대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.3, 371-388. Sep 2010

소수(素數, prime number) 개념에 대한 중학생의 이해

조 경 희* · 권 오 남**

이 논문의 목적은 소수(素數, prime number) 개념을 처음 배우는 학생들이 소수와 그 관련 개념들을 어떻게 이해하고 있는지를 탐구하기 위한 것이다. 이를 위하여 소수와 합성수 개념을 학습한 직후의 중학교 1학년 학생들에게 설문조사를 중심으로 자료를 수집하고 분석하였다. 연구 결과, 학생들은 주어진 자연수의 소수성을 판정하기 위한 소수의 기능적인 정의를 선호하며, 주어진 자연수의 약수를 찾는 것에만 주목하여 소수와 합성수를 곱셈적 관계로 이해하는데 어려움을 나타내었다. 이러한 결과는 학생들이 자연수의 곱셈적 기본 단위로서 소수 개념의 본질적인 중요성을 인식하고 산술의 기본 정리가 보장하는 자연수의 곱셈적 구조를 이해할 수 있도록 하는 교수학적 전략의 필요성을 제안한다.

I. 서론

소수(素數, prime number)는 자연수의 곱셈적 구성요소가 되며 정수론의 핵심인 중요한 수학 개념이다. 소수에 대한 연구는 고대 유클리드 시대 이전부터 시작되었을 정도로 그 역사가 깊지만 현재까지도 쌍둥이 소수 문제, 골드바흐의 추측, 리만 가설 등 수많은 미해결문제를 안고 있다. 또한 Rosen(1993)에서 강조하고 있듯이, 소인수분해의 어려움이 현대 암호학과 밀접하게 관련됨으로써 소수는 특히 실용적인 측면에서도 그 중요성이 크다고 볼 수 있다.

한편 우리나라 학교수학에서는 중학교 1학년에서 자연수의 성질 중 하나로서 소수의 개념을 다루고 있다(교육과학기술부, 2008). 이 때 소수는 "1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수(예를 들면, 우정호, 박교식, 박경미, 이경화 김남희, 임재훈 외, 2008, p.30)"와 같이 정의되어 그 뜻이 분명한 듯 보인다. 중학교 1학년에서 학습된 소수와 소인수분해의 아이디어 및 관련 성질들은 고등학교에서 다루어지는 다항식의 인수분해와 인수정리를 이해하기 위한 예비학습단계가 될 뿐만 아니라 현대대수, 정수론, 암호학 등 보다 높은 수준에서 학문으로서 수학을 연구하기 위한 기본 아이디어로서도 중요한 위치를 차지하고 있다. 그러나 Davis (2008), Zazkis와 Liljedahl(2004) 등의 선행연구들은 기초 정수론을 수강한 성인이나 심지어 수학교사조차 소수 개념을 제대로 파악하는 것이 쉽지 않다는 것을 보여준다.

이와 같은 소수의 중요성과 개념 파악의 어려움에도 불구하고, 국내에서 수행된 선행연구는 소수의 대수적 구조를 분석하거나(우영진, 1976) 대학 정수론의 관점에서 소수에 대한 사실을 나열하고 있어(박수연, 2004; 신근영, 2006; 조경희, 2002), 소수의 개념과 관련된 구체적인 교수학적 함의를 찾아보기 어렵다. 한편 외국에서는 Zazkis

* 경기과학고등학교 (frstlove@unitel.co.kr)
** 서울대학교 수학교육과 (onkwon@snu.ac.kr)

와 Campbell(1996a, 1996b)이 가분성(divisibility)이나 산술의 기본 정리에 대한 초등학교 예비교사들의 개념적 이해에 대하여 논의한 이래, 소수 및 소인수분해와 관련된 학습자의 이해를 분석하고자 하는 연구들이 이어져오고 있다(Liljedahl, Sinclair, Zazkis, 2006; Sinclair, Zazkis, Liljedahl, 2004; Zazkis, 2000, 2005, 2008; Zazkis, Liljedahl, 2004). 그러나 이러한 연구들이 모두 초등학교 예비교사를 대상으로 하였다는 점을 감안해 보면 이들 연구에서 분석한 소수에 대한 이해는 소수를 처음 배우는 어린 학생들의 개념 형성 과정에서 나타나는 이해와 다소 차이가 있을 수 있다. 따라서 소수에 대한 이론적인 접근이나 소수에 대한 성인들의 이해를 분석하는 것만으로 소수를 처음 배우는 어린 학생들에게 적절한 교수학적 논의를 이끌어내는 것에 한계가 있을 것이다.

이에 본 연구에서는 중학교 1학년 학생들이, 새롭게 접한 수학 개념이면서 앞으로 그들의 수학학습과정의 중요한 기초가 될 소수에 대해 어떤 개념을 형성하고 있는지를 조사하여 분석하고자 한다. 또한 이에 대한 교수학적 논의를 통하여 소수 및 그 관련 개념이나 성질 등에 대한 보다 의미 있는 교수-학습에 제언을 도출하고자 하는 것이 본 연구의 목적이다.

II. 소수 개념에 대한 문헌검토

고대로부터 이루어진 수에 대한 여러 가지 발견들을 정리하여 현대 수론의 기초를 이룬 책은 1801년, 가우스의 「산술 연구(Disquisitiones Arithmeticae)」이다(Burton, 2005/2007). 그러나 소수에 대한 정의와 정리들은 훨씬 앞선 시대인 유클리드의 「원론(Element)」에서 찾아볼 수 있다. 유클리드는 기원전 3세기에 원론을 집필함으로서 연역적 방법으로 기하학을 집대성한 것으로 유명하지만, 13권으로 구성된 이 책의 7, 8, 9권의 책은 수론에 관련된 것이다. 여기에 나타난 소수와 합성수에 대한 정의는 7권에서 찾아볼 수 있는데, 다음과 같다.

> 소수(prime number)는 단위(unit)로써만 잴 수 있다. 합성수(composite number)는 어떤 수로 잴 수 있다. (Heath, 1956, p.278)

위에서 '단위'는 다른 것들을 만들 수 있는 수로서 1(one)을 말한다(Heath, 1956). 유클리드 시대에는 '수(數)'라는 것도 기하학적인 양으로서 인식되었기 때문에 자연수의 기본 단위인 1을 유한 번 반복하여 잴 수 있는(measurable) 양으로 취급하였던 것으로 보인다. 따라서 유클리드의 정의는, 어떤 수를 유한 번 반복한 전체 길이가 소수가 되는 경우는 1을 사용할 때뿐이며 1이 아닌 다른 어떤 수를 단위로 하여 표현되는 수는 합성수임을 말하는 것이다. Heath(1956)에 의하면 이러한 성질을 갖는 자연수로서 소수는 Nicomachus, Theon, Iamblichus 등에 의하여 사용된 용어였는데 이들은 최초의 소수를 3이라고 했던 반면, 유클리드보다 앞선 시대의 Aristotle 등 피타고라스 학파에서는 2를 소수에 포함시키고 있었으며 소수에 대한 유클리드의 정의도 2를 포함하는 것이었다. 2의 소수성에 대한 견해뿐만 아니라 소수(prime)라는 이름도 유일한 것이 아니었다(Heath, 1956). Theon은 'odd-times odd', Iamblichus는 'euthymetric'라는 명칭을 사용하였으며, Thymaridas는 합성수가 길이와 너비의 곱으로 표현할 수 있는 2차원 수인데 반해 소수는 너비 없이 길이로만 표현할 수 있는 1차원의 수라는 뜻으로 'rectilinear'라는 용어를 사용하였고, Nicomachus는 다른 수를 만들 수 있는 최초의 수라는 의미로 'prime' 또는 'first'라고 하였다.

이와 같이 시작된 소수의 대한 관심과 논의

는 현재까지도 정수론의 주요 연구 분야이며 수많은 미해결 문제를 안고 있다. 현재 대학에서 사용되고 있는 정수론 교재에 나타난 소수에 대한 정의는 "양의 정수 p가 1보다 크고 p의 약수는 1, -1, p, $-p$뿐일 때, p를 소수라고 한다(김응태, 박승안, 2005, p.42)."와 같다. 이처럼 소수의 현대적인 정의는 표현에 있어서 유클리드 시대의 것과 많이 달라 보이지만, 그 개념의 본질적인 부분에는 변함이 없다. 즉, 1이 아닌 단위의 곱으로 표현될 수 없는 수라는 소수 개념의 본질은 소수가 곱셈으로 자연수를 구성하기 위한 기본 요소가 됨을 내포하는 것이다. 또한 정수 p에 대하여 p가 소수인 것과 필요충분조건은 아래의 두 가지가 있으며, 이로써 소수의 정의를 대신하는 것이 가능하다.

> 정수 a, b에 대하여 $p|ab$이면 $p|a$ 또는 $p|b$이다. (김응태, 박승안, 2005, p.42)

> 정수 $0, 1, \cdots, m-1$ 중에서 m과 서로소인 정수 전체의 개수로 정의되는 Euler의 ϕ함수, $\phi(m)$에 대하여, $\phi(p)=p-1$이다.
> (김응태, 박승안, 2005, p.125)

한편 아래 제시한 정의는 대학에서 사용되는 현대대수학 교재에 나타난 합성수에 대한 것인데, 1보다 크고 자기 자신보다 작은 수들로써 곱셈적 표현이 가능한 경우를 합성수라고 한 것이 특징적이다.

> 정수 $n(n \geq 2)$이 소수가 아닐 때, 즉.
> $$n=ab,\ 1<a<n\ \ 1<b<n$$
> 인 양의 정수 a, b가 존재할 때 n을 합성수라고 한다.
> (김응태, 박승안, 2006, p.12)

이러한 합성수의 정의를 이용하면 소수의 정의를 다음과 같이 곱셈적 관계에 주목하여 진술할 수 있다.

> 1보다 크고 자기 자신보다 작은 수들의 곱으로 나타낼 수 없는 수, 즉,
> $$p=ab,\quad 1<a<p,\quad 1<b<p$$
> 인 양의 정수 a, b가 존재하지 않을 때 p를 소수라 한다.

이와 같이 소수와 합성수를 곱셈적으로 정의하는 것은 주어진 자연수의 소인수분해와 자연스럽게 연결될 수 있다.

자연수의 소인수분해는 주어진 자연수를 더 작은 자연수들의 곱으로 표현하는 것으로, 이때 자연수의 곱셈적 단위가 되는 것이 소수이다. 다시 말해, 1과 덧셈으로 자연수를 구성할 때와는 달리 곱셈으로 자연수를 만들고자 한다면 1을 아무리 많이 거듭제곱하여도 그 결과는 항상 1이므로 1 이외의 다른 수가 필요하다. 예를 들어, 2를 두 번 곱하면 4, 세 번 곱하면 8이 되므로, 3, 5, 6, 7 등의 수들은 2를 아무리 여러 번 곱해도 만들 수 없고, 3, 5, 또는 7이 필요하다. 따라서 곱셈으로 모든 자연수를 만들려면 2, 3, 5, 7, 11 등과 같은 소수가 모두 필요한 것이다. 같은 맥락에서 Burton(2005/2007)은 "실제로 수론의 모든 부분에 있어서 근본적인 것은 소수의 개념에 관한 것이다(p.43)."라고 하였을 것이다. 이와 같이 소수의 중요성은 소수가 곱셈으로 자연수를 구성하기 위한 기본 요소가 된다는 것에서 찾을 수 있다. 그리고 이는 자연수에 대한 소인수분해의 존재성과 유일성을 말해주는 산술의 기본 정리(Fundamental Theorem of Arithmetic)에 의해 뒷받침된다. 산술의 기본 정리는 다음과 같다.

> (I) 정수 $n(n \geq 2)$은 유한 개의 소수 $p_1, \cdots, p_k$의 곱 $n=p_1 \cdots p_k$로 소인수분해된다.
> (II) 정수 $n(n \geq 2)$의 소인수분해는 본질적으로

단 한 가지뿐이다. 즉,

$$n = p_1 \cdots p_s, \quad n = q_1 \cdots q_t$$

를 n의 소인수분해라고 하면, $s=t$이고 또 n의 소인수 p_1, ⋯, p_s와 q_1, ⋯, q_t는 그 순서만이 다르다.

(김응태, 박승안, 2005, p.48)

산술의 기본 정리는 모든 자연수가 유일하게 유한 소인수분해 됨을 말해주는 것이며, 이는 자연수의 집합이 곱셈적으로 구성 가능한 환임을 의미한다. 따라서 자연수의 곱셈적 구성을 위한 기본 단위가 소수가 된다는 것을 이해하는 것은 산술의 기본 정리를 이해하는 것과도 관련이 있음을 알 수 있다. 나아가서 소수를 기반으로 자연수 전체의 집합을 곱셈적 관계에 의하여 이해하는 것은 정수, 다항식, 환으로 이어지는 대수적 구조로 확장될 수 있는데, <표 II-1>과 같이 나타낼 수 있다.

<표 II-1> 정수, 다항식, 환의 대수적 구조

<table>
<tr><th></th><th>정수</th><th>다항식</th><th>환</th></tr>
<tr><td>산술</td><td>정수에서의 산술</td><td>다항식환에서의 산술</td><td>정역에서의 산술</td></tr>
<tr><td>나눗셈 정리</td><td>나눗셈 정리</td><td>나눗셈 정리</td><td>유클리드 정역</td></tr>
<tr><td>가분성</td><td>가분성</td><td>다항식환에서의 가분성</td><td rowspan="2">유일 인수분해 정역, 유일 인수분해와 단항이데알</td></tr>
<tr><td>소수와 인수분해</td><td>소수와 유일 인수분해</td><td>기약다항식과 유일 인수분해</td></tr>
<tr><td>소수 판정법</td><td>소수 판정법</td><td>다항함수, 근, 가약성, $\mathbb{Q}[x]$에서의 기약성, $\mathbb{R}[x]$에서의 기약성</td><td></td></tr>
</table>

(Hungerford, 1990, pp.xx-xxi)

<표 II-1>에서 볼 수 있듯이, 환의 구조는 정수에서의 산술과 소수를 기본으로 확장되어 간다. 따라서 소수 개념을 이해하는 것은 본질적으로 정수의 곱셈적 기본 단위로서 소수를 이해하고 산술의 기본 정리와 관련하여 소수의 중요성을 이해하는 것이라고 할 수 있다.

이와 같은 소수의 중요성은 잘 알려져 있으며, 국내의 수학교육 논문을 살펴보면 소수의 대수적 구조를 분석하거나 소수와 관련된 정수론의 연구결과를 정리하고 소수의 중요성을 강조한 연구들이 계속되어 왔다(박수연, 2004; 신근영, 2006; 우영진, 1976; 조경희, 2002). 그러나 이와는 대조적으로 소수에 대한 학습자의 이해에 초점을 둔 교수학적 관점에서의 연구는 Zazkis와 Campbell(1996a, 1996b)에 이르러서야 시작되어 축적된 연구결과가 그다지 많지 않다.

Zazkis와 Campbell(1996a, 1996b)은 교사의 교과내용지식에 대한 연구의 일부로서 초등학교 예비교사의 정수론적 내용지식에 대하여 분석하였는데, 기초정수론을 수강한 초등학교 예비교사들조차 가분성이나 자연수의 곱셈적 구조에 대한 다양한 수준의 이해의 스펙트럼을 나타내었으며, 소인수분해의 유일성을 개념적으로 이해하는 것이 쉽지 않다는 것을 보여주었다. 이러한 연구들의 연장선상에서 Zazkis(2000, 2008)는 초등학교 예비교사들이 약수 또는 인수, 그리고 곱셈 개념 간의 연결이 약하거나 불완전하여 소인수 또는 소인수분해와 가분성 사이에 유기적 연결이 결핍되어 있으며, 수의 곱셈적 표현에서도 가분성을 볼 수 없음을 지적하였다.

소수 개념과 관련된 학습자들의 이해에서 나타나는 이러한 어려움들은 소수의 성질을 그대로 볼 수 있는 투명한 표현(transparent representation)의 부재가 한 원인으로 꼽힐 수 있다

(Zazkis, Liljedahl, 2004). 예를 들어, 완전제곱수(perfect square), 5의 배수, 17로 나누었을 때 3이 남는 자연수 등의 투명한 표현은 각각 k^2, $5k$, $17k+3$ (k는 자연수)이며, 이와 같이 어떤 성질을 갖는 수에 대한 투명한 표현은 그 수의 성질을 볼 수 있는 도구가 되어, 투명한 표현의 집합 안에서 조작가능하게 된다. 그러나 소수는 소수의 성질을 적절하게 표현하고 조작할 수 있는 투명한 표현이 존재하지 않는 것이다. 이에 대하여 Zazkis(2005, 2008)는 예, 특히 큰 수의 예를 통하여 소수 개념의 이해를 도울 수 있다고 제안하였으며, Sinclair, Zazkis, Liljedahl(2004)와 Liljedahl, Sinclair, Zazkis(2006) 등은 컴퓨터 기반의 학습 환경인 "Number Worlds"를 통해 여러 가지 수 개념과 자연수의 구조에 대하여 관계적으로 학습하는 초등학교 예비교사들의 경험을 소개하기도 하였다.

그러나 소수 개념의 이해와 관련된 이러한 선행연구들은 모두 기초정수론을 수강한 성인들, 특히 초등학교 예비교사들의 내용지식으로서 소수 개념에 대한 이해를 분석한 연구들일 뿐이라는 한계가 있으며, 정수론에 대한 여러 가지 교수학적 제안을 담고 있는 Campbell과 Zazkis(2002), Zazkis와 Campbell(2006)의 저서도 교사교육에만 초점이 있을 뿐 중등학교 학습자의 이해에 대하여 조사하고 분석한 연구는 없었다. 예비교사조차 소수를 개념적으로 이해하거나 자연수의 구조를 파악하는데 어려움을 겪는다면 학생들은 더 큰 어려움을 겪고 있을 것임이 분명하다. 그러나 소수 개념을 처음 학습하는 학생들에 대한 연구는 결여되어 있어 기존의 연구결과로부터 실제적인 교수학적 제안을 이끌어내는 데에도 한계가 있을 것이다. 이에 본 연구는 처음 소수 개념을 학습하는 중학생들에 대한 이해를 조사하고 분석하는 탐색적인 연구로서 학생들에게 실제적으로 유용한 교수학적 제안을 이끌어내고자 하는 것이며, 이를 통하여 앞으로 소수 개념과 자연수의 곱셈적 구조에 대한 학생들의 이해를 탐구하는 보다 심층적인 후속 연구를 위한 발판을 마련하고자 한다.

III. 연구방법

본 연구는 소수 개념을 처음 배우는 중학교 1학년 학생들이 소수와 그 관련 개념들을 어떻게 이해하고 있는지 분석하기 위한 것이다. 이를 위하여 먼저 소수 개념과 관련하여 다수의 중학교 1학년 학생들의 이해에 대한 자료를 수집하는 것이 필요하였기 때문에, 2009년 4월 초에 경기도의 한 중소도시에 위치한 A중학교 1학년 학생들 중 5개 반을 대상으로 과제기반 설문을 실시하였다.

설문에 참여한 학생들은 남자 103명, 여자 95명으로 모두 198명이었으며, 이 학생들이 속하는 5개 학급은 같은 수학교사가 담당하고 있었다. 담당교사는 경력 3년차의 신임교사로, 2007년 신규교사일 때 중학교 1학년을 지도해 본 경험이 있었다. 지도교사와의 면담을 통해 이 교사는 새로운 수학 개념을 도입할 때, 개념의 이해를 돕기 위하여 설명을 할 때, 그리고 개념을 문제에 적용할 때 등 교수-학습과정의 전반에서 교과서를 충실히 따르고 있다는 것을 알 수 있었다. 또한 교수-학습방법에 있어서도 수학교실에서 가장 흔히 볼 수 있는 교사주도형 수업을 진행하고 있어, 이 교실의 학생들이 보편적인 중학교 1학년 학생들의 개념 이해에 대하여 알아보고자 하는 본 연구의 설문조사에 참여하는 것이 타당하다고 판단되었다.

설문을 실시한 시기는 소수의 개념, 소인수분해의 뜻과 활용 등의 학습내용이 포함된 '자

연수의 성질' 단원의 학습이 종료된 시점으로부터 일주일 이내에 해당된다. 설문 과제는 소수와 합성수 및 그 관련 개념들의 이해에 대하여 알아보기 위한 서술형 문항으로 구성하였으며, 그 중에는 소수와 합성수의 정의 및 관계를 적도록 요구하는 과제도 있었고 문제해결에서 나타나는 학생들의 소수 개념을 분석하는 것이 가능하다고 판단되는 과제도 포함하였다. 설문문항 중 본 연구의 분석 대상이 된 것은 다음 [그림 III-1]과 같다.

1. 아래 (1)~(3)에 대해 설명하세요.
   (1) 소수는 무엇인가요?
   (2) 합성수는 무엇인가요?
   (3) 소수와 합성수는 어떤 관계가 있나요?
2. 31×47로 표현할 수 있는 어떤 자연수가 있습니다. 이 수는 소수인가요? 그 이유를 설명하세요.
3. 1은 소수인가요? 그 이유를 설명하세요.

[그림 III-1] 본 연구에서 분석한 설문문항

이러한 질문들은 선행연구(Mason, 2002; Zazkis, 2000; Zazkis, Campbell, 1996b; Zazkis, Gadowsky, 2001; Zazkis, Liljedahl, 2004)에서 설문이나 면담 과제로 사용된 것을 참고하여 본 연구의 목적에 맞게 재구성한 것이다. [그림 III-1]에서 볼 수 있듯이, 각 과제에 대하여는 답뿐만 아니라 답을 쓴 이유를 함께 적도록 하였는데 이는 학생들의 사고과정을 알기 위한 것이었다.

설문지에 나타난 학생들의 응답은 일차적으로 부호화하여 빈도와 백분율을 조사하는 방법으로 분석하였다. 그 후 소수 개념에 대한 학생들의 이해에 대하여 설문지에서는 분명하게 알아내기 힘든 자료를 보충하고 연구자의 잠정적인 해석에 대한 참여자 검토를 위한 면담을 실시하였다[2]. 면담은 20명의 학생들을 대상으로 2009년 6월 중순부터 7월 말까지 진행되었으며, 이와 같이 수집된 모든 자료에 대한 분석 결과는 2009년 8월부터 2010년 8월까지 여러 명의 수학교육 연구자에 의해 삼각검증되었다[3].

IV. 연구결과

1. 소수와 합성수의 정의

설문에 참여한 학생들이 사용하는 교과서에서는 2에서 10까지의 자연수의 약수의 개수를 살펴보도록 하는 활동 후에 소수와 합성수를 다음과 같이 정의하고 있다.

> 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수를 소수라고 한다. 또 1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수를 합성수라고 한다. (우정호 외, 2008, p.30)

그러나 소수와 합성수가 무엇인지 직접 적도록 요구한 설문문항에서 학생들은 교과서의 정의 외에도 여러 가지 방법으로 소수와 합성수를 설명하였고, 이를 분류하여 다음과 같이 부호화(coding)하였다.

T (Textbook definition) 교과서의 정의를 따른 설명
N (Number of divisors) 약수의 개수를 기준으로

2) 참여자 검토(member checks)는 자료에 대한 잠정적인 해석을 가지고 참여자(정보 제공자)에게 연구자가 추론한 결과에 대한 타당성을 물음으로써 연구결과의 타당도를 제고할 수 있는 질적 연구방법 중의 하나이다(Merriam, 2005). 본 연구에서 참여자 검토는 자연수의 곱셈적 구조에 대한 학생들이 인지에 대하여 알아보고자 하는 심층면담의 일부로 이루어졌다.

3) 삼각검증(triangulation)은 연구결과의 내적 타당도를 제고하기 위하여 여러 명의 연구자, 다양한 자료 출처, 여러 가지 다양한 방법을 사용하여 확인하는 것을 말한다(Merriam, 2005). 즉, 삼각검증은 종합적인 판단을 통하여 타당도를 높이는 방법이다.

하는 설명

D (Divisibility) 1 또는 자기 자신이 아닌 약수의 존재여부를 기준으로 둔 설명

M (Multiplicative definition) 다른 수들의 곱으로 표현하는 것에 초점을 둔 설명

E (Example) 자연수에서 소수 또는 합성수의 예를 제시한 것

I (Irrelevant) 부적절한 응답

B (Blank) 무응답

이와 같이 분류된 각 항목에 따른 학생들의 응답 및 항목별 응답 학생의 수는 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1>에서 볼 수 있듯이, 소수에 대한 학생 응답의 빈도 중 가장 높은 비율을 차지하는 응답은 교과서의 정의를 따르는 설명(T)이었다. 이것은 전체 응답의 45%에 달하였고, 부적절한 응답과 무응답을 제외한다면 전체 응답의 68%를 차지하는 높은 비율이다. 그러나 이 학생들이 모두 교과서에 제시된 것과 같이 엄밀하게 소수를 설명한 것은 아니었다. 오히려 완전하게 정의를 서술한 학생은 T로 부호화된 97명 중에서 9명에 지나지 않았고, '1을 제외' 한 '자연수' 중에서 소수가 정의된다는 것을 명시하지 않은 채 단순히 '1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수'라고만 언급한 학생이 97명 중에서 47명에 달했다. 이러한 결과는 설문에 참여한 학생들이 소수 개념을 배우기 직전에 '집합' 개념에 대한 학습을 마친 상태라는 것을 생각하면 의외의 결과이다. 집합은 "주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임(우정호 외, 2008, p.13)"으로 정의되는데, 이에 비추어볼 때 대다수의 학생들이 제시한 소수의 정의는 자연수 중에서 소수의 성질을 갖는 수들을 원소로 하는 집합으로 적절하지 못하다. 즉, '1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수들의 모임'은 소수의 집합과 같지 않으며, 정확한 소수의 집합을 구성하기 위해서는 '1을 제외한 자연수'라는 조건이 더 필요하다. 중학교 1학년 학생들에게 수학적으로 엄밀한 정의를 요구하는 것은 무리하고 할지라도, 학생들은 소수는 주어진 자연수가 특정한 조건을 만족할 때 붙여지는 자연수의 성질이라는

<표 IV-1> 소수와 합성수의 정의에 대한 학생들의 응답 및 항목별 응답 학생 수

분류부호	소수에 대한 학생들의 설명 (학생 수)	합성수에 대한 학생들의 설명 (학생 수)
T	1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수 (97)	1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수 (37)
N	약수의 개수가 2개인 자연수 (36)	약수의 개수가 3개 이상인 자연수 (76)
D	나누어지지 않는 자연수 (6)	1과 자기 자신 이외의 수로 나누어지는 자연수 (6)
M	(0)	소수끼리 곱해서 나오는 수 (2)
E	2. 3, 5, 7, 11, 13, … (4)	4, 6, 8, 9, 10, … (4)
I	약수가 2개 이하인 자연수, 약수가 1과 자기 자신을 포함하는 수, 소인수분해의 준말, 0.1, 0.2, 0.3 이런 것 등 (45)	소수가 2개 있는 것, 어떤 수를 합한 수, 1, 2, 4, 8 이것처럼 수가 여러 개인 것 등 (40)
B	(26)	(45)
총 학생 수[4]	(214)	(13)

4) 설문에 참여한 학생 수는 198명이었으나, 한 학생이 두 가지 이상으로 설명한 경우에는 의미 있는 응답마다 각각 부호화하였으므로, 표에 나타난 총 학생 수는 설문에 참여한 전체 학생 수보다 많을 수 있다.

점을 인식하고 소수를 집합적으로 모순이 없게 표현할 수 있어야 한다. 이것은 학교수학의 단원 간 연결성을 강조하는 차원에서도 소수 개념의 교수-학습에서 주의해야 할 점이라고 할 수 있다.

소수에 대하여 설명할 수 있는 학생들이 교과서의 정의(T) 다음으로 많이 채택한 것은 약수의 개수를 기준으로 하는 설명(N)이었다. 이는 설문에 참여한 학생들이 사용하는 교과서가 2부터 10까지의 자연수에 대하여 각각 약수의 개수를 세어보는 활동을 한 후에, 약수가 2개인 자연수, 즉, 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 자연수를 소수로 정의하는 순서로 전개되고 있는 데에서 그 이유를 찾을 수도 있을 것이다. 대부분의 중학교 1학년 수학교과서는 이와 유사한 방식으로 전개되어 있으며, 아래 [그림 IV-1]과 같이 소수는 약수의 개수를 2개만 갖는 자연수임을 제시하는 교과서도 있다.

2의 약수는 1, 2이고, 3의 약수는 1, 3이다. 이와 같이 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수를 **소수**라고 한다. 즉, 소수는 약수의 개수가 2개뿐인 수이다.

[그림 IV-1] 교과서에 나타난 소수에 대한 설명 (강신덕, 함남우, 홍인숙, 김영우, 이재순, 전민정 외, 2008, p.31)

이와 같이 교과서의 활동 및 전개방식은 학생들로 하여금 주어진 자연수가 가지는 약수의 개수에 주목하도록 하였고, '약수의 개수가 2개인 자연수'라는 것이 소수의 판정기준으로 활용 가능한 소수의 기능적 정의가 되도록 하고 있었다. 교과서에 제시된 활동이 학생들의 소수 이해와 관련되어 있다는 증거는 아래 [그림 IV-2]에 제시된 학생들의 응답에서도 찾아볼 수 있었다.

더이상나누어지지않는수(?)
2의배수인것은 2빼고 없애는거?

[그림 IV-2] 소수에 대한 학생들의 설명 중 에라토스테네스의 체와 관련된 응답

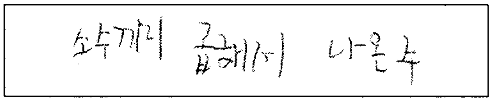
소수에 대한 학생들의 설명 중 [그림 IV-2]에 제시한 '더 이상 나누어지지 않는 수', '2의 배수인 것은 2 빼고 없애는 것' 등은 교과서에 제시된 또 하나의 활동이자 자연수 중에서 소수인 것을 찾는 고전적인 방법인 에라토스테네스의 체와 자연스럽게 연결된다. 이러한 증거들은 학생들의 개념 형성을 돕기 위한 교과서의 구체적인 활동이 오히려 개념에 대한 제한된 이미지만을 형성하는데 그치게 하는 메타인지이동을 보여준다. 따라서 소수에 대한 학생들의 이해를 위하여 교과서의 활동이 그 개념의 본질과 연결되어 발전할 수 있도록 교수-학습과정에서 주의가 필요할 것이다(하다).

한편 <표 IV-1>에서 합성수에 대한 학생 응답의 빈도를 살펴보면, 교과서의 정의를 따르는 응답(T)의 수보다 약수의 개수에 초점은 둔 응답(N)의 수가 두 배 정도 많다는 것을 볼 수 있다. 이는 소수에 대한 학생들의 설명에서는 N보다 T로 응답한 학생 수가 약 2.7배 많았다는 것과 대조되는 결과라는 것이 특이하다. 즉, 학생들은 교과서가 '소수가 아니면 합성수'라는 정의를 제시함에도 불구하고 '약수의 개수가 3개 이상이면 합성수'라는 정의를 더 선호한다는 것이다. 실제로 소수를 설명할 때 교과서의 정의를 따른 97명의 학생들 가운데 단 25명만이 합성수를 설명하기 위해서 교과서의 정의를 따랐을 뿐, 97명 중 56명의 학생은 주어진 자연수의 약수의 개수로 합성수를 설명하려고 하였다.5)

학생들은 왜 약수의 개수를 가지고 합성수를

정의하는 것을 선호하는 것일까? 먼저 교과서의 정의를 따라 합성수를 설명해 보자. 합성수는 '1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수'이다. 따라서 합성수를 설명하기 위해서는 다시 소수에 대하여 설명하는 것이 필요하게 된다. 소수는 '1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수'이므로, 합성수는 '1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신 이외의 약수를 가지는 수'라고 설명할 수 있다. 결국 소수와 합성수를 구분하는 것은 '1과 자기 자신 이외의 약수가 존재하는가?'라는 질문에 답하는 것과 같다. 그러므로 학생들에게는 '합성수는 약수의 개수가 3개 이상인 자연수이다.'라는 보다 직접적이고 기능적인 설명이 매력적이라고 할 수 있을 것이다. 이와 같이 약수의 개수로서 합성수를 소수로부터 구별할 수 있다는 기능적인 측면의 이점 때문에 교과서의 활동 및 전개방식도 기능적 측면에서 접근하고 있다고 할 수 있으며, 이러한 교과서의 관점은 학생들의 응답에도 관련이 있을 것이다.

그런데 '소수는 약수의 개수가 2개이고 합성수는 약수의 개수가 3개 이상이다.'라는 설명에는 몇 가지 제한점이 있다. 첫째, 이 설명은 자연수 범위에서 소수와 합성수를 생각할 때에만 유효한 설명이라는 점이다. 즉, 어떤 수의 약수와 배수는 정수 범위까지 자연스럽게 확장하여 다룰 수 있지만, 약수의 개수를 기준으로 하는 소수와 합성수에 대한 설명은 정수의 범위에서는 더 이상 적용하기 힘들어 진다. 둘째, 이 설명은 소수와 합성수를 구분하는 것에 초점이 있어 그 둘 사이의 곱셈적 관계를 보기 어렵게 만든다는 점이다. 소수와 합성수를 관계적으로 개념화하기 위해서는 합성수에 존재하는 제 3의 약수가 소수와 어떤 관련이 있는지, 이것이 소인수분해와 연결되어 어떻게 산술의 기본 정리로 이어지는지 알아야 한다. 약수의 개수를 가지고 소수와 합성수를 구분하는 것이 학생들에게 기능적으로 유용하더라도 소수와 합성수의 개념적인 구조를 나타내지 못한다는 것을 분명히 인식해야 할 것이다. <표 IV-1>은 설문에 참여한 198명의 학생 중 단 두 명만이 자연수의 곱셈적 관계에 주목하여 합성수를 설명하고 있음을 보여준다. 이들의 응답은 다음 [그림 IV-3]과 같다.



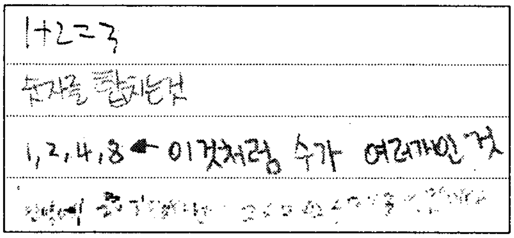
[그림 IV-3] 합성수에 대한 학생들의 설명 중 곱셈적 정의(M)로 부호화된 응답의 예

이와 같이 자연수의 곱셈적 관계를 인식하는 것이 소수의 개념적 이해와 어떻게 관련되어 있는지는 소수와 합성수의 관계에 대한 다음 절의 분석에서 자세히 다룰 것이다.

또한 <표 IV-1>의 결과는 중학교 1학년 학생들에게 합성수는 소수보다 더 설명하기 어려운 개념이었다는 것도 보여준다. 합성수의 정의에 대한 학생들의 응답 빈도조사에서 B, 즉, 무응답으로 처리된 학생 수는 전체의 21%로 소수에 대하여 조사하였을 때 12%만이 응답을 하지 않았던 것과 비교할 때 두 배 가까이 많음을 볼 수 있다. 아래 [그림 IV-4]은 합성수에 대한 부적절한 응답으로 분류된 학생들의 응답 중 일부이다.

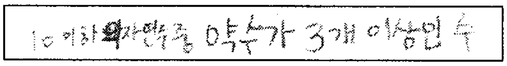
'1+2=3', '숫자를 합치는 것' 등의 응답에서 알 수 있듯이, '합성'이라는 뜻을 '곱셈'보다는 '덧셈'과 관련된 것으로 받아들인 학생들도 있었다. 한편 '1, 2, 4, 8처럼 숫자가 여러 개인 것', '만약에 $2^3\times3^2$ 이 있다면 $2\times2\times2\times3\times3$ 인

5) 소수를 설명할 때 교과서의 정의를 따른 97명의 학생들 중 나머지 16명의 합성수 설명에 대하여는 T 또는 N 이외의 것에 부호화되었다.



[그림 IV-4] 합성수에 대한 부적절한 응답의 예(1)

것이다.' 등의 응답은 합성수가 아니라 '거듭제곱'에 대한 설명이다. 즉, 중학교 1학년에서 소수, 합성수, 거듭제곱 등 새로운 용어가 한꺼번에 등장하여 학생들이 이들을 혼동하고 있는 경우도 있음을 알 수 있다. 이와 같이 합성수를 잘 알지 못하는 이유로는 여러 가지를 생각해 볼 수 있지만, 소수의 경우에는 개념을 정의한 이후 소인수분해와 그 활용을 다루면서 개념이 반복적으로 강조될 수 있는 반면 합성수는 그렇지 않다는 것을 주요 이유로 들 수 있다. 실제로 아래 [그림 IV-5]에서 볼 수 있듯이 합성수는 '10 이하의 자연수 중에서 약수가 3개 이상인 수'라고 응답한 학생도 있었는데, 면담에서 그 이유를 물어보니 교과서에 제시된 탐구과제를 통해서 10 이하인 경우에는 합성수를 찾는 활동을 해 보았지만, 10 이상의 합성수에 대해서는 전혀 언급이 없었다는 것을 알 수 있었다.



[그림 IV-5] 합성수에 대한 부적절한 응답의 예(2)

심지어 에라토스테네스의 체를 사용하여 1부터 100까지의 자연수 중에서 소수를 찾는 활동을 하면서도 어떤 수가 소수인지에만 초점을 둔 나머지 소수가 아닌 수, 즉, 소수의 배수가 되는 수들이 합성수임을 간과하였다는 것이다. 중학교 1학년에서의 학습목표가 소수의 개념 및 그 활용에 초점이 있다고 하더라도 합성수를 학생들에게 보다 주의 깊게 지도할 필요가 있다.

2. 소수와 합성수의 관계

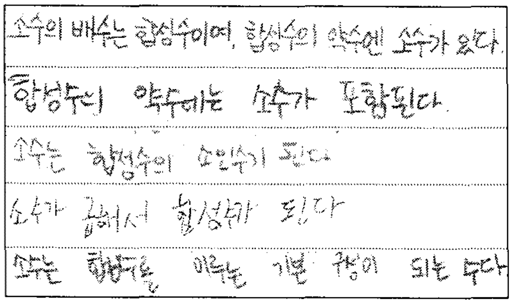
설문조사에서 학생들에게 소수와 합성수에 대하여 설명하도록 한 문항에 이어지는 문항은 '소수와 합성수는 어떤 관계가 있나요?'라는 것이었다. 이 문항은 소수와 합성수라는 수학적 개념이 어떻게 연결되어 있는지, 두 가지 개념 사이에 존재할 수 있는 '관계'에 대한 학생들의 이해를 알아보고자 하는 것이었다. 그러나 절반 가량의 학생들이 응답을 못하였고, 학생들의 응답 중에서도 소수와 합성수 사이의 관계에 주목하지 못하고 단지 소수인 자연수와 합성수인 자연수가 갖는 성질을 비교하여 그들의 공통점이나 차이점을 설명하는데 그치거나 응답 내용이 부적절한 것이 많았다. 전체 학생의 단 22%만이 소수와 합성수의 관계에 대한 의미 있는 응답을 하였는데 이는 '곱셈적 관계'와 '배타적 관계'로 분류할 수 있었다. 이를 정리하면 아래 <표 IV-2>와 같다.

<표 IV-2> 소수와 합성수의 관계에 대한 학생들의 응답 및 빈도

관계	응답 수(명)	백분율(%)
곱셈적 관계	12	6
배타적 관계	34	16
공통점을 설명	24	11
차이점을 설명	16	8
부적절	29	14
무응답	96	45
합계	211	100

먼저 곱셈적 관계로 분류된 학생들의 응답의

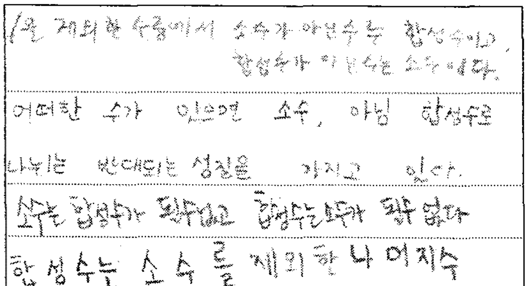
예는 아래 [그림 IV-6]과 같다.



[그림 IV-6] 곱셈적 관계로 분류된 응답의 예

[그림 IV-6]에서 보듯이, 소수와 합성수가 곱셈적 관계에 있다는 응답은 모두 '소수를 곱하면 합성수가 된다.'는 것에 바탕을 두고 있다. 소수를 곱한 것이 합성수가 된다면 자연스럽게 소수의 배수는 합성수이며, 합성수의 약수에는 소수가 포함되게 된다. 이와 같이 곱셈적으로 합성수를 구성하는 단위로서 소수를 생각하는 것은 '산술의 기본 정리'가 말해주는 소인수분해의 존재성과 연결된다. 따라서 소수와 합성수의 곱셈적 관계를 인지하는 것은 산술의 기본 정리가 내포하는 자연수의 곱셈적 구조를 이해하는 바탕이 될 수 있는 것이다.

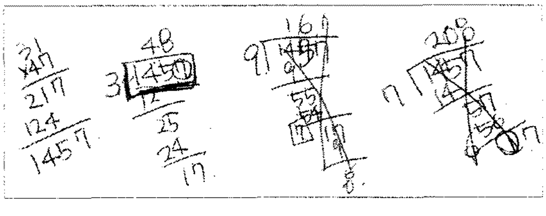
한편 배타적 관계로 분류된 학생들의 응답의 예는 아래 [그림 IV-7]와 같다.



[그림 IV-7] 배타적 관계로 분류된 응답의 예

배타적 관계는 자연수를 전체집합으로 하였을 때 두 부분집합인 소수의 집합과 합성수의 집합이 서로소인 관계에 있다는 것을 말한다. 이는 1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수로서 합성수를 정의하는 것, 주어진 자연수가 소수인지 합성수인지 구별하는 것에 초점을 둔 교육과정과 자연스럽게 연결된다. 그러나 이러한 관점은 소수와 합성수를 관계적으로 보기 어렵게 만든다. 예를 들어, 소수와 합성수의 관계를 배타적으로 이해하는 것이 자연수의 곱셈적 관계에 대한 인식을 방해한다는 증거는 31×47이 소수인지 아닌지를 묻는 문항에 대한 응답에서도 찾아볼 수 있었다.

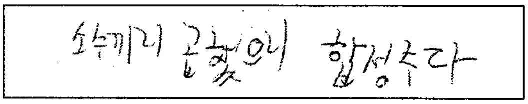
31×47이 소수인지 아닌지 결정하지 않아 무응답으로 처리된 학생을 제외한 144명의 학생들 중에 무려 90명의 학생들은 31과 47의 곱인 1457을 계산하고 1457을 작은 자연수부터 차례대로 직접 나누어보면서 약수를 찾으려는 시도를 하였다. 아래 [그림 IV-8]는 31×47이 소수인지 아닌지 판정하기 위하여 계산을 하는 학생의 풀이과정으로 면담에서 나타난 예이다.



[그림 IV-8] 31×47의 소수 판정 문제에서 계산을 이용한 학생 풀이의 예

이 학생은 먼저 31과 47을 곱하여 1457을 구하였으며, 1457의 일의 자리 숫자가 7이므로 2와 5로는 나누어떨어지지 않을 것이라고 말했다. 그리고 3, 9, 7 등 작은 홀수에 대하여 직접 나눗셈을 하였다. 그리고 이 세 번의 나눗셈 후에 주어진 수는 소수라는 결론을 내렸다.

그러나 사실 31×47로 표현된 자연수가 소수인지 아닌지 판정하는 데에는 아래 [그림 IV-9]과 같이 계산이 필요 없다.



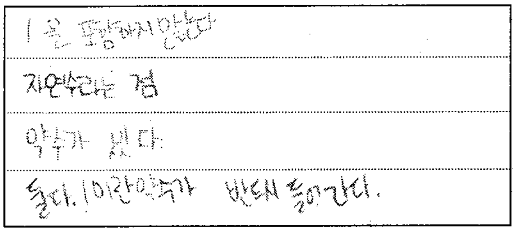
[그림 IV-9] 31×47의 소수 판정 문제에서 곱셈적 관계를 인지한 학생 응답의 예

[그림 IV-9]와 같이 응답한 학생은 이미 앞에서 합성수를 곱셈적으로 정의하는 것으로 부호화된 바 있으며(M), 이 학생은 합성수의 약수에 초점을 두기 보다는 소수를 기본단위로 하고 곱셈을 사용하여 합성수를 구성하는 것에 주목하여 그 곱셈적 관계를 볼 수 있었다.

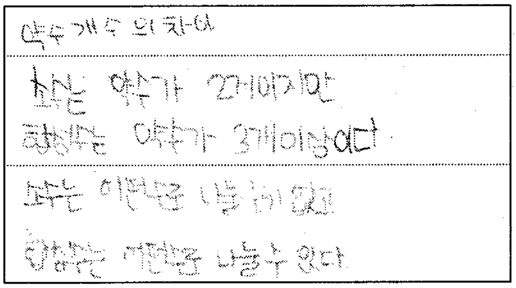
요약하면 곱셈적 관계는 소수의 배수들은 모두 합성수이며 합성수는 소인수들의 곱으로 표현될 수 있다는 자연수의 곱셈적 구조와 연결되어 있는 반면, 배타적 관계는 소수와 소수가 아닌 것을 구별하는 것에만 초점이 있다. 따라서 소수와 합성수를 배타적 관계로 인식하는 학생들은 1을 제외한 자연수 전체의 집합을 공통원소가 없는 두 집합, 즉, 소수의 집합과 합성수의 집합으로 양분할 수 있다는 것에 주목하게 되고, 소수와 합성수를 구별하기 위한 개념의 기능적인 면을 강조하여 소수와 합성수를 관계적으로 보기 어렵게 되는 것이다.

한편 소수와 합성수의 공통점이나 차이점을 언급한 학생들의 응답은 [그림 IV-10], [그림 IV-11]과 같다.

이 응답들을 살펴보면 소수와 합성수의 공통점을 언급한 응답이나, 차이점을 언급한 응답이나 모두 소수 판정을 위한 기준으로서 주어진 자연수의 '약수'에 주목하고 있다는 것을 알 수 있다. 즉, 학생들은 소수와 합성수의 공통점으로 '약수가 있다.', '둘 다 1이란 약수가 있다.' 등을



[그림 IV-10] 공통점을 설명한 응답의 예



[그림 IV-11] 차이점을 설명한 응답의 예

꼽았고, 차이점으로는 '소수는 약수가 2개지만 합성수는 약수가 3개 이상이다.', '소수는 어떤 수로 나눌 수가 없고 합성수는 어떤 수로 나눌 수 있다.' 등을 들었는데, 이들은 모두 소수 판정을 위해 주어진 자연수의 약수를 찾는 과정과 연결되어 있다. 결국 학생들이 사용하는 교과서에서 '1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수'를 소수로 정의하는 것은 '나눗셈'에 기반한 것이라고 할 수 있다.

그러나 소수와 합성수의 관계는 자연수의 약수-배수 관계의 특수한 경우에 해당하며, 이 관계로부터 일반적인 자연수의 곱셈적 관계를 인지하고 소수를 기본 단위로 하는 자연수의 곱셈적 구성이 가능하다는 것에까지 이해가 확장되어야 한다. 그럼에도 불구하고, 설문을 통해 나타난 결과는 곱셈적 관계로서 소수와 합성수의 관계를 볼 수 있는 학생들이 극소수에 불과한 것으로 나타났다. 이는 현재 교과서의 방식과 같이 나눗셈 기반으로 소수와 합성수를 정의하는 것, 또는 소수 판정을 위하여 주어진

자연수의 약수들에 초점을 맞추도록 하는 활동 등이 학생들로 하여금 소수와 합성수를 관계적으로 이해하지 못하게 하고 나아가 자연수의 곱셈적 관계에 대하여 인식하는 것을 방해한다고 말할 수 있다.

나눗셈 기반으로 소수와 합성수를 정의하는 것에 대한 하나의 대안으로 곱셈적 관계와 자연스럽게 연결될 수 있도록 소수와 합성수 역시 곱셈을 기반으로 정의하는 것을 생각할 수 있다. 곱셈기반의 정의는 일부 정수론 또는 현대대수학 교재에서 찾아볼 수 있는데, 예를 들어 1보다 크고 자기 자신보다 작은 두 수 a, b의 곱으로 나타낼 수 있을 때 주어진 자연수를 합성수라고 정의한다면, 소수는 이와 같은 조건을 갖는 두 수 a, b의 곱으로 더 이상 분해될 수 없는 자연수로 정의할 수 있을 것이다. 이와 같이 곱셈을 기반으로 하는 정의는 어떤 자연수가 더 작은 자연수들의 곱으로 표현될 수 있다는 것을 보여줌으로써 소인수분해의 존재성과 유일성을 말해주는 산술의 기본 정리를 증명하기 위한 아이디어로 자연스럽게 연결될 수 있다. 또한 소인수분해의 유일성과 관련하여 왜 1을 소수에서 제외하였는가를 논리적으로 설명할 수 있다는 이점이 있다. 나눗셈을 기반으로 하는 소수, 합성수에 대한 정의가 1의 소수성을 설명하기 어렵다는 증거는 '1은 소수인가요?'라는 설문문항에 대한 학생들의 응답에서 그대로 드러났다. 이 설문문항에 대한 학생들의 응답은 <표 IV-3>와 같이 정리할 수 있었다.

<표 IV-3>에서 볼 수 있듯이, 나눗셈 기반의 정의로 소수를 이해하는 학생들은 1의 소수성을 판정하기 위하여 소수는 약수로서 '1'과 '자기 자신'만이 존재한다는 조건에 부합되는지를 조사하였으며, 이때 '자기 자신'이 1이어도 되는지 아니면 1과는 다른 수여야 하는지가 중요

<표 IV-3> 1의 소수성에 대한 학생들의 응답 및 항목별 응답 학생 수

1의 소수성	이유	응답 수	
소수가 아님	소수는 약수가 1과 자기 자신	57	171 (80%)
	소수는 약수가 2개	51	
	약속	36	
	소인수분해의 어려움	4	
	부적절한 이유 제시	14	
	이유 없음	9	
소수임	1과 자기 자신이 약수	3	21 (10%)
	1 이외 약수가 없음	1	
	약수가 없음	3	
	부적절한 이유 제시	10	
	이유 없음	4	
무응답		22 (10%)	
합계		214	

한 변수로 작용하였다. 따라서 소수의 약수는 '1'과 '1이 아닌 자기 자신'이라는 '약속'이 없이는 1의 소수성을 판정할 수 없게 되며, 소수의 정의라는 '규칙'을 적용하려면 1이라는 숫자가 '예외'가 될 수밖에 없는 것이다. 즉, 나눗셈을 기반으로 소수와 합성수를 정의한다면 1이 소수가 아닌 이유를 논리적으로는 설명하기 힘들어지며 단지 1은 예외로 둔다는 약속이 필요하게 되는 것이다.

그러나 4명의 학생들은 소인수분해의 어려움을 이유로 1이 소수가 아니라는 응답을 하였다. 이러한 응답의 예는 아래 [그림 IV-12]와 같다.

약수가 1개 밖에 없고 어쨌든 1이 소수이면
소인수 분해가 끝이 나지 않습니다.

[그림 IV-12] 소인수분해의 어려움을 이유로 1이 소수가 아니라고 응답한 예

[그림 IV-12]에서 볼 수 있듯이 '1이 소수이면 소인수분해가 끝이 나지 않습니다.'라는 학

생의 응답은, 1이 소수라는 것이 산술의 기본 정리가 보장하는 소인수분해의 유일성과 모순이라는 것을 지적한 것이다. 이러한 응답은 산술의 기본 정리와 관련하여 1이 소수에서 제외된 맥락을 이해하는 것으로, 일종의 '약속'에 의해 자연수에서 약수의 개수가 2개일 때에만 소수가 될 수 있다는 기능적인 이해와는 차이가 있다. 1의 소수성에 대한 교사들의 탐구과정을 보여주는 Davis(2008)의 연구에서도 소수를 곱셈적으로 정의하는 것이 산술의 기본 정리와 관련하여 1을 소수에서 제외하게 된 수학사의 맥락과 일맥상통한다는 것을 보여준다.

정리하면, 소수와 합성수 사이의 곱셈적 관계를 이해하는 것은 합성수를 그 수의 소인수들의 곱으로 분해할 수 있다는 사실의 인지와 관련이 있다. 즉, 소인수분해를 단순히 어떠한 알고리즘을 수행하는 절차로서 인식하는 것이 아니라 산술의 기본 정리가 내포하고 있는 의미를 표현하는 것으로서 인식할 때 소수와 합성수 사이에 존재하는 곱셈 관계를 볼 수 있는 것이다. 이를 위해서는 곱셈에 기반한 소수와 합성수의 정의, 곧, 주어진 자연수가 1보다 크고 자기 자신보다 작은 두 수의 곱으로 표현될 수 있는지, 없는지를 명시적으로 나타내 주는 소수와 합성수의 정의가 도움이 될 것이다.

V. 결론 및 논의

소수는 초등학교에서 학습하는 자연수의 곱셈 관계에 대한 확장으로서, 이후에 대수적 곱셈 관계에 대한 예비학습단계로서, 그리고 대학 정수론과 현대대수를 위한 기본 아이디어로서 의미를 갖는다. 소수의 개념을 이해한다는 것은 단순히 소수의 정의를 말할 수 있다는 것을 넘어서, 소수의 뜻을 의미 있게 설명할 수 있어야 하며 소수의 개념을 관련 개념들과 연결시키고 문제해결을 위하여 소수 개념을 적용하는 등 소수 개념을 가지고 의사소통 할 수 있음을 의미한다.

우리나라 수학과 교육과정에서 소수 개념은 중학교 1학년에서 거듭제곱, 합성수, 인수, 소인수 등의 개념과 함께 등장하며, 자연수의 소인수분해와 그 활용에 초점을 두고 다루어진다. 그러나 소수의 개념은 서로 관련된 기본 개념들과 관계적으로 다루어지기 보다는 자연수를 소인수분해하기, 소인수분해를 이용하여 자연수의 약수의 개수 구하기, 두 자연수의 최대공약수와 최소공배수를 구하기 위해서 소인수분해 활용하기 등에서 절차적으로만 다루어질 뿐이다.

또한 소수와 소인수분해의 아이디어 및 관련 성질들은 고등학교에서 다루어지는 다항식의 인수분해와 인수정리를 이해하기 위한 예비학습단계가 될 뿐 만 아니라 현대대수, 정수론, 암호학 등 보다 높은 수준에서 학문으로서 수학을 연구하기 위한 기본 아이디어로서도 중요한 위치를 차지하고 있음에도 불구하고, 중학교 1학년에서 이 내용은 다른 단원과의 연계성이 결여된 채 집합과 자연수 단원에서만 독립적으로 다루어져 이후의 학습을 위한 기초 개념으로서의 역할을 제대로 감당하기 어렵게 된다.

본 연구에서는 소수와 합성수 개념을 학습한 중학교 1학년 학생들의 이해에 대하여 설문조사를 중심으로 자료를 수집하고 분석하였다. 연구결과는 학생들이 개념적인 면을 강조한 정의보다는 기능적인 면을 강조한 정의를 선호한다는 것을 보여주었다. 즉, 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수를 소수라고 정의하는 것은 더 이상 쪼개어질 수 없는 기본 단위로서 소수의 개념이 강조될 수 있지만, 학생들은 이러한 소수의 개념적인 면

을 보지 못하고 약수의 개수가 2개인가 3개 이상인가에 주목하여 주어진 자연수가 소수인지 아닌지를 구별하기 위한 기능적인 정의를 선호하고 있었다. 또한 주어진 자연수가 소수인지 또는 합성수인지 구별하는 것에 초점이 맞추어진 교육과정, 그리고 자연수의 곱셈적 구조와 연결되지 못한 채 주어진 자연수를 소인수분해하는 절차만을 학습하는 것 등은 학생들로 하여금 소수와 합성수의 곱셈적 관계에 주목하지 못하고 단지 소수와 합성수를 배타적인 것으로 분리하게 하고 있었다.

소수는 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이므로, 합성수는 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신 이외의 약수를 가지는 수라고 설명할 수 있다. 여기에서 이 설명을 다른 말로 표현하고자 할 때, '합성수는 1과 자기 자신 이외의 약수를 가지므로 약수의 개수가 3개 이상이다.'라는 것보다는 '합성수는 1과 자기 자신 이외의 약수를 가지므로 1보다 큰 두 수의 곱으로 표현할 수 있다.'라고 말하는 것이 소수와 합성수의 곱셈적 관계와 자연스럽게 연결될 수 있다. 자연수의 집합은 나눗셈에 대하여 닫혀있지 않다. 그런데 왜 주어진 자연수의 가분성에 기반하여 약수를 살펴보는 것으로 소수와 합성수를 정의하려 하는가? 나눗셈에 기반한 소수와 합성수의 정의 방식은 학생들에게 소수의 개념적인 면보다 기능적인 면을 부각시킬 뿐이다. 자연수는 유일소인수분해 정역으로 나눗셈이 아닌 곱셈에 기반한 구조를 가지고 있다. 따라서 자연수를 곱셈적으로 구성하기 위한 기본 단위로서 소수의 중요성과 역할을 강조할 수 있는 정의가 필요할 것이다.

한편 소수 개념에 대한 학생들의 이해를 분석하는 과정에서 '소수'라는 용어에 대하여도 재고할 필요성을 발견하였다. 학생들은 소수(素數) 개념을 중학교 1학년에서 처음 접하지만, '소수'라는 용어가 이미 수년간 익숙하게 사용해오던 소수(小數)와 동음이의어라는 것도 소수(素數)에 대한 올바른 개념을 형성하는데 방해가 되는 것으로 나타났다. 예를 들어, 소수(素數)가 무엇인지 설명하기를 요구하는 설문 문항에서 "0.1, 0.2, 0.3 이런 것", "소수점이 있는 수" 등과 같이 소수(小數)를 설명한 학생도 있었고, "소수는 잘 모르겠지만 6학년 때 배운 소수는 아닌 것이 확실하다."라고 응답한 학생도 있었다. 또한 면담에서 "소수는 초등학교 때에도 배웠는데 중학교에 오니 갑자기 뜻이 바뀌어서 어렵다."라고 말한 학생도 이러한 혼동을 보여준다.

이는 수학용어로서 소수(素數)가 표현하고자 하는 개념의 본질적인 것을 나타내기에 적절한가라는 문제를 제기한다. 소수에 대응되는 영어 표현인 'prime'은 형용사로서 '중요한' 또는 '근본의' 등 뜻을 가지고 있어 소수가 수 가운데서 어떤 의미에서 근본이 되는 수이며 중요한 역할을 담당하고 있음을 짐작할 수 있게 한다. 한글로 표현된 것 중에서도 이무현(1998)은 유클리드 원론을 번역하면서 소수를 '홑수(p.99)'라 하였고, 서로소인 수들을 '서로 남남(p.99)', 서로소가 아닌 수들을 '서로 한뿌리(p.100)' 등으로 번역하여 소수가 서로 다른 수의 같은 뿌리, 즉, 근본으로서의 역할을 할 수 있음을 알 수 있게 하였다. 뿐만 아니라, 수학용어의 한글화작업이 이루어진 북한에서도 '씨수'라는 용어를 채택하였고(한국과학기술단체총연합회, 2003, p.179), 1994년에 대한수학회에서 발행한 수학용어집(p.127)에도 영문용어 'prime number'에 대한 한글용어로써 '소수'와 '씨수'를 동시에 소개하고 있음을 볼 수 있다. 그러나 우리나라 학교수학에서 사용하고 있는 용어인 소수의 한자 '소(素)'를 한자사전[6]에서 찾아보면 '희다'라는 뜻

이 대표적이며 '무늬가 없다', '장식이 없다', '바탕을 꾸미지 않은 그대로이다' 등 여러 가지 뜻을 가지고 있다. 한자 '소(素)'의 의미 중 '소수'를 위한 것은 '근본, 바탕'이라는 뜻으로 다섯 번째에 이르러서야 제시되어 있으나 한자세대라기보다는 영어세대인 학생들이 그 의미를 제대로 파악하기는 어렵다. 학생들에게 소수가 무엇인지 설명하도록 하는 설문이 해당 단원의 학습이 종료된 시점으로부터 일주일 이내에 실시되었음에도 불구하고 전체의 1/3에 해당하는 상당수의 학생들이 부적절한 응답을 하거나 아예 응답을 하지 않았다는 사실은 학생들에게 낯선 소수 개념에 좀 더 본질적으로 다가갈 수 있는 의미 있는 교수-학습 활동 및 지도방안이 연구되어야 할 필요성이 있음을 시사한다.

본 연구는 소수의 정의에 초점을 두고 학생들의 이해를 살펴보았지만, 소수 또는 소인수분해와 관련된 선행연구들에서는 수의 소인수분해 된 형태로서 제시된 표현으로부터 자연수의 곱셈적 구조를 보는 주의력이 학습자에게 결핍되어 있음에 주목하고 있다. Zazkis(2008)가 지적하였듯이, 소인수분해 표현으로부터 자연수의 곱셈 관계를 묻는 문제들은 수학자들에게 너무나도 당연하여 물어볼 가치가 있는지조차 의심스러울 수 있다. 그러나 그것은 문제들에 내재된 구조에 주의를 기울이거나 그 구조를 "보는(seeing)" 사람에게만 단순하다. 수학자의 눈에는 당연한 구조가 왜 학생들의 눈에는 보이지 않는가? 학생들은 자연수의 소인수분해 표현으로부터 무엇을 보는가? 학생들은 자연수의 곱셈적 구조를 어떻게 인식하게 되는 것인가? 학생들은 어떻게 절차로부터 구조로 나아갈 수 있는가? 즉, 절차와 구조 사이에는 무엇이 있는가? 이러한 물음들은 본 연구를 보다 발전시켜 새로운 연구로 나아가는 출발점이 될 수 있을 것이다.

6) http://kr.dic.yahoo.com/search/hanja/

참고문헌

강신덕 · 함남우 · 홍인숙 · 김영우 · 이재순 · 전민정 · 라미영(2008). **중학교 수학 1 교과서**. 서울: (주)교학사교과서.

교육과학기술부(편)(2008). **중학교 교육과정 해설 (III)**. 서울: 교육과학기술부.

김응태 · 박승안(2005). **정수론** (제6판). 서울: 경문사.

김응태 · 박승안(2006). **현대대수학** (제6판). 서울: 경문사.

대한수학회(편)(1994). **수학 용어집**. 서울: 경문사.

박수연(2004). **중학교 수학에서 대수학습의 효율적인 지도과정 연구: 중학교 1학년 중심으로**. 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문.

신근영(2006). **완전수로부터 메르센느 수까지, 그리고 그의 응용**. 한남대학교 교육대학원 석사학위논문.

우영진(1976). **소수의 지도에 관한 연구**. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.

우정호 · 박교식 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 임재훈 · 박인 · 지은정 · 신보미 · 최인선(2008). **중학교 수학 1 교과서**. 서울: (주)두산.

이무현(역)(1998). **기하학원론 해설서: 비율, 수** (사: 나(제 5, 6, 7, 8, 9권) 해설서). 서울: 교우사.

조경희(2002). **중등수학의 대수적 구조 연구: 중학교 7단계를 중심으로**. 충남대학교 교육대학원 석사학위논문.

한국과학기술단체총연합회(편)(2003). **남북과학기술용어집: 수학**. 서울: 이지.

한자사전 http://kr.dictionary.search.yahoo.com/search/dictionaryp?id=3017360&subtype=hanja&p=%EC%86%8C%EC%88%98&prop=23

Burton, D. M. (2007). **기초 정수론** (제 6판) (이준복, 이중섭 역). 서울: 한국맥그로힐(주). (원저 2005 출판)

Campbell, S. R., & Zazkis, R. (Eds.) (2002). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*. Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing.

Davis, B. (2008). Is 1 a Prime Number? Developing Teacher Knowledge through Concept Study. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 86-91.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary* (Vol. 2, 2nd edition). NY: Dover Publications.

Hungerford, T. W. (1990). *Abstract algebra: An introduction*. Saunders College Publishing.

Liljedahl, P., Sinclair, N., & Zazkis, R. (2006). Number concepts with Number Worlds: Thickening understandings. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(3), 253-275.

Mason, J. (2002). What makes an example exemplary? Pedagogical and reserch issues in transitions from numbers to number theory. In J. Ainley (Ed.), *Proceedings of the 26th International Conference for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 223-229). Norwich, UK: University of East Anglia.

Merriam, S. B.(2005). **정성연구방법론과 사례연구**. (강윤수 · 고상숙 · 권오남 · 류희찬 · 박만구 · 방정숙 · 이중권 · 정인철 · 황우형 역). 서울: 교우사. (원저 1998 출판)

Rosen, K. H. (1993). *Elementary number theory and its applications* (3rd ed.). Addison Wesley.

Sinclair, N., Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Number Worlds: Visual and experimental access to number theory concepts. *International Journal of Computers in Mathematical Learning, 8*(3), 235-263.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. Research in Collegiate *Mathematics Education, 4*, 210-238.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 207-218.

Zazkis, R. (2008). Divisibility and transparency of number representations. In M. P. Carlson, & C. Rasmussen (Eds). *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 81-91). The Mathematical Association of America (MAA notes).

Zazkis, R., & Campbell, S. (1996a). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R., & Campbell. S. R. (1996b). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 207-218.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (Eds.) (2006). *Number Theory in mathematics education: Perspectives and prospects*. Lawrence Erlbaum Press.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 44-52). Reston, VA: NCTM.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164-186.

Middle School Students' Understanding about Prime Number

Cho, Kyoung Hee (Gyeonggi Science High School)
Kwon, Oh Nam (Seoul National University)

The goals of this study are to inquire middle school students' understanding about prime number and to propose pedagogical implications for school mathematics. Written questionnaire were given to 198 Korean seventh graders who had just finished learning about prime number and prime factorization and then 20 students participated in individual interviews for member checks. In defining prime and composite numbers, the students focused on distinguishing one from another by numbering of factors of agiven natural number. However, they hardly recognize the mathematical connection between prime and composite numbers related on the multiplicative structure of natural number. This study suggests that it is needed to emphasize the conceptual relationship between divisibility and prime decomposition and the prime numbers as the multiplicative building blocks of natural numbers based on the Fundamental Theorem of Arithmetic.

* key words : prime number(소수), multiplicative structure of natural number(자연수의 곱셈적 구조), The Fundamental Theorem of Arithmetic(산술의 기본 정리)

논문접수 : 2010. 8. 5
논문수정 : 2010. 9. 4
심사완료 : 2010. 9. 11