	7.13572	2.31802	4.80891	7.29826	2.62083	5.86983	7.83536
		10	1.73902	4.40673	7.45255	2.32253	4.98643	7.60396	2.62471	5.89486	8.09006
		$10^2$	1.86685	4.65528	7.78402	2.32560	5.11826	7.91957	2.62837	5.91617	8.34811
		$10^4$	1.88429	4.69891	7.85528	2.32615	5.14248	7.98716	2.62915	5.92042	8.40322
		$10^8$	1.88447	4.69937	7.85604	2.32616	5.14274	7.98790	2.62915	5.92047	8.40381
	1.0	1	1.64925	4.04997	7.13755	4.72806	5.25197	7.45396	6.68001	6.88837	8.22530
		10	1.92659	4.41404	7.45406	4.74209	5.43330	7.73467	6.68400	6.97156	8.43799
		$10^2$	2.02615	4.66203	7.78531	4.74881	5.57230	8.03369	6.68592	7.03869	8.67200
		$10^4$	2.04015	4.70558	7.85654	4.74984	5.59795	8.09860	6.68621	7.05140	8.72374
		$10^8$	2.04030	4.70605	7.85718	4.74985	5.59823	8.09928	6.68622	7.05154	8.72430
$m=1$ $j=0$ $e=0$	0	1	0.87048	3.39472	6.42733	0.87048	3.39472	6.42733	0.87048	3.39472	6.42733
		10	1.16418	3.77076	6.75432	1.16418	3.77076	6.75432	1.16418	3.77076	6.75432
		$10^2$	1.23815	3.99364	7.06877	1.23815	3.99364	7.06877	1.23815	3.99364	7.06877
		$10^4$	1.24782	4.03075	7.13343	1.24782	4.03075	7.13343	1.24782	4.03075	7.13343
		$10^8$	1.24792	4.03114	7.13408	1.24792	4.03114	7.13408	1.24792	4.03114	7.13408
	0.5	1	0.91267	3.40965	6.42969	1.49071	4.31796	6.67292	1.63166	5.21829	7.42394
		10	1.17401	3.78018	6.75650	1.49165	4.43361	6.97665	1.63427	5.22369	7.63564
		$10^2$	1.24405	4.00055	7.07070	1.49229	4.51584	7.26391	1.63674	5.22843	7.83594
		$10^4$	1.25329	4.03729	7.13530	1.49240	4.53071	7.32274	1.63727	5.22939	7.87722
		$10^8$	1.25339	4.03768	7.13598	1.49241	4.53087	7.32341	1.63727	5.22940	7.87769
	1.0	1	1.14607	3.42259	6.43184	2.85646	4.98714	6.84122	3.72550	6.78225	7.78187
		10	1.29874	3.79168	6.75822	2.85872	5.11919	7.11747	3.72567	6.83489	7.97371
		$10^2$	1.34841	4.01139	7.07219	2.86029	5.21142	7.38985	3.72584	6.87320	8.17083
		$10^4$	1.35519	4.04803	7.13675	2.86058	5.22781	7.44659	3.72587	6.88013	8.21282
		$10^8$	1.35526	4.04842	7.13742	2.86058	5.22798	7.44724	3.72587	6.88021	8.21330
$m=1$ $j=1$ $e=0$	0	1	0.72732	1.55094	4.23700	0.72732	1.55094	4.23700	0.72732	1.55094	4.23700
		10	0.89768	1.74700	4.60425	0.89768	1.74700	4.60425	0.89768	1.74700	4.60425
		$10^2$	0.92798	1.82921	4.85602	0.92798	1.82921	4.85602	0.92798	1.82921	4.85602
		$10^4$	0.93157	1.84123	4.90040	0.93157	1.84123	4.90040	0.93157	1.84123	4.90040
		$10^8$	0.93161	1.84135	4.90087	0.93161	1.84135	4.90087	0.93161	1.84135	4.90087
	0.5	1	0.75715	1.56554	4.24701	1.01893	2.08462	4.99924	1.05227	2.31299	6.06424
		10	0.90255	1.75417	4.61142	1.01895	2.09373	5.18295	1.05354	2.31385	6.09435
		$10^2$	0.93064	1.83400	4.86156	1.01896	2.10005	5.32022	1.05475	2.31467	6.11959
		$10^4$	0.93402	1.84571	4.90567	1.01897	2.10119	5.34547	1.05501	2.31484	6.12458
		$10^8$	0.93405	1.84583	4.90615	1.01897	2.10120	5.34574	1.05501	2.31485	6.12463
	1.0	1	0.91834	1.62566	4.25106	1.34142	3.33469	5.30111	1.46734	4.37061	6.90612
		10	0.97425	1.80179	4.61550	1.34297	3.33470	5.50332	1.46734	4.37099	6.99747
		$10^2$	0.98794	1.87619	4.86569	1.34408	3.33471	5.65542	1.46734	4.37134	7.07022
		$10^4$	0.98967	1.88714	4.90982	1.34429	3.33471	5.68333	1.46734	4.37141	7.08395
		$10^8$	0.98969	1.88725	4.91029	1.34429	3.33471	5.68363	1.46734	4.37141	7.08410
$m=1$ $j=1$ $e=0.05$	0	1	0.71933	1.56572	4.24143	0.71933	1.56572	4.24143	0.71933	1.56572	4.24143
		10	0.88822	1.76332	4.60802	0.88822	1.76332	4.60802	0.88822	1.76332	4.60802
		$10^2$	0.91847	1.84598	4.85959	0.91847	1.84598	4.85959	0.91847	1.84598	4.85959
		$10^4$	0.92207	1.85806	4.90394	0.92207	1.85806	4.90394	0.92207	1.85806	4.90394
		$10^8$	0.92210	1.85819	4.90442	0.92210	1.85819	4.90442	0.92210	1.85819	4.90442
	0.5	1	0.74883	1.58047	4.25139	1.00970	2.10163	5.00168	1.04344	2.33087	6.06631
		10	0.89307	1.77051	4.61517	1.00972	2.11088	5.18553	1.04471	2.33172	6.09653
		$10^2$	0.92112	1.85078	4.86511	1.00973	2.11729	5.32293	1.04592	2.33252	6.12186
		$10^4$	0.92450	1.86255	4.90920	1.00973	2.11845	5.34820	1.04617	2.33269	6.12686
		$10^8$	0.92454	1.86268	4.90967	1.00973	2.11846	5.34847	1.04617	2.33269	6.12691
	1.0	1	0.90848	1.64077	4.25540	1.33563	3.34702	5.30212	1.46256	4.38338	6.90628
		10	0.96440	1.81786	4.61921	1.33717	3.34704	5.50450	1.46256	4.38376	6.99770
		$10^2$	0.97821	1.89266	4.86921	1.33828	3.34706	5.65674	1.46256	4.38411	7.07050
		$10^4$	0.97995	1.90367	4.91332	1.33848	3.34706	5.68469	1.46256	4.38418	7.08425
		$10^8$	0.97997	1.90378	4.91379	1.33849	3.34706	5.68499	1.46256	4.38418	7.08440

**Table 3** Influence of tip mass ratio  $m$  on the frequency parameters of the pile with  $j=0.1$  and  $e=0$

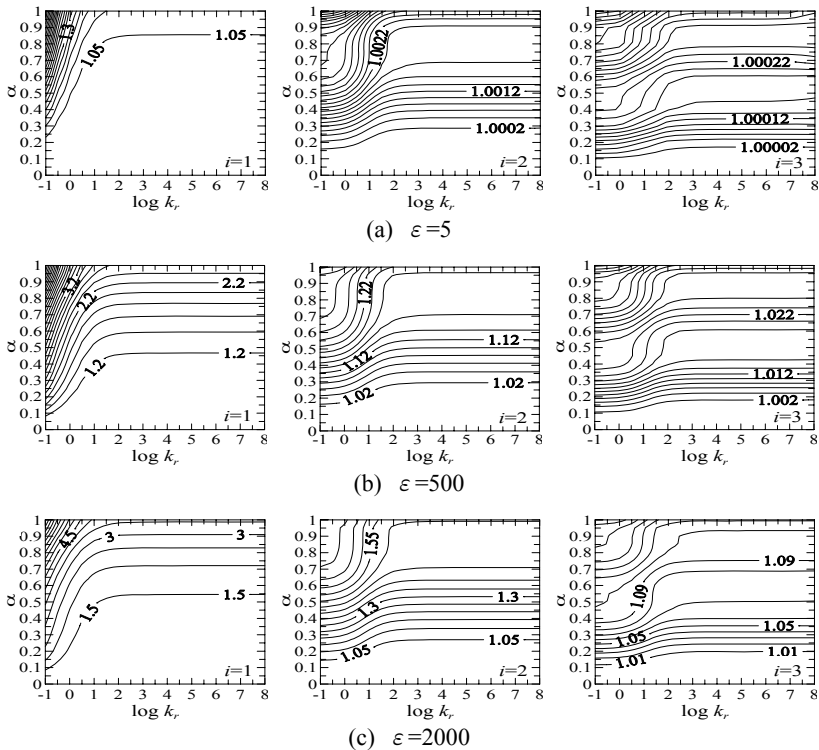
$k_r$	$\alpha$	$m$	Frequency parameter, $C_i$								
			$\varepsilon=5$			$\varepsilon=500$			$\varepsilon=2000$		
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	0	0	1.14629	2.30700	4.85145	1.14629	2.30700	4.85145	1.14629	2.30700	4.85145
		0.1	1.08867	2.30175	4.69118	1.08867	2.30175	4.69118	1.08867	2.30175	4.69118
		1	0.85061	2.28787	4.34776	0.85061	2.28787	4.34776	0.85061	2.28787	4.34776
		2	0.74518	2.28459	4.28078	0.74518	2.28459	4.28078	0.74518	2.28459	4.28078
	0.5	0	1.20002	2.31823	4.85793	1.77638	2.97617	5.43639	1.85256	3.39165	6.53171
		0.1	1.13993	2.31207	4.69818	1.71537	2.88568	5.30677	1.79976	3.23689	6.38241
		1	0.89102	2.29591	4.35645	1.39792	2.66358	5.05125	1.49946	2.86282	6.09797
		2	0.78063	2.29212	4.28993	1.23532	2.61725	5.00578	1.33318	2.78500	6.04977
	1	0	1.49399	2.34570	4.86192	2.38982	4.74950	5.68230	2.61325	6.69015	7.09325
		0.1	1.42186	2.33545	4.70129	2.37603	4.50554	5.51003	2.60575	6.22395	6.95571
		1	1.11550	2.31032	4.35956	2.24829	3.50998	5.32449	2.53637	4.48435	6.90948
		2	0.97788	2.30481	4.29353	2.11646	3.21522	5.30627	2.45834	3.96244	6.90661
$10^8$	0	0	1.57707	2.64824	5.52863	1.57707	2.64824	5.52863	1.57707	2.64824	5.52863
		0.1	1.50783	2.60636	5.34105	1.50783	2.60636	5.34105	1.50783	2.60636	5.34105
		1	1.19567	2.50506	4.97510	1.19567	2.50506	4.97510	1.19567	2.50506	4.97510
		2	1.05035	2.48349	4.90957	1.05035	2.48349	4.90957	1.05035	2.48349	4.90957
	0.5	0	1.58245	2.65368	5.53267	1.77642	3.01886	5.89790	1.85761	3.39296	6.67983
		0.1	1.51325	2.61101	5.34530	1.71551	2.92239	5.72341	1.80492	3.23803	6.49296
		1	1.20049	2.50787	4.98002	1.39857	2.68803	5.39786	1.50439	2.86315	6.16113
		2	1.05467	2.48593	4.91464	1.23607	2.63941	5.34224	1.33768	2.78516	6.10718
	1	0	1.69231	2.68903	5.53584	2.39542	4.79843	6.14442	2.61325	6.70662	7.34696
		0.1	1.62251	2.63908	5.34809	2.38162	4.52349	5.95062	2.60575	6.22409	7.17578
		1	1.29447	2.51993	4.98360	2.25351	3.51113	5.71039	2.53638	4.48514	7.08953
		2	1.13831	2.49524	4.91870	2.12111	3.21652	5.68315	2.45836	3.96306	7.08345

**Table 4** Influence of mass moment of inertia  $j$  on the frequency parameters of the pile with  $m=1$  and  $e=0$

$k_r$	$\alpha$	$j$	Frequency parameter, $C_i$								
			$\varepsilon=5$			$\varepsilon=500$			$\varepsilon=2000$		
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	0	0	0.87048	3.39472	6.42733	0.87048	3.39472	6.42733	0.87048	3.39472	6.42733
		0.1	0.85061	2.28787	4.34776	0.85061	2.28787	4.34776	0.85061	2.28787	4.34776
		1	0.72732	1.55094	4.23700	0.72732	1.55094	4.23700	0.72732	1.55094	4.23700
		2	0.65228	1.45667	4.23093	0.65228	1.45667	4.23093	0.65228	1.45667	4.23093
	0.5	0	0.91267	3.40965	6.42969	1.49071	4.31796	6.67292	1.63166	5.21829	7.42394
		0.1	0.89102	2.29591	4.35645	1.39792	2.66358	5.05125	1.49946	2.86282	6.09797
		1	0.75715	1.56554	4.24701	1.01893	2.08462	4.99924	1.05227	2.31299	6.06424
		2	0.67696	1.47483	4.24102	0.87580	2.04104	4.99642	0.90033	2.27426	6.06238
	1	0	1.14607	3.42259	6.43184	2.85646	4.98714	6.84122	3.72550	6.78225	7.78187
		0.1	1.11550	2.31032	4.35956	2.24829	3.50998	5.32449	2.53637	4.48435	6.90948
		1	0.91834	1.62566	4.25106	1.34142	3.33469	5.30111	1.46734	4.37061	6.90612
		2	0.80823	1.55581	4.24512	1.13148	3.32586	5.29987	1.23574	4.36467	6.90594
$10^8$	0	0	1.24792	4.03114	7.13408	1.24792	4.03114	7.13408	1.24792	4.03114	7.13408
		0.1	1.19567	2.50506	4.97510	1.19567	2.50506	4.97510	1.19567	2.50506	4.97510
		1	0.93161	1.84135	4.90087	0.93161	1.84135	4.90087	0.93161	1.84135	4.90087
		2	0.81069	1.78114	4.89682	0.81069	1.78114	4.89682	0.81069	1.78114	4.89682
	0.5	0	1.25339	4.03768	7.13598	1.49241	4.53087	7.32341	1.63727	5.22940	7.87769
		0.1	1.20049	2.50787	4.98002	1.39857	2.68803	5.39786	1.50439	2.86315	6.16113
		1	0.93405	1.84583	4.90615	1.01897	2.10120	5.34574	1.05501	2.31485	6.12463
		2	0.81254	1.78606	4.90211	0.87589	2.05695	5.34290	0.90256	2.27635	6.12263
	1	0	1.35526	4.04842	7.13742	2.86058	5.22798	7.44724	3.72587	6.88021	8.21330
		0.1	1.29447	2.51993	4.98360	2.25351	3.51113	5.71039	2.53638	4.48514	7.08953
		1	0.98969	1.88725	4.91029	1.34429	3.33471	5.68363	1.46734	4.37141	7.08410
		2	0.85681	1.83493	4.90629	1.13387	3.32587	5.68220	1.23574	4.36547	7.08381

**Table 5** Influence of tip mass eccentricity  $e$  on the frequency parameters of the pile with  $m=1$  and  $j=0.1$

$k_r$	$\alpha$	$e$	Frequency parameter, $C_i$								
			$\varepsilon=5$			$\varepsilon=500$			$\varepsilon=2000$		
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	0	0	0.85061	2.28787	4.34776	0.85061	2.28787	4.34776	0.85061	2.28787	4.34776
		0.01	0.84726	2.29088	4.35549	0.84726	2.29088	4.35549	0.84726	2.29088	4.35549
		0.05	0.83409	2.30012	4.38746	0.83409	2.30012	4.38746	0.83409	2.30012	4.38746
		0.1	0.81818	2.30603	4.42885	0.81818	2.30603	4.42885	0.81818	2.30603	4.42885
	0.5	0	0.89102	2.29591	4.35645	1.39792	2.66358	5.05125	1.49946	2.86282	6.09797
		0.01	0.88744	2.29916	4.36411	1.38926	2.67569	5.05571	1.48935	2.87872	6.10168
		0.05	0.87337	2.30935	4.39582	1.35550	2.72107	5.07467	1.44999	2.93947	6.11793
		0.1	0.85637	2.31642	4.43690	1.31532	2.77089	5.10034	1.40330	3.00864	6.14091
	1	0	1.11550	2.31032	4.35956	2.24829	3.50998	5.32449	2.53637	4.48435	6.90948
		0.01	1.11070	2.31428	4.36717	2.23294	3.53021	5.32649	2.52283	4.50589	6.90979
		0.05	1.09179	2.32742	4.39869	2.16930	3.61432	5.33521	2.46205	4.60355	6.91111
		0.1	1.06886	2.33835	4.43957	2.08805	3.72220	5.34763	2.37671	4.74391	6.91305
$10^8$	0	0	1.19567	2.50506	4.97510	1.19567	2.50506	4.97510	1.19567	2.50506	4.97510
		0.01	1.18937	2.51334	4.98145	1.18937	2.51334	4.98145	1.18937	2.51334	4.98145
		0.05	1.16476	2.54337	5.00843	1.16476	2.54337	5.00843	1.16476	2.54337	5.00843
		0.1	1.13528	2.57428	5.04486	1.13528	2.57428	5.04486	1.13528	2.57428	5.04486
	0.5	0	1.20049	2.50787	4.98002	1.39857	2.68803	5.39786	1.50439	2.86315	6.16113
		0.01	1.19414	2.51621	4.98635	1.38988	2.70056	5.40282	1.49424	2.87905	6.16523
		0.05	1.16934	2.54653	5.01324	1.35602	2.74761	5.42411	1.45472	2.93984	6.18324
		0.1	1.13964	2.57781	5.04954	1.31573	2.79950	5.45348	1.40783	3.00907	6.20888
	1	0	1.29447	2.51993	4.98360	2.25351	3.51113	5.71039	2.53638	4.48514	7.08953
		0.01	1.28741	2.52878	4.98988	2.23812	3.53146	5.71297	2.52284	4.50669	7.09009
		0.05	1.25979	2.56114	5.01661	2.17428	3.61608	5.72429	2.46206	4.60436	7.09256
		0.1	1.22669	2.59504	5.05272	2.09280	3.72469	5.74049	2.37672	4.74474	7.09621



**Fig. 2** Contour map of  $C_i/C_{oi}$  for  $m=j=e=0$

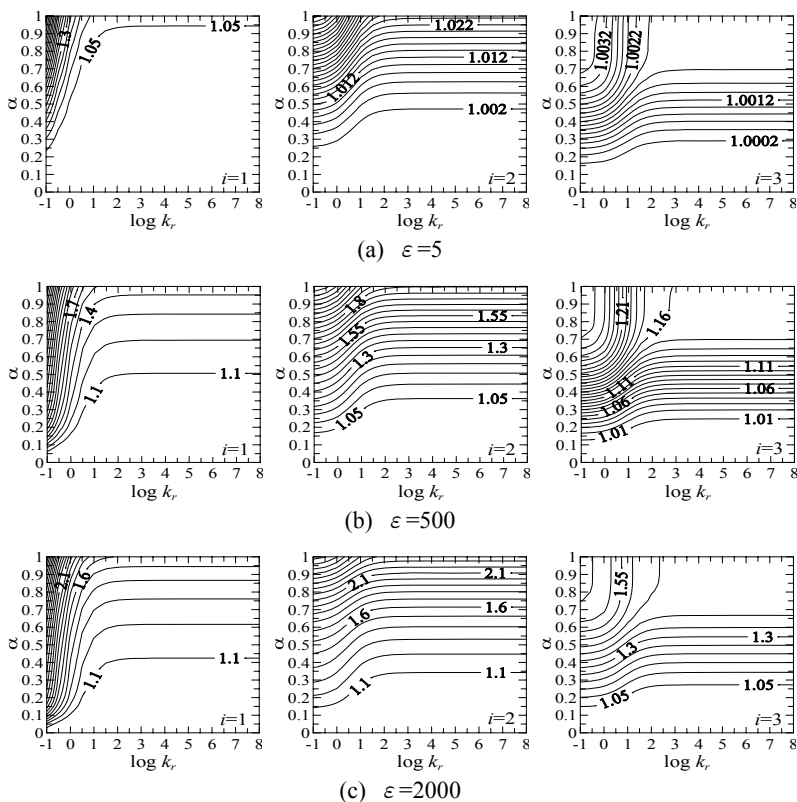


Fig. 3 Contour map of  $C_i/C_{oi}$  for  $m=j=1$  and  $e=0.05$

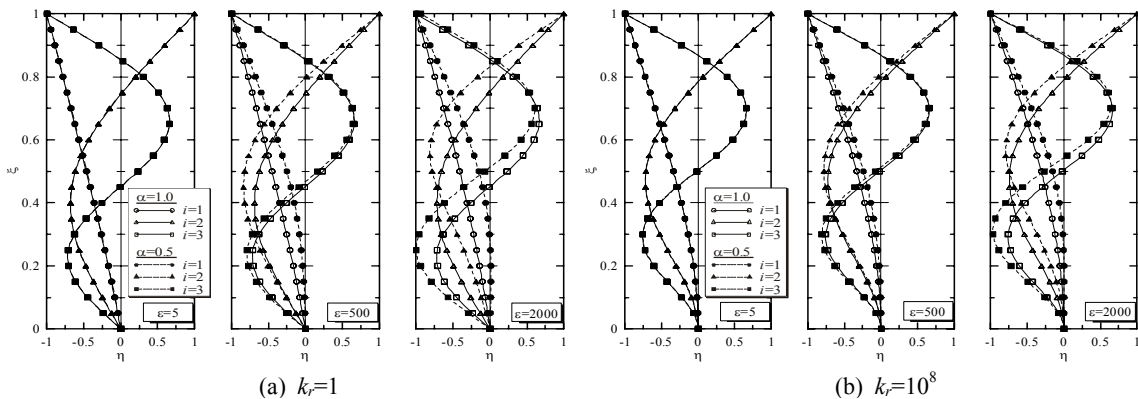


Fig. 4 Mode shapes of pile with  $m=j=e=0$

고정단에 대한 결과와 잘 근접함을 알 수 있으며, ( $\alpha=1, \epsilon=2\pi^4, m=j=e=0$ )에 대한 결과 중  $k_r=10^8$ 인 경우 무차원 고유진동수는 문헌<sup>(15)</sup>의 상단 자유, 하단 고정단에 대한 결과와 잘 근접함을 알 수 있다. 또한 ( $\alpha=0, m=j=10^8, e=0$ )인 경우에는 문헌<sup>(16)</sup>의 상단 고정, 하단은 회전스프링을

갖는 힌지단에 대한 결과와 잘 근접함을 알 수 있다. 한편 Table 1에서  $m=j=10^8, k_r=10^8$ 인 경우 무차원 고유진동수는 문헌들에서 쉽게 찾아 볼 수 있는 고정-고정 단부조건에 대한 무차원 고유진동수인 4.73004, 7.85320, 10.9956과 잘 근접함을 알 수 있다.

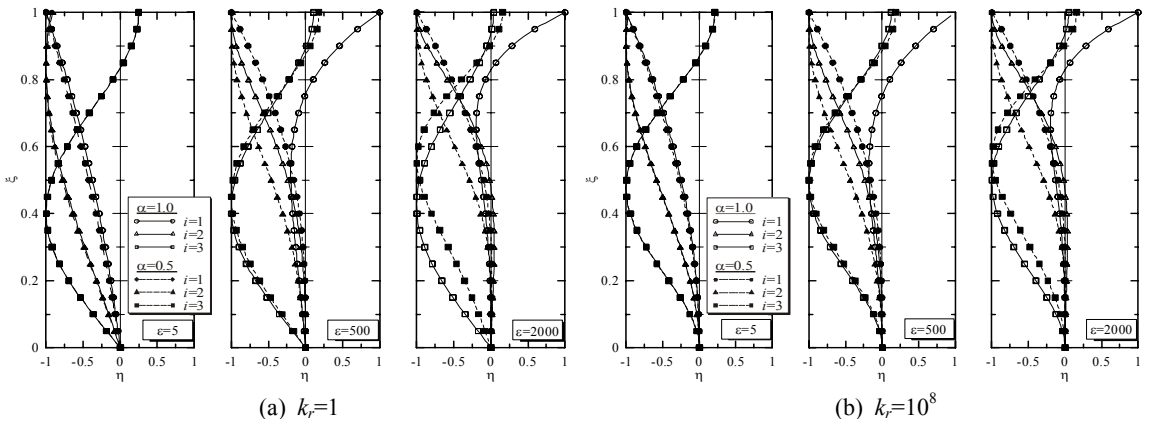


Fig. 5 Mode shapes of pile with  $m = j = 1$  and  $e = 0.05$

Table 2는 말뚝 하단의 회전스프링계수  $k_r$ 이 1, 10,  $10^2$ ,  $10^4$  및  $10^8$ 인 경우 무차원 고유진동수를 나타낸 것이며, Table 3~5는 각각 질량비  $m$ , 무차원 질량관성모멘트  $j$ , 이심률  $e$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수를 나타낸 것이다.

Table 2~5에서 근입비  $\alpha$ 는 0, 0.5 및 1.0을 고려하였다. 여기서  $\alpha = 0$ 인 경우는 말뚝이 근입되지 않은 경우,  $\alpha = 1$ 인 경우는 말뚝이 전근입 상태인 경우를 의미한다. 또한 상대강성  $\epsilon$ 은 5, 500 및 2000을 고려하였다.

이 연구에서 택한 상대강성  $\epsilon = 5$ 는 강성 말뚝 (rigid pile),  $\epsilon = 500$ 은 반강성 말뚝(semi-rigid pile),  $\epsilon = 2000$ 은 연성 말뚝(flexible pile)에 해당된다<sup>(2)</sup>. Table 2~5에서 근입비  $\alpha = 0$ 인 경우 상대강성  $\epsilon$ 의 크기에 관계없이 무차원 고유진동수가 일정하다.

Table 2에서 말뚝 하단의 회전스프링계수  $k_r$ 이 클수록 무차원 고유진동수가 크음을 알 수 있다.

Table 3, 4에서 질량비  $m$ , 무차원 질량관성모멘트  $j$ 가 클수록 무차원 고유진동수  $C_i$ 는 작음을 알 수 있다.

Table 5에서 이심률  $e$ 가 클수록 제1무차원 고유진동수는 작지만, 제2, 3 무차원 고유진동수에서는 반대 현상을 보임을 알 수 있다.

Table 2~5에서 근입비  $\alpha$ 가 클수록, 상대강성  $\epsilon$ 이 클수록 무차원 고유진동수가 크음을 알 수 있다.

Figs. 2, 3은 각각 ( $m = j = e = 0$ )과 ( $m = j = 1, e = 0.05$ )인 경우 회전스프링계수  $k_r$ 과 근입비  $\alpha$ 에 따른 무차원 고유진동수비  $C_i/C_{oi}$ 의 contour map을 나타낸 것이다. 여기서  $C_i$ 는 대응되는 조건을

갖는 말뚝의 무차원 고유진동수를 의미하며,  $C_{oi}$ 는 말뚝이 근입되지 않은 경우 즉  $\alpha = 0$ 에 대한 무차원 고유진동수로서 Table 2에 보여진 값이다.

Figs. 2, 3에서 모든 조건에 대한 무차원 고유진동수비  $C_i/C_{oi}$ 는 “1”이상이어서 근입을 고려하면 근입되지 않은 경우에 비해 무차원 고유진동수가 항상 크음을 알 수 있다(Tables 2~5에서 고찰한 내용과 동일). 그리고 근입비  $\alpha$ 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수비는 증가하며, 회전스프링계수  $k_r$ 이 증가하는 경우 무차원 고유진동수비는 감소하고, 상대강성  $\epsilon$ 이 클수록 무차원 고유진동수비가 크음을 알 수 있다.

Figs. 4, 5는 각각 ( $m = j = e = 0$ )과 ( $m = j = 1, e = 0.05$ )인 경우 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 (a)는  $k_r = 1$ , (b)는  $k_r = 10^8$ 에 대한 결과이며, 실선으로 연결된  $\circ, \triangle, \square$ 는  $\alpha = 1$ , 점선으로 연결된  $\bullet, \blacktriangle, \blacksquare$ 는  $\alpha = 0.5$ 에 대한 결과이다. 여기서 각 모드에 대응하는 고유진동수는 Table 2에 수록되어 있다.

#### 4. 결 론

이 연구는 상단에 집중질량을 갖는 근입 말뚝의 진동특성에 관한 연구이다. 이 논문에서는 말뚝이 근입된 지반을 Winkler모형으로 이상화하였으며, 대응하는 단부조건에 따른 경계조건을 적용하여 지배 미분방정식을 수치해석하였다.

해석 결과로서 회전스프링계수, 상대강성, 근입비, 질량비, 무차원 질량관성모멘트 및 집중질량의



이심률에 따른 최저차 3개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 구하고, 무차원 변수들의 변화가 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다.

회전스프링계수, 상대강성 및 근입비가 클수록 무차원 고유진동수가 크며, 질량비 및 무차원 질량 관성모멘트가 클수록 무차원 고유진동수가 작음을 알 수 있었다. 집중질량의 이심률이 클수록 제1 무차원 고유진동수는 작지만, 제2, 3 무차원 고유진동수에서는 반대 현상을 보임을 알 수 있었다.

또한 근입비가 증가하는 경우 무차원 고유진동수비( $C_i/C_{oi}$ )는 증가하며, 회전스프링계수가 증가하는 경우 무차원 고유진동수비는 감소하고, 상대강성이 클수록 무차원 고유진동수비가 큼을 알 수 있었다.

### 참 고 문 헌

(1) Nielsen, M. T., 1982, "Resistance of a Soil Layer to Horizontal Vibration of a Pile," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 497~510.

(2) Valsangkar, A. J. and Pradhanang, R., 1987, "Effect of Foundation Continuity on Free Vibration of Partially Supported Piles," *Proceedings of the 5th Canadian Conference on Earthquake Engineering*, Ottawa, pp. 471~474.

(3) West, R. P. and Pavlovic, M. N., 1999, "A Parametric Study of the Clustering of Modes in the Vibration of Partially Embedded Beams," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 41, pp. 547~559.

(4) Shin, S. C., Jin, J. K., Oh, S. J. and Park, K. K., 2002, "Free Vibration Characteristics of Partially Embedded Piles," *Proceedings of the KSNVE Spring Annual Conference*, pp. 435~440.

(5) Catal, H. H., 2006, "Free Vibration of Semi-rigid Connected and Partially Embedded Piles with the Effects of the Bending Moment, Axial and Shear Force," *Engineering Structures*, Vol. 28, pp. 1911~1918.

(6) Bhattacharya, S., Adhikari, S. and Alexander,

N. A., 2009, "A Simplified Method for Unified Buckling and Free Vibration Analysis of Pile-supported Structures in Seismically Liquefiable Soils," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 29, pp. 1220~1235.

(7) Alexander, N. A., 2010, "Estimating the Nonlinear Resonant Frequency of a Single Pile in Nonlinear Soil," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 1137~1153.

(8) Selvadurai, A. P. S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-foundation Interaction*, Elsevier.

(9) Bowles, J. E., 2006, *Foundation Analysis and Design*, 5th Edition, McGraw-Hill.

(10) Holloway, R., 1991, *Foundation and Structural Problems*, Blackwell Scientific Publications.

(11) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, Jr., W., 1974, *Vibration Problems in Engineering*, 4th Edition, John Wiley & Sons.

(12) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 2000, "Free Vibrations of Non-circular Arches with Non-uniform Cross-section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 4871~4891.

(13) Lee, B. K., Lee, T. E., Yoon, H. M. and Choi, J. M., 2010, "Free Vibrations of Tapered Circular Arches with Constant Volume," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 20, pp. 144~152.

(14) Wu, J.-S. and Hsu, S.-H., 2006, "A Unified Approach for the Free Vibration Analysis of an Elastically Supported Immersed Uniform Beam Carrying an Eccentric Tip Mass with Rotary Inertia," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 291, pp. 1122~1147.

(15) Yokoyama, T., 1988, "Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation," *Computers & Structures*, Vol. 28, pp. 207~216.

(16) Li, W. L., 2000, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, pp. 709~725.