대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.3, 411-424. Sep 2010

# 분할과 반복 조작을 통한 분수지도 탐구

최 근 배*

이 연구는 Steffe의 분수 조작과 스킴의 바탕이 되는 분할 및 반복과 관련된 예비 초등교사가 지니고 있는 개념 인식도를 분석하고 이를 통해 약간의 교육적 시사점을 얻고, 분할과 반복의 방법이 사용될 수 있는 실제적인 응용의 일환으로, 나누는 수가 분수인 분수 나눗셈과 관련된 초등 수학교과서 내용을 재구성하는 예시를 제공하고자 한다.

## I. 서론

분수(fraction)는 초등학교 수학에서 학생들이 가장 이해하기 어렵고 또한 배우기 힘든 개념 중 하나이다. 실제로, 분수 개념 자체가 여러 가지의 복합적인 의미를 가지고 있어서 이해하기 어려울 뿐만 아니라 학생들이 이러한 어려운 개념을 진정으로 이해할 수 있는 방식으로 학습할 기회를 갖지 못하고 있으며(정은실, 2006) 단지 도구적 학습의 기능적인 면을 강조하는 경향이 있다.

Siebert & Gaskin(2006)은 "분수를 더하거나 빼기를 할 때, 분수의 곱이나 나누기를 할 때와는 달리, 공통분모를 찾아야 한다. 그리고 공통분모를 찾았을 때, 분수곱셈의 경우는 분자와 분모를 끼리끼리 곱한다는 사실에도 불구하고, 분자끼리 더하거나 빼야 한다(분모는 아님). 또한 분수의 나누기를 할 때는 분자와 분모를 끼리끼리 나누지는 않는다.[1]"라고 의미 없고 형식적인 분수연산이 어떻게 나타날 수 있는가를 강조하고 있다. 즉, 학생들이 분수와 분수연산의 의미가 무엇인지를 이해하는 데 적절한 도움을 받지 못한다면, 분수인식의 문제를 쉽게 초래할 수 있음을 강조하고 있다.

분수는 크게 부분-전체의 관계, 몫, 비율, 양의 측정 또는 연산자 등의 다양한 의미를 지니고 있으며 우리의 교육과정뿐만 아니라 NCTM(2000)의 수와 연산영역 규준에서 학생이 분수에 대한 다양한 의미를 개발할 필요가 있다는 점을 강조하고 있다. 그러나 불행하게도, 분수를 학습할 때, 학생들은 앞에서 언급한 분수개념의 다양한 의미를 쉽게 잊어버리고 대신 단지 분수를 두 자연수의 독립된 결합(분자와 분모를 분리하여 생각)으로 인식하는 경향이 있다. 이러한 경향은 두 분수의 덧셈에서 분자와 분모를 끼리끼리 더하여 계산하는 오류를 초래할 수 있다. 결국, 이러한 점은 학생들의 인지구조가 이전에 배운 자연수 연산의 관념에서 벗어나지 못함을 나타내고 있다.[2]

이 논문에서는 앞에서 언급한 분수가 지니고 있는 다양한 의미의 밑바탕이 되는 두 가지의

* 제주대학교 (kbchoe@jejunu.ac.kr)

1) '분수의 나눗셈을 할 때 분자와 분모를 끼리끼리 나누지 않는다.'는 아마도 초등학교에서 분수의 나눗셈을 이러한 방식으로 다루지 않는다는 의미인 것 같다.

2) 어느 야구 선수가 어제는 3타수 1안타, 오늘은 2타수 1안타를 쳤다. 따라서 어제와 오늘 5타수 2안타를 기

활동적 이미지인 분할하기(partitioning)과 반복하기(iterating) (남진영, 2008; Norton & D'Ambrosid, 2008; Norton & McCloskey, 2008; Siebert & Gaskin, 2006; Steffe, 2002; Olive, 2002)를 중심으로, 예비 초등 교사들이 지니고 있는 관념을 조사하고 이로부터 교육적 시사점을 얻고자 한다. 또한 분할과 반복의 방법이 사용될 수 있는 실제적인 응용의 일환으로, 나누는 수가 분수인 분수 나눗셈과 관련된 초등 수학교과서 내용을 재구성하는 예시를 제공하고자 한다.

## II. 분수 조작과 스킴

### 1. 분수 조작

분수와 관련된 중요한 조작활동은 크게 4가지로 요약할 수 있다(Norton & McCloskey, 2008).

첫째, 단위화하기(unitizing): 사물이나 사물들의 모임을 단위 또는 전체로 다루는 것을 의미한다.

둘째, 분할하기(partitioning): 단위나 전체를 합동인 부분으로 조각내는 활동을 의미한다.

셋째, 재편하기(disembedding): 전체를 본래대로 유지하면서 머릿속 상상으로 분할된 전체에서 몇 개의 부분을 복재하여 꺼내는 조작을 의미한다. 예를 들어, 학생들은 전체를 4-부분으로 등분할하고 4-부분 중에서 3개를 재편함으로써 $\frac{3}{4}$을 만들 수 있다. Steffe & Olive(1996)는 "재편하기(disembedding)는 부분-전체의 비교에 바탕이 되는 근본적인 정신조작이다."고 주장하고 있다.

끝으로, 반복하기(iterating): 부분과 동일한 크기의 복재본을 만들기 위하여 되풀이하기(repeating)의 조작을 의미한다.

### 2. 분수 스킴

이 절에서는 Steffe의 몇 가지의 분수 스킴에 대하여 알아본다.

#### 가. 분할 스킴

분할 스킴(partitioning scheme)은 분수와 관련된 모든 조작활동의 가장 근본적인 스킴이다. 분할 스킴은 두 가지의 스킴으로 설명할 수 있다.

- 동시분할 스킴(simultaneous partitioning scheme): 동일한 크기의 부분들을 만들 목적으로, 합성단위(composite unit)[3]를 분할 템플릿으로 사용하여 정신적으로 합성단위를 연속된 전체에 투사하는 것을 의미한다. 예를 들어, 학생들은 전체에서 3개의 동일한 크기의 자리를 차지하는 단위를 상상함으로써 전체에서 3개의 크기가 같은 부분을 만들 수 있다.
- 등분할 스킴(equi-partitioning scheme): Steffe & Olive는 전체를 분할하고, 그 중 일부분을 꺼내고, 꺼내어진 부분을 여러 개 복제 반복하여 분할 전의 전체를 재조직할 수 있으면, 등분할 스킴이 구성되었다고 본다.

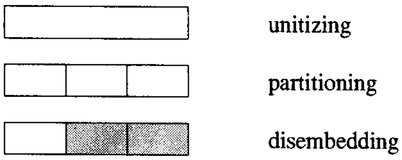
---

록했다(김연식·박영배, 1996, p.103-104 참조): $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$

3) 전체를 한 단위이면서 동시에 단위 여러 개의 모임이라 보는 관점이다. Steffe는 분수를 세기(counting) 스킴으로부터 재조직된 스킴으로 보고 있으며, 분수 스킴의 구성에 작용하는 세기스킴을 ENS(the Explicitly nested Number Sequence) 스킴이라고 부른다. 예를 들어, 3은 하나의 전체이면서 동시에 단위가 3개 모여 있는 것으로 간주하는 것이 바로 ENS이다. Steffe와 Olive는 분수를 구성한다는 것은 ENS에서 발전된 FCNS(Fractional Connected Number Sequence) 스킴을 구성하는 것이라 생각하였다(Olive & Steffe, 2002, p. 437 [그림 8] 참조). 예를 들어, $\frac{1}{8}$을 단위로 $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$를 만드는 것이다. $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$는 $\frac{1}{8}$이 여러 개 모여 만들어지는 하나의 전체로서 '합성단위'이다(남진영, 2008, p.68-70).

나. 부분-전체 스킴

주어진 전체를 등분할하고, 그 중에서 일부를 꺼낸다. 예를 들어, $\frac{2}{3}$를 만들기 위해서 주어진 바를 3-부분으로 등분할 한 후 그 들 중 2개를 꺼낸다. 이 스킴은 세 가지의 조작으로 설명된다. 먼저, 전체를 인식하기(단위화하기, unitizing), 둘째 전체를 등분할하기, 끝으로 분할된 전체에서 일부를 재편하기



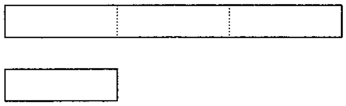

[그림 II-1] 부분-전체 스킴

부분-전체 스킴은 분할 스킴의 재조직화 하는 데 그 바탕을 두고 있으며, 특히 분수를 기호화하기(분자, 분모), 읽기(out of; …중의 …)를 신중히 다루지 않으면 등분할 스킴을 간과하기 쉽다. 예를 들어, $\frac{2}{3}$를 똑같이 나눈 3조각 중에서 2조각의 의미보다 단순히 '3조각 중의 2조각'으로 인식할 수 있다.

다. 분할 단위분수 스킴

주어진 단위분수 부분과 분할되지 않은 전체에 대하여, 부분(단위분수 부분)을 반복하여 전체를 재생성함으로써 전체에 대한 부분(단위분수 부분)의 상대적인 크기를 생성할 수 있을 때, 분할 단위분수 스킴(partitive unit fractional scheme)이 형성된 것으로 간주한다.

분할 단위분수 스킴은 등분할 스킴의 재조직화에 기초하고 있음을 알 수 있고, [그림 II-2]에서와 같이 이 스킴의 근본적인 목적은 반복(iterating)을 통해서 전체에 대한 부분의 상대적인 크기를 결정하는 것이다. 또한 분할 단위분수 스킴은 양의 측정 관점에서 분수를 인식할 수 있는 활동적인 조작과 관계된다.

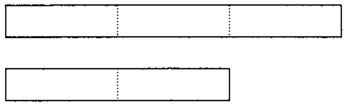


[그림 II-2] 짧은 막대기의 크기는 $\frac{1}{3}$

라. 분할 분수 스킴

분할 분수 스킴(partitive fractional scheme)은 분할 단위 분수 스킴의 일반화이다.

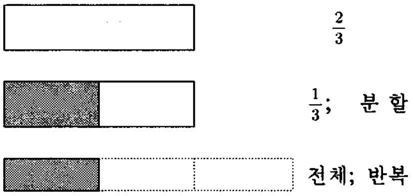
이 스킴은 단위분수와 전체사이의 관계를 유지하는 동안, 반복을 통한 단위 분수들로부터 합성분수(예를 들어$\frac{2}{3}$는 2개의 $\frac{1}{3}$의 결합, 각주 1) 참고)를 만드는 것을 포함한다. 또한 분할 분수 스킴은 두 가지 수준에서 단위 조정(units coordination; Norton & McCloskey, 2008)을 포함한다. [그림 II-3]을 예로 설명하면, 단위분수의 2회 반복으로서의 2개의 $\frac{1}{3}$, 단위분수의 3회 반복으로서의 전체를 조정해야만 한다.



[그림 II-3] 짧은 막대기의 크기는 $\frac{2}{3}$

마. 역 분할 분수 스킴

역 분할 분수 스킴(reversible partitive fractional scheme; Norton & D'Ambrosio, 2008)은 분수부분으로부터 전체를 재생성하기 위해서, 역으로 분할 분수 스킴을 사용하는 것이다. 이 경우 [그림 II-4]에서와 같이 세 가지 수준의 단위 조정이 필요함을 알 수 있다.

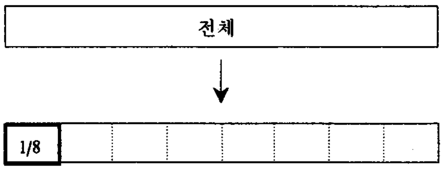
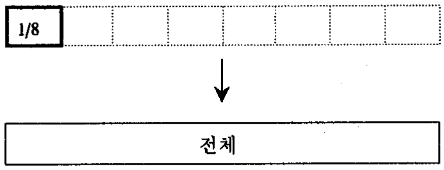
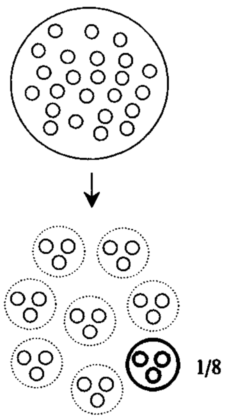
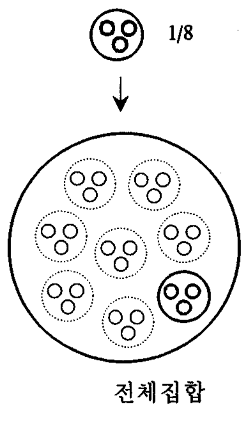



[그림 II-4] 역 분할 분수 스킴: 분할과 반복을 통한 전체 막대기 찾기[4)]

### 3. 분할과 반복

앞선 두 절에서 논의된 분수 조작 스킴에서, 단위분수를 이용한 '분할'과 '반복' 조작이 분수의 개념을 이해하는데 가장 근본적인 활동이 됨을 보았다.

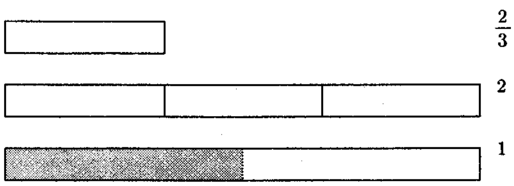
실제로, 단위분수를 이용한 분할과 반복의 활동은 분수를 이해하고, 효험이 있는 중요한

| | **분할하기**<br>$\frac{1}{8}$은 전체를 8개로 등분할하고, 그 중에서 1개를 택함으로서 얻어진 양이다. | **반복하기**<br>$\frac{1}{8}$은 그 양의 8개의 복사본을 병합하여 전체를 만들 수 있는 양이다. |
|---|---|---|
| 면적 모델 |  |  |
| 집합 모델 |  |  |

[그림 II-5] 분할과 반복으로부터의 분수 $\frac{1}{8}$ (Siebert & Gaskin, 2006; Steffe, 2002)

---

4) 3장의 분석에 의하면 아래와 같은 방식으로 부분으로부터 전체를 찾는 예비 초등교사도 있었다([그림 III-2] 참조). 실제로 [그림 II-4]와 분할과 반복의 횟수는 같지만 단위분수를 다루는 관점과 초등학교 학생의 입장에서 어려움의 정도는 다르다. 실제로, 아래의 경우에서는 동수누가의 연산이 필요하다.



것으로 오래 동안 인식되어 왔지만, 분수와 분수연산의 설명으로서 이러한 활동의 힘은 거의 인식되지 못했다.

분수 $\frac{1}{8}$을 생각해보자. 이 분수는 무엇을 의미하는가? 어떻게 그것을 묘사할 수 있는가? 분할과 반복의 활동의 방법은 다음과 같은 두 가지의 유용한 해석을 가진다(Siebert & Gaskin, 2006).

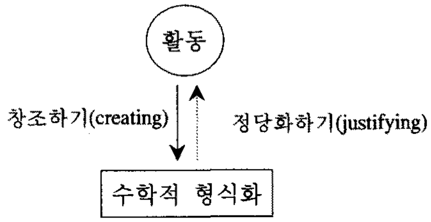
- 분할: $\frac{1}{8}$은 전체를 8개로 등분할하고, 그 중에서 1개를 택함으로서 얻어진 양이다.
- 반복: $\frac{1}{8}$은 자신의 8개 복사본을 만들고 병합하여 전체를 만들 수 있는 양이다.

[그림 II-5]에서 첫 번째 설명은 $\frac{1}{8}$을 만드는데 사용할 수 있는 활동을 하며, 두 번째 설명은 그 양이 정확히 $\frac{1}{8}$이라는 사실을 확신하는데 사용할 수 있는 활동이다. 이러한 두 가지로 $\frac{1}{8}$을 개념화함으로써, $\frac{1}{8}$을 만들고(Creating), 만든 양이 정확히 $\frac{1}{8}$이라는 정당화(Justifying)의 구성적 방법을 자동적으로 가진다. 다시 말해서, $\frac{1}{8}$에 관한 이러한 사고의 방법은 활동과 정당화 모두를 위한 도구를 제공한다.

분할과 반복 조작을 통한 분수지도가 줄 수 있는 교육적 시사점을 간단히 요약하면 다음과 같다.

첫째, 초등 수학에서는 구체적 조작활동을 통하여 개념을 형성 또는 형식화하는 소위 창조적 활동은 많이 하지만, 형성된 개념을 반성하는 정당화 활동은 소홀히 다루는 경향이다.

이러한 점에서 분수개념형성을 위한 분할과 반복 활동의 강조는 결국, 수학적 개념형성을 위한 창조적 활동과 형성된 개념의 증명(비록 비형식적 연역 또는 조작적 검정일지라도)을 위한 정당화 활동을 경험시킬 수 있다([그림 II-6] 참조).




[그림 II-6] 교수-학습구조(최근배, 2006)

둘째, 자연수의 구성은 1을 생성원 즉, 바탕으로 하듯이 분수에서 단위분수는 가장 기본적인 단위이므로 이를 바탕으로 분수를 구성하는 것이 분수에 대한 개념을 더 분명하게 하는 것이다(정은실, 2006). 따라서 단위분수를 기본으로 한 분할과 반복 활동은 분수개념형성에 중요한 역할을 할 수 있다.

끝으로, 우리 교과서의 단위분수를 바탕으로 한 분수의 개념형성과 관련된 내용이 빈약하다는 점을 고려하면 이를 보완하는 관점의 일환으로 분할과 반복의 조작활동이 하나의 좋은 대안이 될 수 있다.

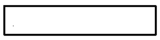
## III. 예비 초등교사의 분할과 반복 조작의 관념 조사 및 분석

### 1. 조사 대상 및 방법

J대학교 2010년도 1학기에 개설된 교과목인 <초등수학교육 1>을 이수하고 있는 예비 초등교사 3학년 중에서 연구자의 수강생 54명을 대상으로 하여, 문제해결 전략의 일환으로 다음과 같은 문제(Siebert & Gaskin, 2006)를 제시하

고 학생들의 응답 결과를 분석하였다.

[문제] '그림 그리기' 전략을 이용하여 다음 문제를 해결하여라.

> 아래의 그림에 있는 막대기는 $\frac{3}{8}$을 나타낸다.
>
> 
>
> $\frac{4}{3}$와 동치인 막대기를 만들어라.

## 2. 분석

연구대상 54명 중 순수 분할·반복의 방법을 사용한 학생은 23명, 통분의 방법은 18명, 결과를 해석하기 모호한 경우 3명, 틀린 사람 10명으로 나타났다. 이러한 범주분류에 있어서 먼저 통분의 관념이 인식되고 그 후 분할·반복의 방법이 사용된 경우, 통분의 관념이 선행되었다는 관점에서 통분의 방법으로 분류하였다.

주목할 점은 문제를 해결하지 못한 학생이 10명(19%) 정도로 나타난 것은 다소 의외의 결과로 해석된다.

<표 III-1> 학생 54명의 반응 결과

| 경우 | 학생수(%) |
|---|---|
| 순수 분할·반복 | 23(43%) |
| 통분 | 18(33%) |
| 틀림 | 10(19%) |
| 모호 | 3(5%) |
| | 54(100%) |

### 가. 순수 분할·반복의 방법

통분을 이용하지 않고 단지 분할·반복의 방법만을 사용한 학생의 경우를 살펴보면, 대다수의 학생(23명 중 17명)이 단위분수를 효율적으로 잘 사용하고 있으며, 그 나머지 6명은 단위분수의 사용에 있어서 효율적이지 못하였다. 여기서 말하고 있는 효율성이란 앞에서 논의한 역 분수 분할 스킴(reversible partitive fractional scheme)의 사용 여부로 판단한다.

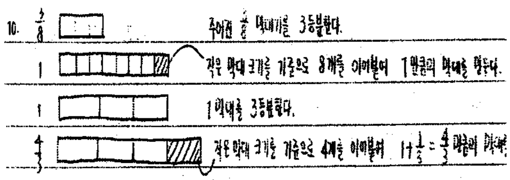
#### 1) 단위분수

주어진 $\frac{3}{8}$의 막대를 3등분 한 후 $\frac{1}{8}$ 크기의 막대를 만들고, $\frac{1}{8}$ 크기의 막대를 8회 (복사)반복하여 전체크기(1)의 막대를 생성한다(역 분할 분수 스킴). 그 후 다시 전체를 3등분 한 후 $\frac{1}{3}$ 크기의 막대를 만들고(부분-전체 스킴), 이것을 4회 반복하여 $\frac{4}{3}$와 동치인 막대를 만든다. 즉,

$$\frac{3}{8} \xrightarrow[\text{3등분}]{} \frac{1}{8} \xrightarrow[\text{8회반복}]{} 1 \xrightarrow[\text{3등분}]{} \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{4}{3}$$

역 분할 분수 스킴

[그림 III-1]은 실제 학생의 반응 결과로 단위분수를 바탕으로 분할과 반복을 효율적으로 사용하고 있음을 보여주고 있다.



[그림 III-1] 분할·반복의 방법 1

Olive & Steffe는 분할과 반복 조작들의 합성을 '분리조작'(spliting operation)이라 부른다 (Olive & Steffe, 2002, p. 436 [그림 8] 참조).

#### 2) 역 분할 분수 스킴 부족

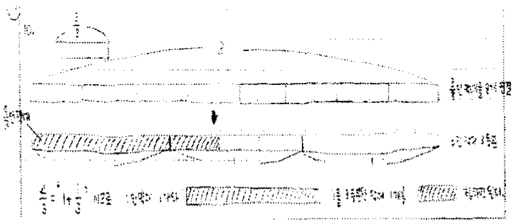
역 분할 분수 스킴이 부족한 6명 중 4명은

아래와 같은 절차로 문제를 해결하였다. 부분으로부터 전체를 구하는 조작을 하고 있지만 역 분할 분수 스킴을 사용하지 않고 있다.

$$\frac{3}{8} \xrightarrow[\text{8회 반복}]{} 3 \xrightarrow[\text{3등분}]{} 1 \xrightarrow[\text{3등분}]{} \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{4}{3}$$

이 경우의 이들 학생들은 1)의 범주에 속한 학생들과는 달리 단위분수와 관련된 인식이 부족함을 알 수 있다. 실제로, 점선 상자안의 내용은 단위분수의 사용이 없음을 보여주고 있다. 또한 분수를 의식적으로 자연수로 만들고자하는 관념이 $\frac{3}{8}$을 8번 더하는 동수누가의 활동을 요구한다.5)

[그림 III-2]는 학생의 실제 반응 결과이다.

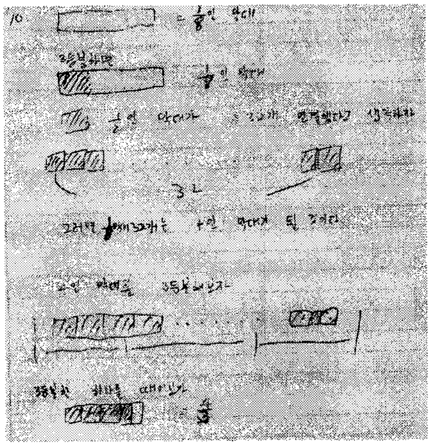


[그림 III-2] 분할 · 반복의 방법 2

또한 6명의 그 나머지 2명 중 1명은 단위분수의 관념보다 등분할 (또는 몫) 관념이 선행함을 보여준다. 실제로, 이 학생은 $\frac{4}{3}$를 $\frac{1}{3}$이 4개로 해석하기 보다는 4를 3등분한 것 중 하나(몫)로 간주한다. 즉,

$$\frac{3}{8} \xrightarrow[\text{3등분}]{} \frac{1}{8} \xrightarrow[\text{32회 반복}]{} 4 \xrightarrow[\text{3등분}]{} \frac{4}{3}$$

[그림 III-3]은 학생의 실제 반응 결과이다.



[그림 III-3] 분할 · 반복의 방법 3

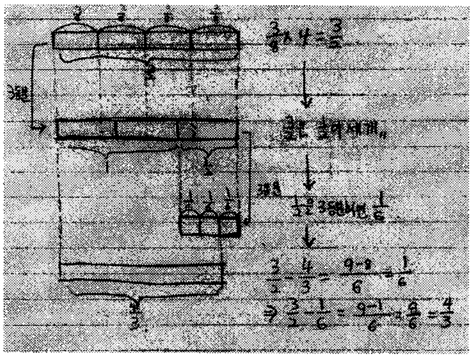
또 다른 한명은 특이한 방식으로 답을 구하고 있다. 즉, $\frac{3}{8}$으로부터 반복과 분할을 통해 $\frac{1}{2}$을 찾아내어 문제를 해결하고 있다.

$$\frac{3}{8} \xrightarrow[\text{4회 반복}]{} \frac{3}{2} \xrightarrow[\text{3등분}]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{3등분}]{} \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{4}{3}$$

[그림 III-4]는 학생의 실제 반응 결과로 형식적 계산을 이용한 조작의 성격이 강하다.

---

5) 앞선 논의에서 $\frac{1}{8}$로부터 1을 만드는 경우는 2장에서 $\frac{1}{8}$과 관련된 두 가지 이미지 중 '반복하기(창조하기, [그림 II-5])'의 이미지가 잘 형성되었다면 진분수 $\frac{3}{8}$으로부터 3을 만드는 경우보다 인지적 갈등이 덜하다.

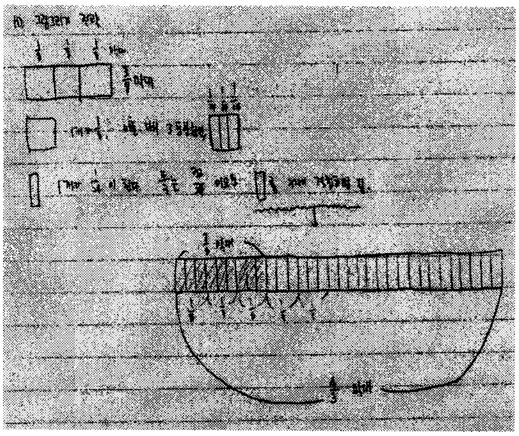


[그림 III-4] 분할 · 반복의 방법 4

나. 통분의 방법

통분의 방법으로 문제를 해결한 학생 대부분은 주어진 막대 $\frac{3}{8}$과 구하고자 하는 막대 $\frac{4}{3}$를 통분하는 방법을 이용하여 구하고 있다. 즉, $\frac{3}{8}$을 $\frac{9}{24}$로, $\frac{4}{3}$을 $\frac{32}{24}$로 동치분수화 하여 문제를 해결하고 있다.

[그림 III-5]는 학생의 실제 반응 결과이다.



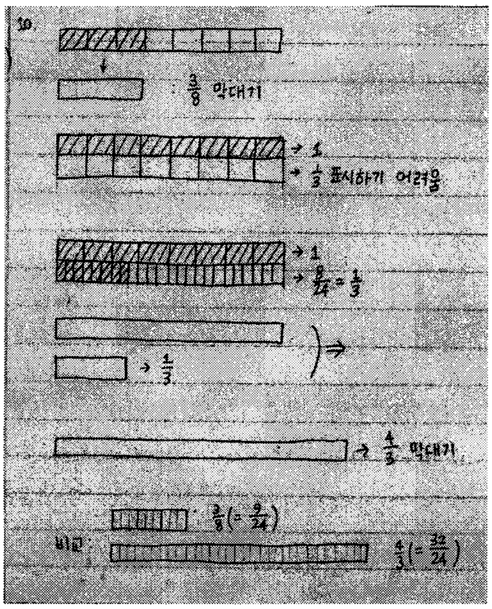
[그림 III-5] 통분전략 1

[그림 III-6]의 경우, 분할되어 있지 않은 전체를 등분할하는 경우와 분할된 전체를 등분할하는 경우를 다르게 인식하고 있음을 볼 수 있다. 즉, [그림 III-6]에서

· 분할되어 있지 않은 막대 $\frac{3}{8}$을 3등분하여 $\frac{1}{8}$을 찾는 경우와

· 분할된 전체 $\frac{8}{8}$을 3등분하여 $\frac{1}{3}$을 구하는 경우 ([그림 III-6]에서 "$\frac{1}{3}$표시하기 어려움" 참조)

이 두 경우를 다르게 인식하고 있음을 보여주고 있다. 여기서 분할되지 않은 전체에서는 등분을 하여 분수부분을 문제없이 찾고 있지만, 분할된 전체에서는 왜 정확히 분수부분의 위치를 찾으려고 하는가? [그림 III-1]처럼 $\frac{8}{8}$을 그냥 분할되지 않은 전체(1)로보고 3등분하면 안되는가? 아마도 이러한 이유는 통분의 관념이 영향을 끼치고 있는 것처럼 생각된다.

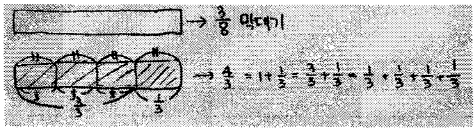


[그림 III-6] 통분전략 2

다. 틀린 경우

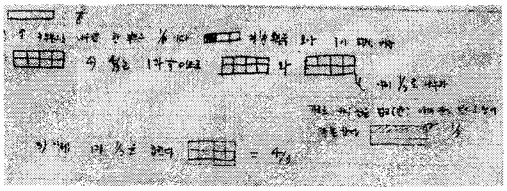
답이 틀린 경우를 분석해 보면, 10명 중 6명은 주어진 길이 $\frac{3}{8}$ 막대와는 무관하게 $\frac{4}{3}$막대를 임의대로 만들고 있다.

[그림 III-7]은 학생의 실제 반응 결과이다.

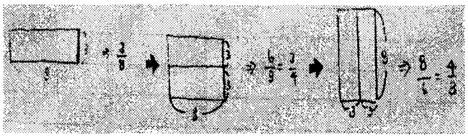


[그림 III-7] 틀린 반응 1

나머지 4명 중 3명은 길이 모델을 넓이 모델로 착각하는 오류([그림 III-8] 참조)를 범하고 있으며, 1명은 교육대학 3학년임에도 불구하고 도저히 이해할 수 없는 분수와 관련된 관념([그림 III-9] 참조)을 가지고 있다.



[그림 III-8] 틀린 반응 2



[그림 III-9] 틀린 반응 3

앞선 분석 가)와 나)에서 [그림 III-1], [그림 III-5], [그림 III-6]을 비교해 보면, [그림 III-1]이 다른 두 경우에 비해 훨씬 더 효율적인 조작임을 보여주고 있다. [그림 III-5]와 [그림 III-6]의 경우는 통분의 관념이 분할·반복의 관념에 선행하여 영향을 미치고 있음을 보여준다. 실제로, 앞 선 분석에서 단위분수를 바탕으로 분할과 반복을 방법을 효율적으로 사용한 경우는 31%(54명 중 17명)에 불과하다.

이러한 결과는 향후 초등학생을 가르치는 상황을 고려할 때, 예비 초등교사들이 지니고 있는 분수와 관련된 인식을 교사교육의 관점에서 제고할 필요가 있다.

# IV. 응 용

제3장의 분석 결과에 따르면, 예비 초등학교 교사가 지닌 분할과 반복의 조작적 활동 관념이 미비하였고, 또한 분할과 반복의 조작적 활동이 만족할 만한 수준인 예비초등학교 교사의 비율이 생각보다 낮았다.

이 장에서는 분수 영역에서 분할과 반복의 조작적 활동을 경험할 수 있도록 실제적인 예시를 제공하고자 한다. 특히, 7차 교육과정 <6-나> 단계 1단원 1-2 차시인 나누는 수가 분수인 경우의 내용을 중심으로, 분할과 반복의 조작적 활동방법으로 지도 내용을 설명 하고자 한다.

## 1. 분수의 덧셈, 뺄셈 그리고 곱셈

분수의 덧셈과 뺄셈인 경우, 우리의 교과서에 일반적으로 다루는 방법을 단위분수 중심의 분할과 반복의 방법으로 쉽게 변형할 수 있다.

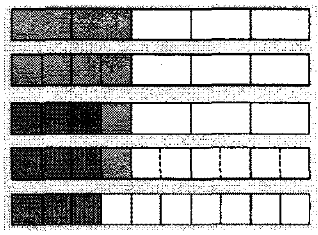
분수의 곱셈인 경우는 연산자의 관점6)으로 설명이 가능하다.

## 2. 분수의 나눗셈

먼저 나누는 수가 자연수인 경우에는 분할과 반복의 방법이 항상 가능하다.

이제, 나누는 수가 분수인 경우를 생각하자.

6) $a$라는 수를 함수적 관점 $f(x)=ax$로 취급한다. 예를 들어, $\frac{2}{5}$는 $f(x)=\frac{2}{5}x$로 본다. 보통 연산자 관점은 이산 모델에서 주로 사용하지만, 여기서는 연속 모델인 경우도 포함한다.



[그림 IV-1] $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$[7] (Siebert & Gaskin, 2006)

7차 교육과정 <6-나> 단계 1단원 '분수의 나눗셈' 2차시 내용(1차시 내용도 가능)을 분할과 반복의 조작 관점에서 생각해보자.

일반적으로, 우리의 경우, 나누는 수가 분수인 경우 포함제(측정)의 개념으로 설명[8]하고 있으며, 이분모인 경우 통분을 이용하여 동분모인 경우로 바꾸어 문제를 해결한다([그림 IV-2] 참조).

1 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$가 얼마인지 알아보시오.


※ $\frac{3}{4}$을 $\frac{2}{5}$씩 자르면 몇 도막이 되고 얼마가 남는지 곧바로 알 수 있습니까?

※ 알기 쉽게 하려면 어떻게 해야 한다고 생각합니까?

※ $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{5}$를 통분하여 보시오.

[그림 IV-2] $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$ (교과부, 2006c)

또한 나누는 수가 분수인 경우 이를 뒤집어 곱한다는 원리는 학생들의 구체적 조작활동을 통하지 않고, 단지 [그림 IV-3]과 같이 형식적인 대수적 조작 활동을 사용하고 있다.

이제, 분할과 반복의 방법을 이용한 구체적 조작 활동을 해보자.

나눗셈은 일항연산(unary operation)으로 취급할 수도 있지만 일반적으로 곱셈의 역연산으로

3 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 계산하는 방법을 알아보시오.

※ $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{5}$를 통분하면 $\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}$입니다. 이것을 이용하여 나눗셈 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 계산하는 방법을 생각해 보시오.

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3\times5}{4\times5}\div\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{3\times5}{2\times4}$$

그런데 $\frac{3\times5}{2\times4}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$이므로, $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$입니다.

※ 위의 계산 과정을 보고, 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 계산하는 방법을 알아보시오.

[그림 IV-3] $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$ (교과부, 2006c)

간주하는 경향이 많다. 초등학교 수학에서도 '나눗셈은 곱셈의 역연산이다.'라는 사실을 강조하고 있으며(교과부, 2007, p. 86),

$$a\div b=c \Leftrightarrow a=c\times b$$

주로 [그림 IV-4]와 같은 방법으로 형식화한다.

$$5\times3=15 \;\begin{cases} \rightarrow 15\div5=3 \\ \rightarrow 15\div3=5 \end{cases}$$

[그림 IV-4] 역연산(교과부, 2006b)

그리고 이들 관계의 이해를 위하여, [그림 IV-5] 같이 그냥 위치적 관점으로 표현하고 있다. 그러나 이와 같은 표현 방식에서는 나눗셈이 곱셈의 역연산이라는 관계가 잘 드러나 지 않는다.

$5\times3=15$ $\quad$ $3\times5=15$

$15\div5=3$ $\quad$ $15\div3=5$

[그림 IV-5] 역연산의 교사용 지도서 표현(교과부, 2006a)

7) 어순 문제로 미국의 경우는 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$이다.

8) 교사용 지도서(교육부, 2006)에서 등분제를 생각 할 수 없다고 유의점으로 강조하고 있다. 실제로, 우리나라와 미국의 교육과정의 경우 제수의 역수를 곱하는 등분제와 관련된 내용이 거의 없다.

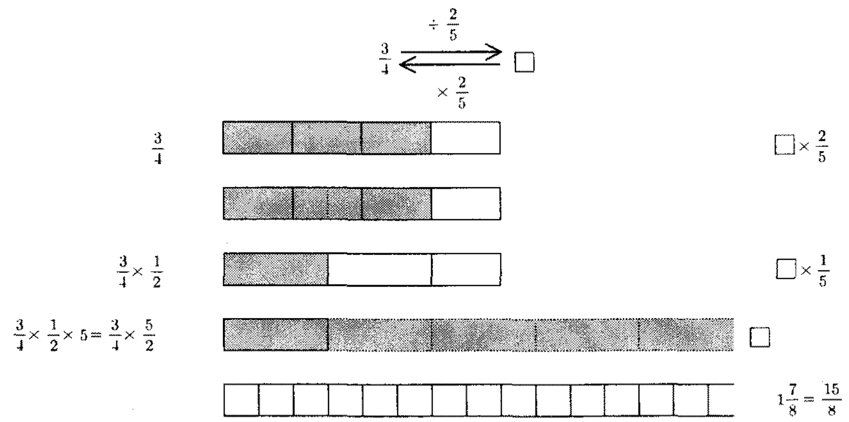
따라서 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 보다 효율적으로 이해하기 위해서는 [그림 IV-4] 및 [그림 IV-5]와 같은 형식보다는 [그림 IV-6]과 같은 방향성을 지닌 표현양식인 함수(연산자)적 형식이 보다 더 유리하다.

$$a \underset{\times b}{\overset{\div b}{\rightleftarrows}} c$$

[그림 IV-6] 역연산의 활동적 표현

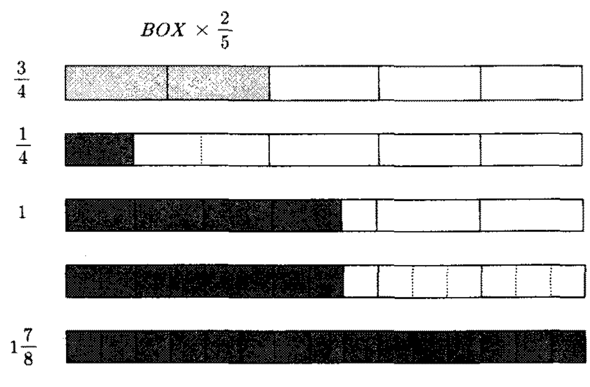
실제로, [그림 IV-4]와 같은 '형식적 고착 (formal abidance)'으로 인하여 함수(연산자)적인 문맥을 내포한 현상 속에서 함수의 역에 대한 이전의 경험이 상실될 수 있다(우정호, 2006, p. 372 참조).

역연산의 개념과 분할과 반복의 방법을 이용하면 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 분수인 경우에도 등분제를 사용할 수 있으며 또한 뒤집어 곱한다는 원리도, [그림 IV-3]과 같이 단순한 형식적 조작이 아니라, 구체적인 조작활동을 통하여 이해할 수 있다([그림 IV-7][9] 참조)는 교육적 시사점을 얻을 수 있다.




[그림 IV-7] 분할 · 반복; $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$

9) [그림 IV-7]과 같은 조작적인 방법을 사용하면 일반적인 분수의 나눗셈에서 나누는 수의 역수를 곱하는 원리를 발견할 수 있다. 예를 들어, 자연수로 나누는 경우도 가능하다. 또한 계산결과를 알기 위해서 다음과 같은 조작활동도 가능하다.



## V. 결론

원래 분수의 개념은 측정의 과정에서 발생(강홍규·고정화, 2003; 정은실, 2006)하였으며 이 경우 단위분수의 역할이 매우 중요하다. 이유는 측정을 위한 단위의 조정이 필요하기 때문이다.

또한 전통적으로 학교수학에서 분수는 아동들의 마음과 독립적으로 존재하는 대상이며 분수 모델을 해석하면서 그 의미가 구성된다고 여겨져 왔지만, 그보다는 분수를 학생들의 '조작활동의 산물'로 보아야 한다고 주장한다(Steffe, 2002; 남진영, 2008에서 재인용). 따라서 Steffe의 분수 스킴 형성에 분할과 반복의 조작활동이 중요한 역할을 하며, 그 바탕에는 단위분수가 있다.

우리나라 현행 초등학교 교과서를 살펴보면, 분수를 도입 할 때, 부분-전체 사이의 관계 상태를 나타내는 방식으로 도입하고 있으며, 단위분수를 바탕으로 분수를 구성해 나가는 활동은 부족하며 그 만큼 단위분수의 중요성이 간과될 수 있다.

단위분수와 관련된 분할과 반복 활동에 대한 예비초등교사 54명을 대상으로 한 앞선 분석에 따르면 약 43%의 학생이 효율적인 반응을 보여 주었다. 그러나 통분을 이용한 경우도 이 범주, 즉 분할과 반복 활동에 속한다고 볼 수 있지만 단위분수 개념이 미비한 경우가 많았다. 실제 엄격하게 따지면 54명 중 17명(31%)의 학생만 단위분수 개념을 효율적으로 사용하고 있다([그림 III-1] 참조). 또한 우려스러운 현실은 약 19%의 학생은 예비초등교사(대학 3학년)임에도 불구하고 분수와 관련된 분할과 반복의 활동을 의식적으로 잘 활용하지 못함을 보여 주었다.

이와 같은 예비초등교사를 대상으로 한 만족스럽지 못한 반응이 적절한 교육적 처방을 받지 못하면 결국 학교 현장에서 학교 수학 '전문가'로서 교사의 역할을 하지 못할 것이며 단지 교과서에 주어진 지식만을 전달하는 '기술자'와 같은 처지가 될 가능성이 있다. 실제로, 이 논문에 언급된 분석 대상자의 수업실습 참관(2010년 6월 21~7월 3일, 9회 참관, 5학년 분수 영역)에 따르면 수업의 수학 교과서 의존도가 높았으며 교사로서의 사고실험(교과과정 분석, 학습내용 분석 등)이 부족함을 드러내었다.

이 논문의 분석을 통해서 얻을 수 있는 교육적 시사점은 다음과 같다.

첫째, 예비초등교사를 대상으로 한 만족스럽지 못한 결과의 원인중 하나는 과거의 초·중등학교 시절의 학습경험에서 찾을 수 있다.즉, 조작적 활동보다 수학적 형식화와 산술의 기능적 측면을 강조한 영향이 원인이다(<표 III-1> 참조). 따라서 과거와 다른 현재의 활동 중심 초등학교 수학교육과 예비초등교사 분석을 바탕으로 초등교사 양성 대학에서의 단위분수 개념과 관련된 교육의 방향성을 얻을 수 있다.

둘째, 수학도 과학과 같은 실험적 사고가 필요하다는 것이다. 즉, 교과서의 내용을 교사 자신의 생각으로 재구성해보는 활동이 필요하며, 이를 통해서 학생들의 인지적 사고를 좀 더 효율적으로 파악할 수 있을 것이다. 교사의 사고실험의 강조는 우리의 교육현실과도 무관하지 않다. 현재 우리 아동들은 사교육 시장에서 수학을 기능적인 교과처럼 교육을 받고 있다. 특히, 초등학교의 경우는 그 정도가 심하다. 많은 학생의 경우 이미 형식화된 계산이 기능화 되어있다. 이와 같은 교육현실로 인하여, 조작활동의 수학적 번역이 형식화이지만, 학교에서 수학적 개념을 형성하기 위한 활동과 그 후 이를 통한 형식화의 과정이 맞지 않는 경우가 많다.

끝으로, 이 논문의 후속 연구로 실제 초등교사를 대상으로 한, 예비초등교사와의 비교분석과 이 논문에서 나타난 예비초등교사의 분수에 대한 분할·반복 조작 반응 결과에 따른 세부적인 질적연구가 요구된다.

## 참고문헌


교과부(2007). **초등학교 교육과정 해설(IV)-수학, 과학, 실과-**, 광주: 한솔사.

교육부(2006a). **수학 3-가 초등학교 교사용 지도서**, 서울: (주)천재교육.

교육부(2006b). **수학 3-가**, 서울: (주)천재교육.

교육부(2006c). **수학 6-나**, 서울: (주)천재교육.

강홍규 · 고정화(2003). 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의, **학교수학, 5**(3), 385-399.

김연식 · 박영배(1996). 수학 교수 · 학습의 구성주의적 전개에 관한 연구, **대한수학교육학회 논문집 6**(1) 91-110.

남진영(2008). **수학적 지식의 구성**, 서울: 경문사.

우정호(2006). **학교수학의 교육적 기초**, 서울: 서울대학교 출판부.

정은실(2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구, **학교수학, 8**(2), 123-138.

최근배(2006). 초등수학에서 사용가능한 이산수학 주제에 관한 교수학적 분석, **제주교육대학교 논문집 35**, 65-88.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston*, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Norton, A. H. and D'Ambrosio, B. S. (2008), ZPC and ZPD: Zones of Teaching and Learning, *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 220-246.

Norton, A. H. and McCloskey A. V. (2008). Modeling Students'Mathematics using Steffe-'s Fraction Schemes, Teaching Children Mathematics (August 2008), 48-54.

Olive, J. (2002). Bridging the Gap: Using Interactive Computer Tools to Build Fraction Schemes, Teaching Children Mathematics (February 2002), 356-361.

Olive, J. and Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: the case of Joe, *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 413-437.

Siebert, D. and Gaskin, N. (2006). Creating, Naming, and Justifying Fractions, *Teaching Children Mathematics* (April 2006), 394-400.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge, *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 267-307.

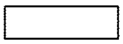
Steffe, L. P. and Olive, J. (1996). Symbolizing as a constructive activity in a computer microworld, *Journal of Educational Computing Research, 14*(2), 113-137.

# A Study on a Fraction Instruction via Partitioning and Iterating Operations

Choi, Keun Bae (Jeju National University)

The fractional concept consists of various meaning, so that it is difficult to understand in primary school mathematics.

In this article, we intend to analyze the cognition of 54 pre-service elementary teachers about the operations of partitioning and iterating that are based on Steffe's fraction schemes. The following fraction problem is used in this analysis:

If the bar  represent 3/8, then create a bar that is equivalent to 4/3.

In our analysis, the 43% of pre-service elementary teachers can be well to treat the operations of partitioning and iteration. The 33% are use the equivalent fractions. But the 19% is not good.

From the our analysis, it is important that pre-service elementary teachers must be have experimental(operational) thinking as the science education.

And in this study we apply the operations of partitioning and iterating to the fraction activity of textbooks.

* **key words** : partitioning(분할), iterating(반복), Steffe's fraction schemes(스테피의 분수 스킴)

논문접수 : 2010. 7. 15
논문수정 : 2010. 9. 4
심사완료 : 2010. 9. 11