

초등 수학 영재를 위한 폴리큐브 교수·학습 자료 개발 연구

박지영*·송상헌**

본 연구는 초등 수학 영재를 대상으로 폴리큐브라는 소재를 활용한 교수·학습용 자료 개발의 과정에서 드러나는 여러 가지 논의점을 바탕으로 차후 또 다른 교수·학습용 자료 개발에 주는 시사점을 도출하는 것을 목적으로 한다. 본 연구는 공간능력의 하위 요소들을 바탕으로 폴리큐브 과제와 관련되는 13개의 주제를 추출하여 이들 중 학년과 수준을 고려한 9개의 주제를 실제로 반영한 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하였다. 이 자료들을 가지고 두 차례 현장 적용을 하는 동안 4명의 개별 학생들이 보여주는 공간능력 활용 사례를 집중 분석하면서 활동들의 연계성과 난이도, 과제 제시방법 및 발문, 학습 형태, 보조 자료의 활용, 수업 소요 시간과 같은 항목들을 점검하고 수학 영재 교수·학습자료 개발방향에 따라 평가, 수정, 보완하였다. 이를 통해 수학 영재 교수·학습 자료의 개발 과정에 필요한 7가지 시사점을 제안하였다.

1. 들어가는 말

수학 영재 교수·학습 자료는 영재교육을 목적으로 설립하여 운영하는 기관에서 교육의 목적을 달성하기 위하여 개발하고 실제 교육에 투입하여 사용할 수 있는 자료를 말한다. 여기에는 학생들이 수업에 직접 활용할 수 있는 학생용 자료와 그 활동을 안내하는 교사용 자료가 있다. 교사용 자료에는 교사용 지도안과 학생용 자료를 안내하는 내용, 관련 이론적 배경, 교수·학습 자료 사용의 유의점, 보충활동이나 심화활동, 덧붙여 보충자료나 읽기자료 등이 포함된다.

교육현장에서 수업의 목표에 맞게 보다 적용이 쉬운 영재 교수·학습 자료를 개발하기 위해서는 수학 영재 교수·학습 자료의 원형을

개발해야 학습 상황과 대상에 맞게 변형할 수 있으며 학습 목표를 잘 달성시키는 과제를 만들 수 있다. 그래서 본 연구는 수학 영재 교수·학습 자료의 원형을 기초로 학생용 교재와 교사용 교재를 개발하여 활용하였다.

수학영재들을 위한 교수·학습 자료를 개발 방향은 단일한 주제에 대한 깊은 탐구를 할 수 있는 과제여야 하며 학습자 스스로 과제를 선정하고 자기 주도적으로 탐구할 수 있는 기회를 제공해야한다. 또 초등 수학영재의 수준에 맞게 구체물을 조작하는 활동이 적합하며 고차원적인 수학적 사고와 창의성을 배양하기 위해 다양한 관점에서 접근할 수 있는 열린 과제를 융통성 있게 운영하고 스스로 창의적인 산출물을 만들 수 있는 도전적인 주제로 개발해야 할 수 있다.

* 인천용마초등학교 (anese83@hanmail.net, 제1저자)

** 경인교대/아주대 (song2343@hanmail.net, 교신저자)

많은 연구들이 기하영역에서의 공간능력 발달을 강조하고 있으며 우리나라 7차 초등학교 교육과정에서도 '공간감각 기르기'라는 소 영역을 포함한 공간능력이라는 주제는 도형영역에서 간과할 수 없는 중요한 요소이다. 본 연구는 도형영역에서의 공간능력이 폴리큐브라는 소재를 탐구하는 수학영재들에게서 어떻게 드러나는지를 탐구하면서 이를 활용한 영재학급용 수학 영재 교수·학습 프로그램을 개발하는 과정에 대해 논의하고자 한다.

폴리큐브(poly cubes)는 단위 정육면체를 여러 개 면끼리 이어 붙여 만든 조각들이다. 우리나라에는 정육면체가 4개 이하인 폴리큐브를 이용한 피에트 하인(Piet Hein)식의 7조각 소마큐브라는 퍼즐이 잘 알려져 있다. 그러나 이 소마큐브는 기성제품으로 그것의 활용이 제한되어 있을 뿐만 아니라 왜 하필 7조각인지에 대해서도 불분명하다. 폴리큐브는 제대로 활용하기만 하면 공간능력을 신장시키기 위한 도형영역에서 과제를 개발하는데 훌륭한 소재가 될 수 있다. 본 연구의 연구내용은 다음과 같다.

첫째, 폴리큐브를 소재로 활용하고자 할 때 관련시킬 수 있는 공간능력의 하위요소를 추출하고 이를 초등영재학급에 적용할 수 있는 요소를 반영한 교수·학습 자료를 개발한다.

둘째, 개발한 폴리큐브 교수·학습 자료를 실제 수업에 적용해 가면서 각 과제별로 학생들의 반응을 분석하면서 영재 학급용 수학 교수·학습 자료 및 그 개발 과정에 주는 시사점을 제안한다.

II. 이론적 배경

1. 공간능력

공간감각(spatial sense)과 공간능력(spatial ability)은 유사한 의미로 간주되어 왔으며 많은 연구에서 아직도 이 두 용어는 혼재되고 있다. 공간감각은 주변 상황과 물체 사이에 대한 직관이나 감각으로 보는 것에 비해 공간 능력은 공간의 대상, 관계, 변환에 대하여 정신적인 표상을 구상하고 이것을 조작하는 능력으로 정의할 수 있다. 권오남 등(1996)에 따르면 공간 능력은 인간에 대한 심리 측정적 연구방법으로부터 나온 구인으로 공간 속에 있는 내적표상을 기호화하거나 기억하여 이것을 다른 사물 또는 공간 위치에 관련시키는 능력이다. 교육을 통해 달성하고자 하는 목표가 공간에 대한 일반적인 이해능력이라고 할 때 공간 능력은 공간감각을 포함하고 있는 것으로 보아 본 연구에서는 공간능력이라는 용어를 사용하고자 한다.

공간 능력에 관한 1970년대 이후의 많은 연구들을 종합해 놓은 국내의 선행 연구들(권오남 외, 1996; 한기완, 2001; 정영옥, 2004; 이종영, 2005; 이지호, 2005; 김혜영, 2006; 류현아, 2007; 김유경, 2007; 이성미, 2007; 오은선 2007; 김남균, 2008)에도 공간 능력의 요인에 대해서는 이견이 있다. 그러나 공간 능력에 공간 시각화와 공간 방향화를 포함하는 견해는 동일하다. 다양한 의견을 가진 연구자들의 의견을 종합하면 공간 시각화 능력은 공간에서 도형을 지각하는 능력을 기본으로 하여 이를 회전하거나 조작하는 능력, 2차원에서 3차원으로와 같이 차원을 변환시키는 능력으로 구분할 수 있으며, 공간 방향화 능력은 우리가 공간에서 어디에 위치하고 있음을 알고 공간에서 이동해 가는 방법을 아는 능력으로 공간 방향화 능력은 방향파악 능력, 위치파악 능력, 거리파악 능력, 공간 도형 구조 파악능력이라고 할 수 있다.

이러한 공간 능력의 하위요소 가운데 본 연구의 소재가 되는 폴리큐브를 통하여 배양시킬 수 있는 요소로는 공간 시각화 요소 중 회전과 조

작, 변환능력이며 공간 방향화 요소에서는 공간 도형 구조 파악능력이다. 따라서 공간능력의 하위요소 중에서 본 연구에서 활용하게 될 폴리큐브와 관련한 공간능력의 하위요소는 <표 II-1>과 같이 설정할 수 있다.²⁾

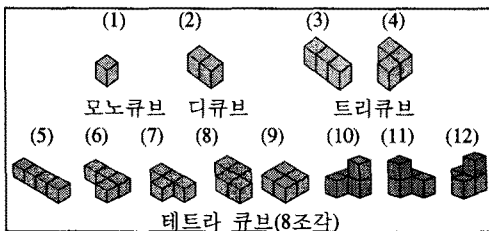
<표 II-1> 공간 능력의 하위 요소

공간 시각화 능력 (V)	회전 및 조작능력 (VR)	도형을 회전하여 새로운 도형을 만들거나 도형의 차이점을 비교할 수 있는 능력
	변환능력 (VT)	2차원에서 3차원으로 변환하여 도형을 구성할 수 있는 능력
공간 방향화 능력 (O)	공간도형 구조 파악 능력(OS)	다양한 방향에서 물체를 보고 공간상에 있는 물체의 구조를 인식하는 능력

2. 폴리큐브

폴리큐브(poly cubes)는 단위 정육면체를 여러 개 면끼리 이어 붙여 만든 조각 모양이다. 정육면체의 개수에 따라 1, 2, 3, 4, ……를 뜻하는 그리스어의 접두사를 이용하여 모노큐브(monocube), 디큐브(dicube), 트리큐브(tricube), 테트라큐브(tetracube), 펜타큐브(pentacube) 등으로 부른다. 이 때 입체의 모양이 공간에서 합동인 경우는 한 가지로 본다.

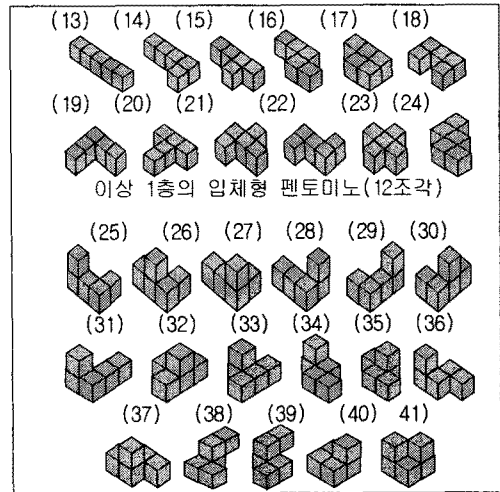
폴리큐브는 평면도형인 단위 정사각형의 변을 이어 붙여 만든 폴리오미노(polyominoes)를 입체도형으로 확장한 것이라고 할 수 있다.




<그림 II-1> 테트라큐브(8조각) 외

테트라큐브(tetracube)는 6-가 교과서 4. 쌓기 나무 단원의 ‘문제를 해결하여 봅시다’ 활동에 등장하고 있는데 교사용지도서(교육인적자원부, 2003)에서조차 그 활동의 목표가 분명하지 않으며 공간감각을 배양할 수 있을 것이라는 간단한 말만 제시되어 있을 뿐 이 활동이 가지는 장점이나 의의, 지도 방법을 구체적으로 제시하지는 않고 있다. 쌓기나무라는 교구를 통하여 일회성으로 만들어 보는 활동이 될 뿐 쌓기나무를 통한 3차원 공간을 탐구하는 심화활동으로서의 의미를 찾기는 어렵다.

하지만 평면형인 테트로미노와 관련지어 기준에 따라 분류하면 테트라큐브도 비교적 쉽게 이해할 수 있다. 우선 1층으로만 이루어진 것은 테트리스 게임에 사용되는 5종의 테트로미노와 동일한 모양이다.




<그림 II-2> 펜타큐브(29조각)

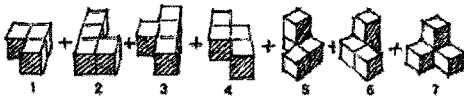
2층으로 만들 수 있는 펜타큐브 조각은 트리큐브의  모양의 각 칸 위에 정육면체 하

2) 공간 시각화 능력- 회전 및 조작(VR): Spatial Visualization Ability-Rotation & manipulation

공간 시각화 능력- 변환(VT): Spatial Visualization Ability-Transformation

공간 방향화 능력- 공간구조 파악능력(OS): Spatial Orientation Ability -Structure cognitive ability

나를 더 올려놓은 3개가 있는데 이 중 (10)번과 (11)번 조각들()은 면대칭(거울대칭)의 위치에 있을 뿐 서로 합동은 아니다.³⁾ 앞, 옆, 위 어느 방향으로 보더라도 모두 3층의 되도록 하는 구조물을 만들려면 정육면체는 최소한 7개가 필요하다. 따라서 테트라큐브에는 3층이상의 구조물이 없다. 정육면체를 4개 이하만 사용한 조각들 중 일부를 사용하여 만든 퍼즐로 <그림 II-3>의 피에트 하인식 소마큐브가 알려져 있다.






<그림 II-3> 피에트 하인의 소마큐브




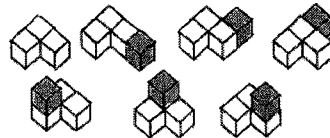
<그림 II-4> 수학사랑에 소개된 소마큐브

그러나 각 조각 아래의 번호가 무엇을 의미하는지, 배열 기준은 무엇인지, 여러 가지 조합 가운데 왜 하필 이 7조각을 선택했는지에 대한 설명이 분명하지 않은 데도 많은 자료들이 인터넷(Wikipedia, Wolfram Math World, 수학사랑 등)에 소개되고 있는 이 자료를 무비판적으로 인용하고만 있다. 이에 대해 송상현(2004:81)은 그에 대한 궁금증을 아래와 같이 해설하고 있다.



테트라큐브(입체형 테트로미노) 8조각은 32개의 정육면체를 사용되므로 정육면체가 아닌 직육면체만 만들 수 있다. 테트라큐브 2세트를 이용하면 4×4×4의 정육면체 구조물도 만들 수 있지만 3×3×3 구조물을 만들려면 어떻게 할까? 한 줄로 긴 4칸의 일자형()은 불필요하

므로 이를 없애고 가장 단순한 2×2×1 모양()에서 정육면체 하나를 빼고 정육면체 3개로 만든 'ㄱ'자 모양()의 조각을 포함하여 모두 7조각으로 소마큐브를 만들게 된다(p. 81).

그런데 <그림 II-5>처럼 정육면체 3개로 만든 'ㄱ'자 모양의 조각()을 기준으로 그림을 재배열하면 1층과 2층으로 이루어진 조각들로 구분할 수 있으며 각 조각들이 서로 어떻게 관련되는 지도 살펴볼 수 있다. 사실, 'ㄱ'자 모양은 7조각의 소마큐브를 구성하는 기본형이다.⁴⁾



<그림 II-5> 소마큐브 7조각

피에트하인은 정육면체 3개로 이루어진 'ㄱ'자 모양을 기본형으로 선택했지만 이 대신 한 줄로 3개인 '—'자형()을 추가해도 되며,  모양을 추가하고 정육면체 4개로 이루어진 다른 조각을 하나 제거해도 된다. 이런 방식으로 16종의 유사소마큐브를 만들 수 있다.

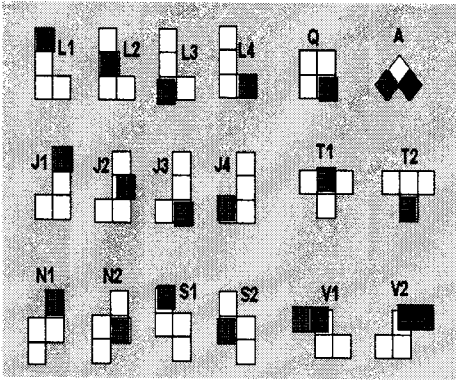
이제 정육면체 5개를 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 모양 조각은 모두 몇 개인지를 찾아보려는 태도는 학생이 자발적으로 생기기 전까지는 교사가 끊임없이 자극해 주는 발문을 통해 형성될 수 있다. 빠짐없이 중복되지 않게 모든 모양을 찾으려면 어떤 기준이 필요하다. 규칙을 찾아 그 기준을 세워보려는 생각은 응용과 일반화할 수 있는 능력을 키우는 매우 중요한 수학적 사고이다. 이것은 기성제품으로서의 소마큐브만 가지고 돌아보는 활동으로는

3) 면대칭의 위치에 있는 두 도형은 그 자체가 면대칭이 아니라면 (양 손처럼) 3차원 공간에서 아무리 돌리거나 뒤집어도 포개어 놓을 수 없다.

4) 이 7조각의 고유한 이름은 존재하지 않지만 영어 알파벳 모양으로 적어보면 1층은 C, L, Z, T, 2층은 C1, C2, C3로 불릴 수도 있다.

달성할 수 없는 생각이다.

펜타큐브(pentacube)는 1층으로 이루어진 12종의 입체형 펜토미노와 2층으로 이루어진 27종을 합쳐 모두 29종이다. 이것도 <그림 II-6>처럼 1층의 알파벳 모양을 기준으로 2층에 정육면체를 하나, 둘씩 덧붙여가면서 기준에 따라 분류하거나 이름을 지어가면 쉽게 찾을 수 있다⁵⁾.



<그림 II-6> 펜타큐브의 입체형(L3와 J3는 합동)

펜타큐브의 2층 구조물에는 면대칭의 위치에 있는 두 모양들이 많다. L과 J, N과 S는 서로 면대칭의 위치에 있다. 면대칭의 위치에 있는 두 구조물의 경우도 그 자체가 면대칭 도형인 경우와 그렇지 않은 경우로 구분할 수 있다. L3와 J3처럼 구조물의 모양 자체가 이미 면대칭을 이루고 있다면 면대칭의 위치에 있는 두 도형은 서로 합동이다. 따라서 <그림 II-6>에서 합동이 아닌 펜타큐브의 2층 구조물은 모두 27종이다. <그림 II-1>과 <그림 II-2>의 폴리큐브 조각들을 간단히 정리하면 <표 II-2>와 같다 (송상현, 2010).

폴리큐브 과제는 추상성을 추구하면서도 구체물을 이용하여 학습하기를 즐기는 초등학교 수학 영재의 수준에 맞아 초등학교 영재아동이

<표 II-2> 폴리큐브 조각들의 특징과 분류

번호	조각별 정육면체 개수	조각의 개수	총 정육면체 개수	조각들의 이름	
(1)	1(날개)	1	1	모노큐브	
(2)	2(1층)	1	2	디큐브	
(3)~(4)	3(1층)	2	6	트리큐브	
(5)~(9)	4(1층)	5	20	테트라큐브	(5)와 (9)를 제외하고 (4)를 포함시키면 소마큐브
(10)~(12)	4(2층)	3	12		
(13)~(24)	5(1층)	12	60	펜토미노	펜타큐브
(25)~(41)	5(2층)	17	85		
계		41종	186 개		3D블로커스, 유사소마큐브 가능

학습에 즐겁게 참여할 수 있는 기회를 제공할 뿐 아니라 입체에서 면대칭, 부피, 길넓이와 같은 개념을 쉽게 학습할 수 있도록 하며 회전, 대칭과 같은 공간 시각화 능력과 퍼즐을 이용하여 소마큐브보다 훨씬 다양한 구조물 만들기 와 학습활동이 가능하여 공간 능력을 기를 수 있는 좋은 소재가 될 수 있다.

III. 연구 방법 및 절차

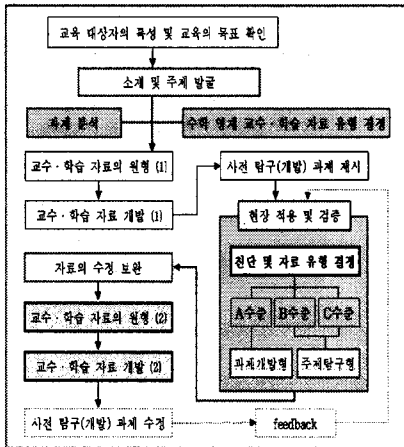
1. 폴리큐브 교수·학습 자료 개발

본 연구는 최종현(2004)과 김양권(2009)의 교수·학습 자료개발 모형을 기초로 폴리큐브를 활용한 교수·학습 자료를 개발하면서 <그림 III-1>과 같은 절차로 진행한다.

가. 교육 대상자의 특성 및 교육 목표 확인

본 연구의 대상은 인천광역시 소재 지역공동 영재학급 5학년 2개 반 각 20명씩 총 40명이다.

5) <http://www.gamepuzzles.com/sqnames.htm> (펜타큐브 조각 이름 짓기)



<그림 III-1> 수학 영재 교수·학습 자료 개발 절차 모형(김양권, 2009:52)

교육청 지정 지역공동 영재학급으로 주변 20개 학교에서 3단계에 걸쳐 선발된 아동으로 수학 성취도는 전체 아동 대비 상위 5%정도라고 볼 수 있다.

<표 III-1> 연구대상자

집단 구분	교육대상자	수업적용 횟수(시간)	또래연령 대비성취도수준	적용 시기
A	G 영재학급 5-1반(20명)	2시간씩 3회(6시간)	상위 5%	1차
B	G 영재학급 5-2반(20명)	2시간씩 3회(6시간)	상위 5%	2차

교육의 목표는 폴리큐브라는 과제를 통한 3차원 공간의 탐구이다. 아동은 폴리큐브를 통하여 3차원 입체에서 공간도형의 성질을 파악하고 이를 변환하거나 회전하며 입체 도형의 구조를 파악해야 한다.

나. 학습 소재/ 주제의 발굴

학습 소재 및 주제는 6-가의 4. 쌓기나무 단원의 '문제를 해결하여 봅시다' 라는 심화활동에서 제시된 폴리큐브 과제를 선정하였다. 이

과제는 교육과정의 심화활동으로 활용할 수 있으며 3차원 공간에 대한 깊이 있는 탐구가 가능한 주제이다.

다. 교수·학습 자료의 유형 결정

수학 영재 교수·학습 자료의 유형에는 크게 문제 해결형, 주제 탐구형, 과제 개발형, 연구형이 있다(송상헌, 2004; 김양권, 2009:57). 이중 주제 탐구형은 특정한 내용이나 소재를 활용한 주제를 잡아 그 주제를 중심으로 내용을 깊이 있게 탐구하는 방식이며 단일주제 심화형은 한 가지 주제에 대해 오랜 시간을 집중하면서 학생 스스로 수학적 개념이나 법칙을 발견하거나 수학적 지식을 통합, 발전시킬 수 있는 기회를 제공하는 방식이므로 본 연구에 적합한 유형이다. 본 교수·학습 자료는 폴리큐브라는 단일 주제에 초점을 맞추고 이를 심화시켜 개발한 단일 주제 심화형이다.

라. 공간능력과 관련한 폴리큐브 학습 요소의 추출

본 연구의 교수·학습 자료는 공간능력의 향상을 목적으로 하고 있으므로 공간능력의 하위 요소에 맞추어 활동을 선정하였다. 공간능력과 관련하여 본 연구에서 선정한 학습 요소는 <표 III-2>와 같다. 이를 바탕으로 활동의 연계성, 과제의 난이도, 연구 대상자의 수준, 주제 탐구형이라는 교수·학습 자료 유형에 따라 학습 활동의 순서를 결정한다. 선정된 학습 활동은 학습자의 수준, 시간적 제약에 의하여 13개의 폴리큐브 학습 요소 중 <표 III-3>과 같은 9개의 요소만 실제 자료에 반영하였다.

마. 교수·학습 자료의 원형 개발

선행연구에서 연구된 공간능력을 바탕으로 추출한 폴리큐브 학습 요소를 바탕으로 교수·

학습 자료의 원형을 만들었고 이를 토대로 교사용, 학생용 자료를 만들어 1차로 현장 적용을 실시한 후 도출된 결과와 개선점을 바탕으로 수정 보완하여 2차로 적용한 후 그 결과와

<표 III-2> 공간능력 하위 요소에 따른 폴리큐브 학습 요소

공간능력	폴리큐브 학습요소
회전 및 조작 <VR>	<ul style="list-style-type: none"> · 입체합동의 개념알기 · 테트라큐브 만들고 분류하기 · 펜타큐브 만들기 · 펜타큐브 분류하기 · 폴리큐브로 구조물 만들기
변환 <VT>	<ul style="list-style-type: none"> · 폴리큐브 구조물을 그림으로 표현하기 · 그림으로 표현된 자료로 구조물 만들기
공간도형 구조 파악 능력 <OS>	<ul style="list-style-type: none"> · 면대칭 관계의 도형 알기 · 면대칭 관계의 도형과 면대칭 도형 파악하기 · 부피, 겹넓이 세기 · 부피/겹넓이의 값이 작은 도형의 특징 파악하기 · 3층 조각이 되는 큐브의 개수 파악하기 · 폴리큐브로 정육면체, 직육면체 만들기

<표 III-3> 실제 자료에서의 포함한 폴리큐브 학습요소와 전개 순서

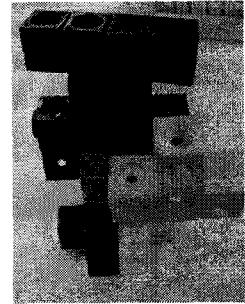
순서	활동 내용	공간능력
1	입체합동의 개념알기	VR1
2	테트라큐브 조각 만들고 분류하기	VR2
3	면대칭 관계의 도형 알기	OS1
4	펜타큐브 조각 만들고 분류하기	VR3
5	폴리큐브 활용하여 구조물 만들기	VR4
6	구조물을 시각화하여 표현하기	VT1
7	시각화된 자료로 구조물 만들기	VT2
8	큐브의 개수와 겹넓이 세기	OS2
9	부피/겹넓이의 값이 최소인 구조물	OS3

개선점을 바탕으로 최종본의 교수·학습 자료를 만들었다.

바. 교구

본 연구에서 사용한 교구는 <그림 III-1>의

연결큐브(Multi Link)이다. 쌓기나무는 2층 이상에서 옆으로 붙여 고정시키는 것이 어려우므로 구조물의 조작, 수정, 변경이 편리한 연결큐브를 사용하였다.



<그림 III-1> 연결큐브

3. 자료수집 및 분석기준

본 연구에서는 연구자가 수업의 실행자이며 동시에 수업의 관찰자가 되는 참여관찰을 실시하였으나 참여관찰의 문제를 보완하기 위해 1명의 참관 교사를 두었다. 면담도 실시하였는데 면담방식은 반 구조화된 면담이다. 또 아동이 수업에서 활용한 활동지와 수업 이후에 실시한 자기 평가 자료, 연구자와 참관교사의 관찰일지와 같은 기록물을 분석하였으며 수업전체를 비디오로 촬영하여 분석에 활용하였다.

연구결과를 분석하기 위하여 공간능력이라는 학습요소와 수학영재 교수학습 자료의 기준이라는 두 가지로 분석기준을 설정하였다. 이 중 개발된 교수·학습 자료가 그 개발방향을 얼마나 적절하게 구현하여 수학영재 교수·학습 자료로서의 타당도를 갖추었는지 파악하기 위하여 아래 다섯 가지의 분석기준을 마련하였다.

- 기준 1. 전통적인 학습 경험에 비하여 수준이 높고 정교하며 내용이 깊이 있고 추상적인가?
- 기준 2. 동일한 주제에 대한 활동을 흥미로운 활동에서 점차 깊이 있는 탐구가 필요한 활동으로 단계적으로 구성하면서 각 활동에는 연계성이 있도록 구성하였는가?
- 기준 3. 고차원적인 수학적 사고 능력(공간능력)을 기를 수 있는 자료인가?
- 기준 4. 학생의 자기 주도적인 탐구활동에 비중

을 두어 개발하였는가?
 기준 5. 다양한 활동 속에서 타당한 수학적 추측을 하고 탐구하며 수학적으로 의미 있는 의사소통 과정에 참여하면서 스스로의 사고를 체계화하고 명확화 할 수 있도록 하였는가?

인 증명은 아니나 평면과 입체를 대표할 수 있는 사물로 자신의 의견을 논리적으로 정당화할 수 있는 것이므로 기하학습 사고수준에서 3수준에 가까운 것으로 보인다. 초등학교 고학년은 보통 2수준 이상으로 판단하나 수학영재 아동은 일반 아동에 비해 조금 더 높은 수준으로 판단할 수 있다.

IV. 자료의 현장 적용 및 결과 분석

1. 공간능력 사례 분석

가. 입체합동

1차와 2차 적용 대상의 대부분은 폴리큐브를 구성하면서 옮기거나 돌려서 같은 조각이 되는 경우에는 같은 도형으로 보는 것이 타당하다고 답했으며 개념을 지칭하는 용어로 특히 A6은 공간에서의 의미를 분명하게 하기 위해서는 입체합동으로 불리는 것이 바람직하다고 대답하였다.6)

교사 : 그런데 A6은 왜 합동이 아니라 입체 합동이라고 이름을 붙였니?

A6: 평면도형은 뒤집으면 똑같은 조각인데요. 입체도형은 돌리면 되는데 뒤집으면 똑같은 조각이 안돼요.(VR1)

교사: 그래? 더 자세히 설명해 볼래?

A6: 'L' 조각은 돌리거나 뒤집으면 그렇게 생긴 모든 조각이랑 포개지는데요. 입체도형은 안 되는 게 있어요. 주먹을 쥐면요. 이것도 입체 도형이 되잖아요. 오른손을 왼손이랑 똑같이 만들려면요. 돌리면 안되구요. 뒤집어도 안되요. 오른손을 왼손이랑 똑같이 만들 수가 없어요.(VR1)

위의 A6 학생은 손이나 테트리스 조각과 같은 예를 가지고 정당화하였지만 이미 공간의 특징을 직관적으로 파악하고 머릿속으로 회전, 조작하는 활동을 한 것으로 보이며 또 형식적

나. 테트라큐브 만들기

1차 적용 때 대부분의 아동이 테트라큐브의 조각을 구성해냈으나 몇몇 아동이 오류를 보이기도 하였는데 A3학생을 포함한 7명의 아동은 2층 조각 3가지 중에서 2가지만 만들어내었다(VR2). 테트라큐브 2층 조각에는 면대칭의 위치에 있는 합동이 아닌 두 도형이 있는데 이것을 같은 것으로 보고 1 가지만 만든 것이다. 2차 적용에서는 테트라큐브의 개수를 추측하도록 했는데 7명의 아동은 1층 조각의 5가지만 구성하였다. 정신적으로 1층 조각만 구성(VR2)할 수 있는 아동의 결과를 통하여 2층 조각을 구성해야 하는 테트라큐브 과제는 아동이 3차원 공간에서 회전 및 조작능력을 경험하는 의미있는 과제가 될 수 있을 것으로 보인다.

다. 면대칭과 면대칭의 위치에 있는 도형

A6 아동은 동료와의 의사소통 과정을 거쳐 면대칭 관계의 도형을 탐구하는 데서 멈추지 않고 면대칭 도형과 면대칭의 위치에 있는 도형을 탐구해냈다.

A5: 10번은 짝이 있는데 11번은 없어.

A6: 11번은 왜 짝이 없을까?

A5: 대칭이 되게 2층 조각을 놓을 자리가 없잖아.

A6: 그러니까 왜 그렇지?

A5: 11번은 짝이 없으면 거울대칭 아닌 건가?

A6: 근데 11번 가운데 딱 자르면 두 개도 접

6) 개별 연구대상자를 구분하기 위해 A반 6번 학생은 A6, B반 7번 학생은 B7로 나타내며 공간능력의 하위요소들 중에 유형이 다른 것은 추가 번호를 붙임(<표 III-3>, <표 IV-4> 참조).

켜지잖아.(OS1)

A5: 아, 그럼 11번은 저 혼자서 거울대칭인 거네.

A6: 그럼 한 개가 면대칭인 거랑, 두 개가 거울대칭인 게 있나봐.(OS1)

A5: 그럼 11번은 두 개가 거울대칭인 거고 자기는 거울대칭이 안 되나?

A6: 11번은 거울대칭 아니지

이 과정을 통하여 아동들은 한 대칭 도형, 두 대칭 도형으로 부르기로 약속하였고 한 대칭(선대칭)인 도형은 두 대칭(선대칭의 위치에 있는)인 도형을 갖지 않는다(OS1)는 것을 발견하였다. 또 A6의 발견을 바탕으로 아동은 면대칭 관계의 도형과 면대칭 도형을 구분하고 그 특징을 발견할 수 있다는 사실을 알 수 있었다.

2차 현장적용 결과에 따르면 거울대칭, 유리대칭, 포개기 대칭, 면대칭 중에 면대칭으로 불렀는데 거울대칭이라는 용어가 나왔음에도 면대칭이라는 용어를 선택한 것으로 보아 아동들이 거울이라는 사물보다는 추상화된 면이라는 용어에 대한 선호도가 높은 것을 알 수 있었다.

또 면대칭 도형과 면대칭 위치에 있는 도형을 한 도형 면대칭, 두 도형 면대칭으로 불러 한 도형 대칭, 두 도형 대칭과 같은 용어를 사용한 1차에 비하여 개념적으로 완성된 용어를 사용하였다. 이 과정에서 특수한 반응 보인 B6은 면대칭을 통하여 평면에서의 선대칭을 발견하였으며 이를 다음과 같이 표현하였다.

B6: 그런데 선대칭 도형 관계의 도형은 합동이 되는데?

B7: 그래? 합동이 된다고?

B6: 뒤집으면 되잖아? 근데 두 도형 면대칭은 입체합동 안 되지 않나?

B7: 당연히 안되지. 그럼 평면은 두 도형 대칭이 합동이고 입체는 안되나 보다.(OS1)

이 아동은 면대칭을 통하여 선대칭 도형은 발견하였으나 점대칭 도형은 발견하지 못하였다. 이후 B6은 모둠별로 의사소통 하는 과정에서 선대칭 도형 관계가 있는 도형은 평면에서는 합동이지만 3차원 공간에서는 이런 경우 합동이 되지 않는다는 것(OS1)을 비교하여 입체합동의 의미와 면대칭의 의미를 종합적으로 표현하였다.

이렇게 도형에서의 성질을 발견하고 이를 적당한 용어로 표현할 수 있다는 점, 면대칭 도형과 면대칭의 위치에 있는 도형을 구분하여 다른 용어를 붙일 수 있는 것으로 보아 Van Hiele의 기하학습 사고 수준⁷⁾으로 볼 때 2 수준 이상이며 면대칭 관계의 도형과 선대칭을 비교하고 이를 기초로 평면과 입체의 합동 개념을 정당화 할 수 있는 것을 통해 3 수준에 가까운 2 수준으로 판단할 수 있었다.

라. 펜타큐브 만들기

이 과제에서 A6 아동은 2층 조각을 구성하면서 면대칭 관계에 있는 조각을 구성하여 아예 연결큐브끼리 이어 붙여 놓는 양상(VR3)을 보였다. 그런 이유로 중간과정에서 면대칭의 위치에 있지 않는 면대칭 도형도 2 개를 만드는 오류를 보이기도 하였으나 곧 수정하였다.

또 펜타큐브 모양을 완전하게 구성한 아동들이 보인 특징적인 전략을 살펴보면 여러 가지가 있었는데 주로 사용한 방식이 정육면체는 5개, 4개, 3개 등으로 줄이면서 나머지 조각을 회전(VR3)시켜 만드는 방식이었으며 소수의 아동 3명은 테트라큐브 조각에 정육면체 한 개를 덧붙이는(VR3) 방식으로 진행하는 아동도 있었다. 이 때 발견된 한 도형이 그 자체로 면대칭 도형이면 더 조각을 찾지 않고 그 자체가 면대

7) 반월래의 수준 구분은 초기에는 0수준부터 4수준으로, 나중에는 1수준부터 5수준으로 구분하고 있는데 여기서는 초기의 분류 기준에 따르고 있다.

칭 도형이 아니면 면대칭 위치에 있는 다른 도형을 만드는 모습을 볼 수 있었다(VR3).

마. 입체 구조물 만들기

본 활동과제는 폴리큐브 조각을 활용하여 자유롭게 구조물을 만드는 활동으로 공간 시각화 능력의 회전 및 조작능력(VR4)에 해당한다. 자기평가 및 교사와 관찰자 결과에 따라 19명의 아동들의 평균 점수는 5점 만점에 4.47점으로 대체적으로 모든 아동들이 구조물을 조작하는데 어려움이 없었던 것으로 판단된다(VR4).

아동들이 사용한 조각들을 살펴보면 되도록 많은 조각을 이용하여 구조물을 만들려고 하는 경향을 보였으나 주로 모노큐브, 디큐브, 트리큐브, 테트라큐브의 1층 조각을 주로 사용하였다. 이를 통해 2층 조각보다는 평면의 형태인 1층 조각들을 편하게 회전하고 조작하는 것으로 보인다(VR4).

바. 3차원을 2차원으로 변환

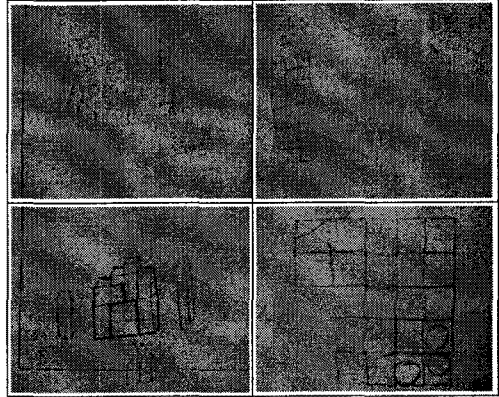
본 활동과제는 자신이 만든 3차원 구조물을 2차원 평면에 시각화하여 표현하는 활동으로 구성된 이 활동은 공간 시각화 능력의 하위요소 가운데 변환능력(VT1)에 해당하는 활동으로 3차원에서 2차원로의 변환과정이다.

이 활동 결과 아동의 성취도는 3.84점으로 잘한 편이나 공간 시각화 능력의 다른 요소인 회전 및 조작능력보다는 그 성취도가 낮았다. 이를 통해 변환능력이 덜 발달되어 있으며 이를 발휘할 수 있는 과제가 더 필요할 것 같다.

아동이 자신의 구조물을 표현한 방식에는 겨냥도 그리기, 위-앞-옆모양 그리기, 폴리큐브 모양 조각의 조립 형태를 각 방향으로 나타내기, 위에서 내려다 본 모양에 큐브의 개수를 써 넣기 등으로 나뉜다(VT1).

구조물을 시각화하여 표현할 때 6명(30%)의 학생이 오류를 보였다. 그 오류는 한쪽 방향에

서 본 모양만 그리는 경우, 위-앞 모양만 나타내어 빈 공간을 다 표현하지 못한 경우, 겨냥도 그리기의 오류 등이었다.



<그림 IV-1> 3차원→2차원 변환 사례들

사. 2차원을 3차원으로 변환

활동 4-3(VT2)의 성취도를 평가한 결과에 따르면 3.21점으로 활동 4-2(VT1)에 비하여 성취도가 0.6점 정도 낮게 나타났다. 이를 통하여 아동들이 3차원을 2차원으로 나타내는 것보다 2차원을 3차원으로 나타내는 것을 더 어려워한다는 것을 알 수 있다. 도형 정보를 해석하는 양상을 파악하여 보면 특히 위, 앞, 옆의 모양을 보고 해석하는 것을 가장 어려워하고 그 다음은 겨냥도 형태였으며 위에서 내려다 본 모양에 큐브의 개수를 써넣은 형태를 가장 편하게 여겨 구조물을 잘 구성하였다(VT2).

의사소통 과정에서 아동들은 구조물을 정확하게 만들 수 있는 가장 좋은 그림이 어떤 형태여야 하는지 토론하였다. 이 때 속이 비었거나 튀어나온 부분이 있는 경우에는 겨냥도나 위, 앞, 옆의 모양을 모두 그려야 하나 구조물이 대칭이 되지 않더라도 옆의 모양 가운데에서는 한 방향의 그림만 존재해도 가능하다는 것도 알게 되었다(VT2).

아. 부피와 길넓이 세기

2차 적용에서는 한 모듬이 다음과 같은 활동 사례를 나타내었으며 이를 통해 부피와 겹넓이를 세는 전략을 잘 탐색하고 활용할 수 있음을 알 수 있었다.

교사: 큐브/면의 값을 높이려면 어떻게 해야 할까요?

A7: 분자를 크게 해줘야 하나까 큐브를 많이 써야 해요. 테트라큐브를 써야 하나까 테트라큐브 조각을 다 쓰면 우선 분자 값이 커져요.

교사: 그러면 분자는 크게 해주고 분모는 작게 해주면 되겠네요, 테트라큐브를 다 쓰면서 면의 값을 작게 만들려면 어떻게 해야죠?

A8: 우선 움푹 들어가거나 튀어나온 부분이 없어야 되요. 하나 더 튀어나오면 면이 5개 늘어나고 하나가 비어있으면 면이 3개나 늘어나잖아요.

교사: 또 다른 방법은 없나요? 면을 줄일 수 있는 방법을 살펴보세요. 테트라큐브 조각을 관찰하면서 찾아봅시다.

...

A9: 테트라큐브 긴 조각은 면이 18개인데 정사각형 조각은 12개예요. 넓직한 거 보다 뭉쳐져 있으면 면이 작아지는 것 같아요

A15: 큐브를 이을 때 여러 면이 붙어지도록 이으면 면이 줄어요.

교사: 더 자세히 설명해 줄래?

A15: 큐브 하나당 면이 6개잖아요. 큐브를 붙일 때 두 면이나 세 면이 이어지면 그만큼 겹으로 드러나는 부분이 적어지는 거 같아요.

A19: 면을 이을 때 제일 가운데 있는 건 6면이 다 붙어지게 만들면 되지 않을까요?

A8: 6면이 다 붙어지게 만들면 넓적하게 안 되고 뭉쳐질 거 같다.(OS3)

자. 부피/겹넓이의 값이 작은 구조물 만들기 본 과제와 학습 성취도는 2.89점으로 주어진 활동 가운데 가장 낮은 편이었으며 아동의 활

동 중에 상대적으로 $\frac{(\text{부피})}{(\text{겹넓이})}$ 의 값이 큰 도형들이 나타나기는 하였지만 이론적으로 가장 큰 형태인 정육면체 형태를 만들지는 못하였다. 아래와 같이 여러 가지 전략을 탐색할 수 있었다.

B13: 그럼 정육면체를 만들어 보자

B14: 테트라큐브가 정육면체 만들어 질까?

B13: 그렇지 테트라큐브로 정육면체 안 될 거 같은데.....

B12: 테트라큐브 다 쓰면 조각 32개잖아 그럼 정육면체는 안 되지.

B13: 아 맞다. 32개는 가로 세로 높이가 같을 수가 없다.

B14: 그럼 직육면체만 되겠네.

B13: 직육면체 중에서도 가장 뭉쳐져 있는 게 값이 적지 않나?

B12: 그럼 4,4,2로 해야 되겠네. 1,2,16도 있고 2,2,8도 있지만 넓적해

B14: 그거 확실한가? 1,2,16은 좀 그래도 2,2,8은 비슷할 수도 있을 거 같은데.

B15: 둘 다 큐브는 32개고 2,2,8과 4,4,2 겹넓이 구해보면 되지

B12: 당연히 4,4,2가 더 적지. 그럼 그러봐 더 뭉쳐져 있잖아

B13: 구해 보지 뭐 2,2,8은 72고 4,4,2는 64야.

2. 교수 학습 자료 개발 과정 분석

가. 교수 학습 자료의 원형을 통한 1차 적용 자료 개발

먼저 공간능력을 기초로 하는 폴리큐브 학습 요소를 추출하고 교수·학습 자료의 원형을 개발하기 위하여 학습 목표와 지역공동 영재학급 5학년 아동의 수준을 고려하였으며 폴리큐브 교수·학습 자료의 원형을 바탕으로 1차 적용 자료의 교사용 자료와 학생용 자료를 개발하였다.

이 때 교수·학습 자료의 원형의 학습 목표가 과제에서 잘 구현되는지의 여부, 활동의 연계성, 활동의 난이도, 활동 시간을 중점적으로

고려하였다. 학습 목표를 잘 달성할 수 있도록 과제 제시 방법과 학습 형태를 설정하고 필요에 따라 학습 활동을 추가하였다. 활동의 연계성에 따라 활동 순서를 조정하고 단위 시간 100분 기준 3차시인 과제를 만들기 위하여 활동을 관련된 내용으로 묶어 나누었다. 또 아동 활동을 돕기 위하여 학습 형태를 주로 개인별로 구성하였고 연결큐브를 사용하였다.

그러나 1차 적용한 자료를 통하여 대부분의 아동이 활동의 성취도가 높은 것으로 보아 지식, 이해면 / 수학적 사고 면의 학습 목표는 잘 달성하였고 의미있는 공간능력 사례가 제시되었으나 아동이 학습 의욕을 잃는 문제가 발생하여 학습 목표를 세분화하고 태도 및 의지 면을 자극할 수 있는 방법의 필요성이 필요함을 알 수 있었다. 또 수학적 의사소통의 필요성, 자기 주도적 과제 제시 방법의 중요성도 파악할 수 있었다. 활동의 연계성을 위해 삽입한 활동의 가치를 판단하고 각 활동의 학습 형태, 학습 시간을 조정하고 아동의 사례를 기초로 학습 활동을 심화시키거나 난이도를 조정하여 2차 개발 자료를 만들었다.

나. 1차 적용 자료 수정을 통한 2차 적용 자료 개발

1차 적용 자료를 아동에게 적용해 본 결과 많은 수의 활동이 지식·이해 영역의 학습 목표를 잘 달성하였으나 지식, 이해, 수학적 사고와 같은 지적능력과 관련한 학습 목표만으로는 부족함이 발견되었다. 이를 위하여 태도 및 의지 면과 같은 학습 목표를 추가하여 학습 목표를 세분화하였으며 아동의 태도와 의지를 높이기 위하여 보상 제도를 추가하였다. 또 학습 형태를 모둠별로 구성하였고 자기 주도적으로 학습하길 좋아하는 수학영재들의 특성에 맞게 과제 제시 방법을 변경하였다. 학습 후 활동 시간을 가

감하였으며 적용과정에서 드러난 활동의 오류

<표 IV-1> 1차 적용 자료 개발 과정

구분		활동내용
활동 1	1	폴리큐브에 대해서 알아보기
	2	폴리큐브 조각 탐구 및 분류하기
	3	입체합동의 의미 파악하고 이름붙이기
활동 2	1	테트라큐브 조각 만들기
	2	테트라큐브 조각 분류하기
	3	면대칭 관계 파악하기
활동 3	1	펜타큐브 조각 만들기
	2	펜타큐브 조각 분류하기
활동 4	1	폴리큐브로 구조물 만들기
	2	자신의 구조물을 시각화하기
	3	시각화된 구조물을 바꾸어 만들기
활동 5	1	폴리큐브로 만든 구조물의 면과 큐브 개수 세어보기
	2	면과 큐브의 개수를 세는 전략 탐색하기
	3	큐브/면의 값이 작게 만들 수 있는 구조물 만들기

※ 교수 학습 원형을 기초로 한 1차 적용 자료 개발
 1) 교육대상자의 수준 고려
 2) 학습 목표 고려 - 지식, 이해/ 수학적 사고
 3) 학습 시간 고려 - 관련 활동으로 분류하여 조직
 4) 활동의 연계성 - 관련 활동 추가 및 활동의 선후 조직
 5) 학습 형태- 학습목표에 어울리는 학습형태 구성
 6) 교수 선정- 학습 목표에 맞는 연결큐브 선정

수정, 난이도를 상향, 하향으로 조정하였다. 또 활동 중 그 필요성이 낮은 활동을 통합하거나 삭제하였다. 1차 적용 자료를 수정하여 2차 적용 자료를 구성하였으며 재적용 하였다.

다. 2차 적용 자료 수정을 통한 최종 교수 학습 자료 개발

본 연구에서 수학 영재 교수·학습 자료로서의 타당성을 확보하기 위하여 개발방향에 따른 분석기준을 5가지로 설정하였고 이에 따라 역시 2차 적용 자료를 평가하였다. 1차 적용 자료에서 드러난 문제점을 보완하여 2차 적용 자료를 만들었으나 몇 가지 보완해야 할 점들이 나타났다.

<표 IV-2> 2차 적용 자료 개발 과정

구분		활동내용
<학습 목표>		
· 지식, 이해면:		
1) 폴리큐브의 규칙을 이해하고 만들 수 있다.		
2) 폴리큐브를 통하여 입체합동, 면대칭 관계와 같은 수학적 개념을 탐구할 수 있다.		
· 수학적 사고면:		
1) 폴리큐브를 활용하여 고차원적인 공간능력을 기른다.		
· 태도, 의지면:		
1) 폴리큐브에서 발견한 수학적 개념과 원리를 깊이 탐구하려는 태도를 가진다.		
2) 다른 방법이나 더 나은 풀이 방법을 찾아보려는 태도를 갖는다.		
활동 1	1	폴리큐브에 대해서 알아보기
	2	폴리큐브 조각 탐구 및 분류하기
	3	입체합동의 의미 파악 및 이름붙이기
활동 2	1	테트라큐브 조각 만들기
	2	<통합>면대칭 관계 도형과 면대칭 도형 파악하기
활동 3	1	펜타큐브 조각 분류하며 만들기
		<삭제>
활동 4	1	폴리큐브로 자유롭게 구조물 만들기
	2	자신의 구조물을 시각화하기
	3	시각화된 구조물을 바꾸어 만들기
활동 5	1	폴리큐브로 만든 구조물의 면과 큐브 개수 세고 전략 탐색하기
	2	<변경>겉넓이가 작은 도형 만들어보기
	3	큐브/면의 값이 작게 만들 수 있는 구조물 만들기
※ 1차 적용 자료에 대한 2차 적용 자료의 차이점 1) 학습 목표의 세분화- 태도 및 의지 측면 추가 2) 활동의 연계성 - 활동의 삭제 및 통합, 단계적 활동 추가(변경) 3) 수학적 의사소통 기회 증가 - 모둠학습 및 짝 학습의 비율 확대 4) 자기 주도적 과제 해결 - 과제 제시 방법의 변경 5) 활동의 난이도 조정 - 난이도 상향/ 하향 조정 6) 학습 태도와 흥미 향상 - 보상제도 추가 7) 교수 활용의 주의점 추가 8) 교수 학습 자료 활용의 주의점 및 활동 안내의 오류 수정 9) 학습 활동 시간의 조정		

기준 1. 전통적인 학습 경험에 비하여 수준이 높고 정교하며 내용이 깊이 있고 추상적인가?

1차 적용 자료와 마찬가지로 폴리큐브 과제는 수준이 높고 정교하며 여러 가지 수학적 개념과 원리를 탐구할 수 있고 2차 적용 자료의 결과 3차원 공간의 특징을 발견할 수 있는 학습 활동이었다. 또 활동의 난이도와 연계성을 고려하여 공간능력이 발달할 수 있는 학습 활동을 재조직함으로써 수학영재들을 위한 자료로서의 의미를 더 살릴 수 있었다고 판단된다.

기준 2. 동일한 주제에 대한 활동을 흥미로운 활동에서 점차 깊이 있는 탐구가 필요한 활동으로 단계적으로 구성하면서 각 활동에는 연계성이 있도록 구성하였는가?

1차 개발 자료에서 연계성이 떨어지는 것으로 판단된 활동을 통합하거나 학습 활동의 순서를 교정하였고 난이도에 따라 학습 형태를 달리한 결과 아동의 오류가 줄었다. 또 펜타큐브 활동이 회전능력의 심화활동으로서의 역할을 충분히 했다고 볼 수 있었다. 그러나 활동 시간 활용과 학습 효율을 높이기 위해 펜타큐브 활동을 조각 완성하기 활동으로 바꾸어 제시하고자 하며 $\frac{(\text{부피})}{(\text{겉넓이})}$ 활동에서도 활동의 연계성을 위하여 부피와 겉넓이를 동시에 고려할 수 있는 활동이 더 추가되어야 한다. 이를 위하여 단위 큐브를 한 개씩 붙일 때마다 달라지는 부피와 겉넓이의 변화를 찾아내어 본 활동에 활용할 수 있는 준비 활동을 추가하는 것이 필요하여 이를 최종 교수·학습 자료에 추가하여 활동의 연계성을 높이고 학습 목표를 잘 달성할 수 있는 과제로 수정하고자 한다.

기준 3. 고차원적인 수학적 사고 능력을 기를 수 있는 자료인가?

본 교수·학습 자료는 폴리큐브를 통해 3차원 공간의 의미와 특징을 추측하고 정당화하는 과정을 거치고 있으므로 공간능력과 같은 고차원적인 수학적 사고능력을 기를 수 있는 자료라고 볼 수 있다. 또 2차 적용과제에서는 면대칭과 면대칭 관계의 도형을 함께 탐구하는 활동을 추가하여 더 고차원적인 공간능력을 배양하도록 하였다

기준 4. 학생의 자기 주도적인 탐구활동에 비중을 두어 개발하였는가?

1차 적용 자료의 가장 큰 문제점은 학습의

난이도가 높다고 판단하여 교사 중심으로 활동이 이루어졌다는 것이었다. 그러나 2차 적용 자료에서는 자료의 제시 방법과 발문, 활동의 도입방법을 달리하여 아동 스스로 새로운 수학적 원리를 탐구할 수 있도록 하였고 각 활동에서도 모둠별 활동이 강조되어 자기 주도적으로 수학적 원리를 구성할 수 있었다. 이를 통해 아동은 더 발전적인 내용을 구성해 냈으며 학습 목표 중 태도, 의지 면에서 적극적인 모습을 보였다. 스스로 구성해 낸 지식이 아동들에게 더 오래 기억되고 나아가 더 심화된 지식을 만들 수 있다. 이를 통해 자기 주도적으로 학습하는 탐구활동의 비중을 더 높여야 한다는 것을 알 수 있었다.

기준 5. 다양한 활동 속에서 타당한 수학적 추측을 하고 탐구하며 수학적으로 의미 있는 의사소통 과정에 참여하면서 스스로의 사고를 체계화하고 명확화 할 수 있도록 하였는가?

본 교수·학습 자료가 의사소통 과정을 거쳐 공간에 대한 개념을 발달시키고 명확하게 할 수 있는 자료임에도 불구하고 1차 적용 자료에서는 의사소통 과정을 격려하지 못했다. 그러나 2차 적용 자료의 많은 활동이 모둠별로 이루어져 아동의 성취도도 높아졌으며 새로운 원리와 내용을 쉽게 탐구하고 발전적인 수업 사례를 볼 수 있었다. 자신의 의견을 나누고 발전시키는 과정에서 의사소통 능력이 신장되었으며 이를 통해 스스로의 사고를 체계화시킬 수 있었으므로 수학 영재 교수·학습 자료는 의사소통의 기회를 보장하는 과제가 되어야 할 것이다.

2차 적용 자료를 적용해 본 결과를 통하여 활동의 연계성을 확보할 수 있었으며 자기 주도적 과제의 제시, 수학적 의사소통기회의 확대를 통하여 학습목표를 쉽게 달성할 수 있는 것을 확인할 수 있었다. 그러나 2차 적용과

<표 IV-3> 최종 교수학습 자료 개발 과정

구분		활동내용
활동 1	1	폴리큐브에 대해서 알아보기 <삭제>
	2	입체합동의 의미와 용어의 정의
활동 2	1	테트라큐브 조각 만들기
	2	면대칭 관계 도형과 면대칭 도형 파악하기
활동 3	1	펜타큐브 조각 확인하기(분류하며 만들기)
활동 4	1	폴리큐브로 자유롭게 구조물 만들기
	2	자신의 구조물을 시각화하기
	3	시각화된 구조물을 바꾸어 만들기
활동 5	1	폴리큐브로 만든 구조물의 면과 큐브 개수 세고 전략 탐색하기
	2	결집이가 작은 도형 만들어보기
	3	<추가>조각을 붙이면서 결집이와 부피의 변화 규칙 탐구하기
	4	큐브/면의 값이 작게 만들 수 있는 구조물 만들기

* 2차 적용 자료에 대한 최종 교수 학습 자료의 차이점
 1) 학습목표의 요소명을 변경함.
 2) 활동의 연계성 - 단계적 활동 추가
 3) 활동의 난이도 조정 - 난이도 상향/ 하향 조정

재에서도 활동의 난이도와 연계성 면에서 몇 가지 문제가 발견되었으며 이를 반영하여 최종 교수 학습 자료를 구성하였다.

2. 최종 수정된 교수 학습 자료

폴리큐브 학습요소 중 공간능력과 관련한 활동을 추출하고 그 원형을 개발한 후 1차, 2차에 걸쳐 교수·학습 자료를 적용하면서 공간능력 사례와 성취도, 시간, 활동 방법, 자료 제시, 발문, 교구 활용 등을 개선하여 최종 수정된 교수·학습 자료를 확정하였다.

V. 요약 및 시사점

본 연구는 두 가지의 연구내용을 포함한다. 첫째는 폴리큐브를 소재로 한 영재학급용 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하는 것이며 둘째는 두 차례에 걸친 실제적인 적용 과정을 통해 초등 수학 영재 학생의 현재 수준을 보다 발전시킬 수 있는 학습 과제 선정과 교수·학습 방법, 교수·학습 자료 개발을 위한 구체적인 안내 및 시사점을 제안하는 것이다. 전자는 앞에서 자세히 논의하였으므로 후자의 시사점만 7가지로 요약하여 제안하면 다음과 같다.

첫째, 교수·학습자료를 개발할 때는 그 과제를 적용하고자 하는 교육대상자들의 특성과 수준을 고려하여야 한다.

본 연구에서 개발한 교수·학습 자료는 초등 수학영재 아동들의 공간능력 수준에 맞도록 폴리큐브 학습 요소를 추출하였으며 이를 자료화하는 과정에서 초등 수학영재들이 보이는 활동별 성취도와 활동 사례에서 드러나는 영재들의 특성에 맞추어 활동을 수정하고 보완한 것이다.

둘째, 과제가 포함하고 있는 고유한 수학적 내용과 요소를 적절히 추출해야 한다.

본 연구에서는 6가 교과서에 나오는 소재를 심화한 폴리큐브 과제를 선정하였다. 이 때 2차원 평면에서 학습한 요소들을 3차원 공간으로 확장하여 의미있게 지도할 수 있는 ‘입체합동’, ‘면대칭 도형’, ‘면대칭의 위치에 있는 두 도형’과 같은 수학적 개념과 ‘2차원 평면과 3차원 공간의 관계’, ‘겉넓이와 부피의 관계’ 등과 같은 수학적 원리와 관계를 탐구할 수 있는 요소들을 선정하여 교수 학습 자료에 반영하였다.

셋째, 그 과제를 통해 구현할 수 있는 학습 목표를 고려해야 한다.

학습 목표는 활동을 개발하고 구상할 때 안내하는 방향이 되기도 하고 실제 수업을 진행

<표 IV-4> 최종 수정된 교수·학습 자료의 주요 활동 내용

차	구분	활동내용	활동 선정 이유
1	활동 1	1 폴리큐브에 대해서 알아보기	폴리큐브를 소개하여 앞으로 할 활동의 기초 활동이 됨
		2 입체합동의 의미 파악하고 이름붙이기<VR1>	정신적으로 모양을 회전시켜 같은 도형을 발견하는 능력을 기름
	활동 2	1 테트라큐브 조각 만들기<VR2>	교구를 통하여 3차원 모양을 회전하는 능력을 기름
		2 면대칭 관계 도형과 면대칭 도형파악하기<OS1>	테트라큐브를 관찰하여 공간도형의 구조를 파악하는 능력을 기름
2	활동 3, 4	1 펜타큐브 조각 완성하기(분류하고 만들기)<VR3>	활동2의 심화활동으로 교구를 사용하여 3차원 모양을 회전하는 능력을 기름
		2 폴리큐브로 자유롭게 구조물 만들기<VR4>	구조물을 만들면서 모양을 회전하고 조작하는 능력을 기름
		3 자신의 구조물을 시각화하기<VT1> 사각화된 구조물을 바꾸어 만들기<VI2>	만든 구조물을 2차원으로 변환하는 능력을 기름 2차원 자료를 3차원으로 변환하는 능력을 기름
3	활동 5	1 폴리큐브로 만든 구조물의 면과 큐브 개수 세고 전략 탐색하기<OS2>	구조물을 관찰하여 공간도형의 구조파악 능력을 기름
		2 겉넓이가 작은 도형 만들어보기<OS3-1>	겉넓이가 작은 도형을 탐색하며 공간도형의 구조파악 능력을 기름
		3 조각을 붙이면서 겉넓이와 부피의 변화 규칙 탐구하기<OS3-2>	간단한 도형에서 겉넓이, 부피를 동시에 탐구하여 다음 활동을 준비함
		4 ‘부피/겉넓이’의 값이 최소가 되는 구조물 만들기<OS3-3>	부피와 겉넓이를 동시에 고려할 수 있는 공간도형의 구조파악 능력을 기름

하는 동안에 표준적인 가이드가 되며, 활동 이후의 평가 시에도 더 나은 수업을 위한 점검의 준거가 된다. 본 연구에서는 수학적 내용면(지식, 이해), 수학적 사고면(공간능력), 수학적 태도면(태도와 의지)의 3가지 측면으로 나누어 학습 목표를 세분하였다. 그러나 창의적인 산출물 활동이 있는 경우 사고적인 면을 창의성 측면으로 변경하거나 추가하는 것과 같이 활동의 내용에 따라 학습 목표를 좀 더 세분하는 것도 가능하다고 판단된다.

넷째, 특정 과제를 염두에 두고 교육 대상자와 학습요소를 정한 다음 주요 학습 목표를 설

정하였다면 이를 제대로 구현할 수 있는 교수·학습 자료의 유형과 교수법을 고려하여야 한다. 영재들은 자신이 직접 과제를 선택하고 스스로 개념을 구성해 나가는 자기 주도적 학습이 되어야 한다.

본 교육 학습 자료는 일반 아동에 비하여 학습 수준이 높고 스스로 탐구가 가능한 수학영재라는 교육대상자의 수준과 폴리큐브라는 교육 내용, 3차원 공간을 탐구하는 학습 목표에 부합하는 주제 탐구형 중에서도 단일 주제 심화형의 교수·학습 자료의 유형을 선정하여 개발 절차에 따라 교수·학습 자료를 개발하였다.

다섯째, 교육 대상자, 내용 요소, 학습목표, 학습유형, 교수법 등을 포함하는 교수·학습 자료의 원형을 개발하여야 한다.

교수·학습 자료의 원형은 교수·학습 자료로서의 타당성을 유지하고 이를 적절하게 수정하는 기초자료가 된다는 점에서 교수·학습 자료의 원형 개발은 필수적이라고 할 수 있다.

여섯째, 교수·학습 자료의 원형을 바탕으로 수학 영재들이 자신의 의견을 나누고 발전시킬 수 있도록 자유롭게 의사소통할 수 있는 기회를 제공하는 구체적인 학습활동을 포함하는 실제적인 교수·학습 자료를 개발하여야 한다.

본 연구의 결과를 바탕으로 초등 수학 영재들은 과제를 통하여 스스로 개념을 탐구하고 이를 정당화 할 수 있는 능력이 있으며 또래와의 의사소통 과정을 거쳐 발전한 개념을 발전시키고 확장할 수 있다는 것을 알 수 있었다. 수학 영재들의 능력과 성향을 고려한 보다 의미있는 교수·학습 자료가 되기 위해서는 스스로 과제를 선택하고 용어와 개념을 구성하며 의사소통 과정을 거쳐 수학적 원리를 발전시킬 수 있는 자기 주도적 학습 과제가 되어야 한다.

일곱째, 교수·학습 자료를 실제 수업에 적

용하고 피드백하는 과정을 거쳐 충분한 수정이 이루어져야 한다.

개발한 교수·학습 자료를 실제로 아동에게 적용하여 오류를 발견하고 수정하는 과정을 거쳐야만 교육대상자에게 보다 적합한 유의미한 교수·학습 자료가 될 수 있을 것이며 아동의 활동 사례, 수학 영재 교수·학습 자료의 개발 방향에 따른 준거를 기준으로 수정할 수 있다. 과제에서 나타나는 아동의 활동 사례를 분석하는 과정을 통해 교수·학습 자료가 학습 목표를 잘 달성할 수 있는지, 수학 영재 교수·학습 자료 개발 방향을 준거로 평가하는 과정을 통해 수학 영재 교수·학습 자료로서의 타당성을 평가할 수 있다.

참고문헌

- 교육인적자원부(2003). **교사용 지도서 수학 6-가**. 대한교과서주식회사.
- 권오남 외(1995). 공간능력에서의 성별차이에 관한 연구. **한국수학교육학회지 <수학교육>**, 35, 125-143.
- 김남균(2008). 초등학생의 공간능력에 대한 조사 연구. **한국수학교육학회지 <초등수학교육학>**, 11(1), 21-38.
- 김양권(2009). **초등수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 교수·학습 자료 개발에 관한 연구**. 석사학위논문. 경인교육대학교 대학원.
- 김유경(2007). 초등학교 6학년 학생들의 공간감각과 공간추론능력 실태조사. **대한수학교육학회지<학교수학>** 9(3), 353-373.
- 김용태·박한식·우정호(1988). **수학교육학 개론**. 서울: 서울대학교 출판부
- 김혜영(2006). **공간감각 신장을 위한 교수·학습 자료 개발 및 실행에 관한 연구**. 전주교

- 육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈(2007). *수학교육학 연구방법론*. 서울: 경문사
- 류현아 외(2007). 입체도형에 대한 6-7학년 수학영재들의 공간 시각화 능력 분석. *대한수학교육학회지<학교수학>*, 9(2), 277-289.
- 박지영(2010). *초등 수학 영재를 위한 폴리큐브 교수 · 학습 자료 개발 연구*. 석사학위논문. 경인교육대학교 대학원.
- 송상헌(2004). 수학 영재 교수 · 학습자료 개발을 위한 소재 발굴에 관한 연구. *경인교육대학교 과학교육논총 제16집*, 67-86.
- 송상헌(2010). *폴리큐브 탐구*. 인터넷 자료. <http://cafe.daum.net/ginuemathclass> 레크수학 강의자료실.
- 오은선(2007). *초등학생의 공간능력에 대한 조사 연구*. 청추교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 정영옥(2004). 초등학교 쌓기나무 단원 지도 방안 탐색 - 우리나라 초등학교 교과서와 미국의 MiC 교과서 비교- *교육과정 평가연구*, 7(2), 75-101.
- 최종현(2004). *주제 탐구형 수학 영재 교수 · 학습 자료 개발에 관한 연구*. 석사학위논문. 경인교육대학교 대학원.
- 한기완(2001). 공간감각의 개념 분석 및 교수 · 학습 방안 탐색. *대한수학교육학회지<학교수학>* 3(2), 355-372.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. The Univ. of Chicago Press.
- McGee. M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), pp.889-908.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for Mathematics*. Reston. VA: NCTM. Inc.
- Renzulli. J. S. (1977). *The enrichment triad modal: A guide for developing defensible programs for the gifted and talented*. Wethersfied, CT: Creative Learning Press.
- <http://www.gamepuzzles.com/polycube.htm>
(폴리큐브의 종류들)
- <http://www.gamepuzzles.com/sqnames.htm>
(펜타큐브 이름 짓기)
- <http://puzzler.sourceforge.net/docs/pentacubes.html#pentacubes>
(펜타큐브를 활용한 다양한 모양들)
- <http://www.recmath.com/PolyPages/index.html>
(평면과 입체 폴리 페이지)
- <http://mathworld.wolfram.com/SomaCube.html>
(Wolfram Math World에 소개된 소마큐브)
- http://en.wikipedia.org/wiki/Soma_cube
(위키디피아에 소개된 소마큐브)
- <http://www.piethein.com/usr/piethein/HomepagUK.nsf> (피에트 하인 홈페이지의 소마큐브)
- <http://www.mathlove.org/pds/materials/soma.html> (수학사랑에 소개된 소마큐브)
- <http://cafe.daum.net/ginuemathclass>
(송상헌의 수학교실 레크수학 강의자료실)

A Study on the Development of Polycube Teaching-Learning Materials for Mathematically Gifted Elementary School Students

Park, Ji Young (Incheon Yongma Elementary School)

Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)

The purpose of this study was threefold: (1) to select the components of spatial ability that could be associated with the implementation of a polycube task, embody the selected components of spatial ability as learning elements and develop the prototype of polycube teaching-learning materials applicable to gifted education, (2) to make a close analysis of the development process of the teaching-learning materials to ensure the applicability of the prototype, (3) to give some suggestions on the development of teaching-learning materials geared toward mathematically gifted classes.

The findings of the study were as follows:

As for the first purpose of the study, relevant literature was reviewed to make an accurate definition of spatial ability, on which there wasn't yet any clear-cut explanation, and to find out what made up spatial ability. After 13 components of spatial ability that were linked to a polycube task

were selected, the prototype of teaching-learning materials for gifted education in mathematics was developed by including nine components in consideration of children's grade and level.

Concerning the second purpose of the study, materials for teachers and students were separately developed based on the prototype, and the materials were modified and finalized in light of when selected students exerted their spatial ability well or didn't in case of utilizing the developed materials in class. And then the materials were finalized after being finetuned two times by regulating the learning type, sequence and degree of learning difficulty.

Regarding the third purpose of the study, the polycube task performed in this study might not be generalizable, but there are seven suggestions on the development process of teaching-learning materials.

* **Key Word:** the mathematically gifted(수학영재), the poly cube task (폴리큐브 과제), spatial ability(공간능력), teaching and learning materials(교수·학습 자료)(도구활용)

논문접수 : 2010. 8. 24

논문수정 : 2010. 9. 4

심사완료 : 2010. 9. 11