대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.3, 337-351. Sep 2010

흑백게임을 활용한 수학영재들의 R&E 연구 소재 개발[1)]

류 창 우[*] · 송 영 무[**]

흑백게임은 일정한 크기의 체스판 모양의 사각판 위에서 일정한 규칙으로 칸의 색깔을 바꾸어 가면서 모든 칸의 색을 통일하는 것을 목표로 하는 게임이다. 이 게임의 규칙은 단순하지만 그 안에는 다양한 수학적 모델링이 포함되어 있다. 본 연구는 흑백게임을 소재로 S대학부설 과학영재교육원의 R&E 프로그램을 진행하면서 중학교 수학영재학생들이 수학적 모델링을 만들어보고 탐구해가는 소재를 개발하였다. 그 결과 이 게임을 수학영재교육용 수업이나 수학영재들의 연구 소재로 활용할 수 있는 4가지 수학적 모델링(패턴 분석, 대응 관계, 동치류 분석, 선형대수학적 분석)이 가능함을 확인하고 더불어 교사들이 유용하게 활용할 수 있도록 각각의 모델링 유형별로 몇 가지 발문도 제안한다.

I. 서론

수학영재[2)]들은 식상하지 않은 좀 더 새로운 학습주제에 대한 탐구를 갈망하고 있다. 그들은 일반 학생들보다 좀 더 많은 자극을 원한다. 이에 따라 학습에 대한 성취욕이 강한 영재들을 위해 많은 수학영재교육프로그램이 개발되고 있다. 기존에 개발된 수학 프로그램들도 물론 학생들에게 수학적 사고를 많이 요구하고 있기는 하지만 새로운 수학적 사고 활동을 위해서는 또 다른 학습주제를 제시하고 탐구활동이 이루어져야 한다.

김덕선 외 3인(2008)은 흑백게임이라는 주제에 대하여 기존과는 차별화된 수학적 모델링을 만들고 해를 구하는 방법을 제시하고 있는데, 그 이전의 선행연구들 역시 흑백게임이라는 한 주제에 다양한 수학적 모델링을 세우고 해법을 제시하고 있다.

따라서 이 소재를 수학영재들을 대상으로 하는 수업에서 사용한다면, 한 가지 학습주제이지만 수학적 사고 활동을 유창하게 할 수 있고, 이를 통해 여러 가지 해법을 제시하면서 새로운 주제에 대한 영재학생들의 호기심과 같은 갈증들을 일정 부분이나마 충족시켜줄 수 있을 것이다. 본 연구의 목적은 중학교 수학영재학생들이 흑백게임을 활용한 수업에서 어떤 수학적 모델링을 발견하고 어떻게 탐구해 가는가를 확인함으로써 수학영재교육용 탐구 학습 소재로 활용할 수 있는 수학적 모델링을 개발하고 교사들이 유용하게 활용할 수 있는 몇 가지 발문을 제안하는 것이다. 본 연구를 위해 전남 지역의 S대학부설 과학영재교육원 중등수

---

* 순천대 대학원 (mathedu@korea.com)
** 순천대 (ymsong@sunchon.ac.kr 교신저자)
1) 이 논문은 2009년 순천대학교 학술연구비 공모과제로 연구되었슴.
2) 본 연구에서는 우리나라 영재교육진흥법에 의해 선발되어 동법의 인가를 받아 운영되고 있는 기관에서 교육을 받고 있는 학생을 수학영재라고 본다.

학 사사과정 R&E(Research and Education) 프로그램에 적용해 보았다.

II. 이론적 배경

흑백게임에 대한 수학적 사고 활동을 파악하기 위해 먼저 몇 가지 흑백게임에 대한 선행 연구들의 이론들을 살펴본다.

1. 흑백게임 소개

흑백게임은 검은 색 또는 흰 색의 돌들이 가득 찬 일정한 크기의 바둑판 위에서 하는 게임으로, 하나의 돌을 클릭하면 자기 자신과 자신의 위, 아래, 왼쪽, 오른쪽 돌들의 색이 각각 뒤바뀌는 규칙을 가지고, 모든 바둑판 위의 돌들의 색을 하나로 통일하면 흑백게임에서 승리했다고 한다.

2. 선형대수학적 전략

흑백게임에 대한 대부분의 선행연구들은 흑백게임을 선형연립방정식으로 형식화하고 유일한 해를 가지는 경우와 아닌 경우를 구분하여 각 경우에 대한 해법을 제시하고 있다 (Anderson, Feil, 1998; 이상구, 박종빈, 양정모, 김익표, 2004; 이상구, 양정모, 2006; 김덕선, 2008). 본 연구는 김덕선(2008)이 다음과 같이 정의한 용어를 사용할 것이다.

정의 1) $B \in M_{m \times n}$을 $m \times n$크기에서 임의의 행렬이라고 하자. 만약 이 행렬이 현재 흑백게임의 상태를 각각 0과 1[3]로 표현하였다면, 이 행렬을 초기 조건 행렬이라고 정의한다.

정의 2) $M_i \in M_{m \times n}(Z_2)$을 $m \times n$크기의 행렬이라고 하자.$(1 \le i \le mn)$ M_i는 흑백게임에서 i번째 버튼을 클릭했을 때 흑백이 바뀌는 부분에만 1이고 나머지 성분은 0인 행렬이라고 하자. 여기서 i번째 바둑알의 순서는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & (m-1)n+3 & (m-1)n+4 & \cdots & mn \end{bmatrix}$$

정의 3) M_i의 $m \times n$개의 성분을 앞에서 소개한 버튼클릭의 순서대로 늘어놓은 $mn \times 1$ 열벡터를 $\mathbf{m}_i$라 하자. 그리고 그 벡터들을 열벡터로 가지는 행렬 A를 다음과 같이 정의한다.

$A = [\mathbf{m}_1 | \mathbf{m}_2 | \cdots | \mathbf{m}_{mn}]$

B의 원소도 같은 방법으로 배열한 $mn \times 1$ 벡터를 b라 하고, J[4]행렬에 대해서도 마찬가지로 모든 성분이 1인 대응하는 $mn \times 1$ 벡터를 j라 하자. 그리고 $\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_{mn})$이라 하자. 그러면 흑백게임은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (또는 $\mathbf{j} - \mathbf{b}$)

따라서 흑백게임을 선형대수학적으로 해석하고, A의 행렬식의 값에 따라 해의 유무를 알 수 있다.

3. 동치류 분석 전략

김덕선(2008)은 임의로 주어진 초기 조건에 대해 다음과 같은 4단계를 거쳐서 나오는 행렬을 동치류로 분류하여 판단하고 있다.

단계 1) 1행을 선택한다.
단계 2) 흑백게임의 규칙을 이용하여, 아래 행의 성분들을 클릭하여 선택한 행의 성

3) 0은 검은 칸을 1은 흰 칸을 의미한다.
4) 모든 성분이 1인 행렬이다. 여기서는 $m \times n$ 크기의 행렬임.

분들을 전부 0으로 만든다.

단계 3) 다음 행을 선택하고 단계 2를 시행한다.

단계 4) 맨 마지막행의 이전 행까지 단계 3을 반복하고, 남은 마지막 행의 정보를 확인한다.

위의 4단계를 거치면 임의의 $m \times n$ 흑백게임에 대하여 2^{mn}가지의 경우의 수를 2^m가지로 줄일 수 있으며, 이를 다시 한 번 동치류로 분류하면서 해법을 제시하고 있다.

III. 연구의 설계

1. 연구의 과제

연구 도구는 흑백게임을 직접적으로 해결할 수 있는 방안을 확인하기 위하여 시뮬레이션이 가능한 프로그램[5]을 활용하였다. 기존의 흑백게임 프로그램은 해를 구할 수 있기 때문에 삭제, 수정 후에 학생들에게 배포했다.

이 프로그램을 활용하여 임의의 흑백게임에 대해 승리하도록 스스로 문제를 만들어서 해결하도록 하였으며, 흑백게임의 크기는 3×3부터 5×5까지 다루도록 제한을 하였다.

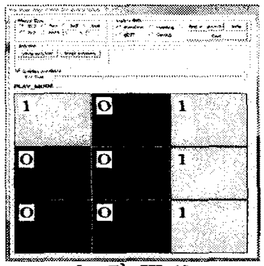
2. 연구의 대상

본 연구는 전남 지역의 S대학부설 과학영재교육원의 중등수학 사사과정 R&E 프로그램에 적용하였으며, 연구 대상은 중학교 3학년 남학생 2명이다. 이 학생들을 사례연구의 대상으로 선정한 이유는 다음과 같다.

첫째, 위의 학생들은 수학영재로서 평균 이상의 창의성 및 과제 집착력이 있다. 따라서 흑백게임에서 승리하기 위한 다양한 전략들과 그 외의 전략들을 생각할 적합한 능력을 갖춘 학생들이라 할 수 있다.

둘째, 흑백게임에서 승리하기 위한 선형대수학 전략은 연립방정식을 행렬로써 나타내고 있다. 따라서 행렬을 배우지 않은 중학생이라도 연립방정식을 활용하여 그 결과를 나타낼 수 있다고 판단했다.

셋째, 이들은 같은 영재교육원에서 4년 동안 영재교육을 받으면서 서로 친해졌기에 자신들의 의견을 내세우고 논의하는 토론 수업에 익숙해져 있으며, 그간의 다양한 영재수업을 통해 새로운 내용의 수학수업에 거부감이 없었다.



[그림 III-1] 흑백게임 시뮬레이션 프로그램

또한 각 학생들의 특성은 다음과 같다.

① 학생 A

과학영재교육원 중등수학 사사과정까지 올라온 만큼 수학 학업성취도가 높은 학생이다. 자신이 이해한 것에 대한 정리를 잘하고 이를 발표하는 것도 즐거워해서 본 수업을 리드하는 경향이 있다. 또한 다른 과목의 아이디어를 가지고 문제 해결에 접목하려는 시도를 많이 한다.

② 학생 B

수학 뿐 아니라 언어 등의 다른 과목에서도 학업성취도가 높은 학생이다. 관계적 이해력이 적은 편이지만 자신이 세운 전략에 대하여 상당한 자신감을 가지고 있다. 그래서 자신의 전략을 계속적으로 수정하면서 흑백게임을 공략하는 경향이 있다. 또한 자신이 이해하고 발견한 것이라도 발표를 학생 A에게 미루는 경향이 있다.

3. 연구의 방법

5) 김덕선(2008)이 개발한 프로그램을 사용하였다.

본 연구는 과학영재교육원 중등수학 사사과정 수업 과정에서 나타나는 학생들의 논의 및 학생과 학생의 상호작용의 결과들을 분석하는 형태로 이루어지므로 본 연구의 유형은 정성연구 방법론에 기초한 '사례 연구'라고 할 수 있다. 또한 연구자는 자신의 의견을 밝히지 않았으며 어느 한 학생을 지지하지도 않았다. 다만 필요에 따라 각각의 의견을 정리하여 논점을 부각시키는 역할을 하였다.

본 연구자는 약 6개월에 걸친 10차시의 연구수업 시간 동안 학생들을 관찰하는 동안 기록한 내용이나 기계를 사용해서 녹음한 것을 자료로 사용하였으며, 관찰이 끝난 후 특별한 것을 기억하고 기억하기 위해 간단한 현장 일지를 쓰기도 하였다.

IV. 연구 결과

1. 수업의 전개

학생들이 흑백게임에서 승리하기 위해 가장 먼저 하는 일은 클릭(Click)하는 일이다. 따라서 클릭을 하면서 보이는 모양들을 자연스럽게 탐구하게 된다. 즉 패턴 분석 전략에 따른 흑백게임 공략이 시작된다.

학생 A : 어차피 같은 걸 두 번 클릭하는 것은 클릭 안한 것과 효과가 완전히 똑같이 있기 때문에 답이 있다면 9번 이내로 나올꺼라고 예측했어요.

위에서 학생 A는 홀짝성이라고 하는 성질을 발견하고, 9번 이내로 풀리는 3×3 흑백게임에 대해서 흥미를 잃고 4×4 흑백게임에 관심을 가지게 되었다.

학생 B : 프로그램을 통해서 랜덤으로 나오는 초기 조건을 계속해서 줄여나가서 칸을 최소로 줄이고자 할 때 한 개 또는 두 개의 칸이 최소가 되는 경우가 많아서, 그걸 나눠보니 크게 5가지 패턴을 확인 할 수 있었고, 그 중에서 5번째 한 가지만 우리가 찾고자하는 답의 패턴이었어요.

연구자 : 회전이나 대칭같은 것은 고려한건가?

학생 B : ...네.

위에서 학생 B는 랜덤하게 만들어지는 4×4 흑백게임을 전부 흰색으로 통일하려다 보면 꼭 1개나 2개의 검은 칸이 남는다는 것[6]에 착안하여, 서로 같아지지 않는 패턴이 총 5개가 있음을 발견하게 되었다고 서술하고 있다. 이는 수학적으로 증명한 것이 아니라 수많은 시행착오 끝에 발견하는 것이어서, 강한 추측만을 하는 것이다. 그리고 처음의 초기 조건과 마지막의 조건이 같다고 인식하는 것은 패턴 분석의 수학적 모델링이기도 하지만, 동치류 분석에 따른 수학적 모델링과도 매우 유사하다.

또한 학생들은 흑백게임에서 각각의 성분들 간에 영향을 주는 성분들을 표로 나타내고, 3×3 흑백게임을 미지수가 9개인 연립방정식으로 표현까지 하였다. 이는 임의의 $m\times n$ 흑백게임에서도 표현 가능한 방법이었고 학생들은 성취감을 보이기도 하였다. 하지만 풀이하는데 있어서 상당히 무리가 있다고 판단하여 해를 구하거나, 해의 존재성에 대해서는 큰 흥미를 느끼지는 못했다.

지금까지 패턴 분석 전략과 선형대수학적 전략을 사용하였지만, 일대일 대응 관계를 고려한 전략에도 흥미를 느끼기도 하였다.

일대일 대응 전략이란 3×3 흑백게임에서 문제의 경우의 수와 흑백게임에서 클릭하는 경우의 수가 같다는 점에서 착안한 것으로, 초기

6) 4×4 흑백게임은 항상 해가 있는 것은 아니다.

조건의 한 가지 경우와 클릭하는 한가지의 경우가 일대일 대응이 될 것이라는 학생 A의 생각이다.

학생 A : 두 가지의 경우가 하나의 답으로 가는 경우가 있어서 비는 경우가 생겨서, 일대일 대응이 깨져버리니깐 모든 경우의 수에 해가 존재하지 않는다. 해가 있을 수도 있고 없을 수도 있고, 해가 두 개 있는 경우가 있으니 답이 없는 경우가 하나라도 있어요.

하지만 학생 B가 4×4 흑백게임에서 일대일 대응이 안 된다는 것을 발견하고, 이를 활용하여 해가 있는 초기조건이라면 해가 한 개 이상 있을 수 있다는 정리를 이끌어내고, 해가 없는 초기조건도 존재한다는 정리도 이끌어내었다.

이는 패턴 분석 전략에서 직관적으로 판단하던 것을 이론적으로 설명한다는 점에서 차이를 둘 수 있겠다.

그리고 패턴 분석 전략을 통해 전체를 흰색으로 통일하려는 생각에 다음과 같은 규칙을 주어서 동치류 분석 전략을 세우기 시작하였다.

학생 A: 왼쪽이 결정이 되면 그 왼쪽을 모두 하얗게 만들기 위해서 오른쪽이 그대로 결정이 되어버려요. 그러니깐 한 쪽 기준만 결과가 나와버리면 세 번째까지는 다 하얗게 만들 수 있고 마지막께 하얗게 될지 검정이 하나씩 있을지는 모르고요. 실제로 실험을 해보니깐 왼쪽 16가지를 어떻게 하던지 간에 제일 오른쪽에 결정되어있는 값은 변하지 않더라구요. 그니깐 오른쪽에 나타날 수 있는 16가지 중에 그 한 가지만 해가 있고, 나머지 15가지는 해가 없다고 생각을 했고, 그러니깐 4×4에서는 2^{16}개의 총 문제가 있는데, 그 중에서 모든 문제가 답이 있는 놈은 16개가 있고 또, 16개 중에 15개는 답이 없는 결과가 나왔어요.

위에서 학생 A가 말한 전략은 초기 조건과 비슷한 조건들을 찾으면서 그 중에 가장 오른쪽을 대표 인자로 정하는 모습을 보였다. 이는 동치류 분석에 따른 수학적 모델링으로써 4×4 흑백게임에서 완벽하게 구연한 것을 발견할 수 있다. 또한 이 전략은 선행연구들의 결과와 유사하게 진행되어 본 수업이 더 이상 진보가 없다고 판단하였으나, 그 결과물에 대해 학생들이 성취감을 나타내지는 않았다. 이 결과는 임의의 $m \times n$ 흑백게임이서도 해를 구하고, 해가 있는지를 판단할 수 있는 강력한 것이지만, 마치 근의 공식처럼 공식화 되지 않는다는 점이 학생들에게 있어서 만족할만한 결과물이 아니었다.

학생 A : 방정식을 생각했다가 아무래도 풀이하는데 상당히 무리가 있을 것 같아서 패턴으로 넘어갔다가 다시 방정식으로 돌아오게 되었는데요. 이거를 1하고 0하고만 이루어진 행렬로 홀짝성에 관련된 식이니깐.. 이거를 비트 연산자가 갑자기 떠올라서 그 방법으로 식을 전개하게 되면 훨씬 더 빠르고 간단하게 해를 구할 수 있지 않을까 하는 생각을 했어요.

위에서 학생 A는 선형대수학적 전략에서 마지막에 방정식 풀이에 좀 더 많은 관심을 두었고, 논리 연산자 XOR을 적용하는 풀이법에 착안하였다. 표현하는 법을 홀짝성이라고 표현하였는데, 이에 더 나아가 Z_2 연산을 생각하게 된 것을 발견할 수 있다. 이는 실수에서의 사칙연산이 아니라 Z_2에서의 덧셈 연산과도 같은 것이다.

이 연립방정식 풀이를 일반화시키기 위해 $[A|I]$라고 표현을 하고, $[I|A^{-1}]$로 변환하는데 있어 논리 연산자 XOR을 적용한 행연산을 하였으며, 이를 활용해서 3×3 흑백게임은 A의 역행렬이 쉽게 구해지지만, 4×4 흑백게임은 A의 역행렬이 존재하기 위해 필요충분조건이 4

개가 나온다는 것을 발견하였다. 이는 임의의 $m \times n$ 흑백게임에서도 확장가능하며, 해의 존재성과 해를 발견하는데 있어서 공식처럼 사용할 수 있다는 점이 있다.

이는 기존의 선행연구들의 결과에 더불어 더욱 강화된 조건들과 임의의 $m \times n$ 흑백게임에 대해서도 해를 공식화 할 수 있다는 점에서 참신한 결과라고 볼 수 있다.

위와 같은 학생들의 수학적 모델링 과정은 선행 연구와 거의 동일한 동치류 분석 전략과 선형대수학적 전략에 따른 모델들이 있으며 선행 연구처럼 시작했던 패턴 분석 전략, 마지막으로 가장 기본이 되는 대응 관계 분석 전략에 따른 모델들이 있으며 이들에 대한 분석은 다음과 같다.

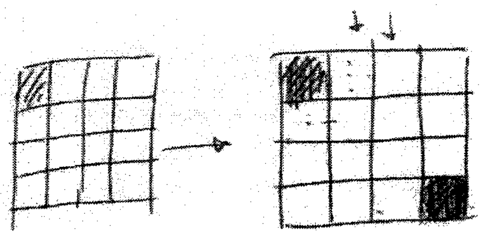
2. 학생들의 모델링 과정

가. 패턴 분석에 따른 수학적 모델

흑백게임에서 승리하기 위해 학생들은 나름대로의 사고를 바탕으로 체스판의 특정한 칸을 클릭 한다. 이 과정에서 보이는 모양들을 자연스럽게 탐구하게 되고, 보이는 패턴들을 관찰하고 분석하는 것이 가장 처음에 접하는 수학적 모델이다.

학생 A : 아~ 선생님. 저 영감이 떠올랐어요.
연구자 : 어떤거?
학생 A : 저번에 10번 안으로 된다고 했잖아요 우리가~
연구자 : 그랬지.
학생 A : 근데요 9번 안으로 될 것 같아요.
연구자 : 왜?
학생 A : 어차피 이게요. 홀짝성이잖아요. 예를 들어 세 개를 누를 때 이걸 순서를 어떻게 누르던지간에 결과는 같이 나오는거잖아요. 그렇기 때문에 결국 9개는요~ 9번 안으로만 누르면 되는거잖아요. 그러니깐 한칸을 두 번 누르는건 자체가 무의미 해지는거잖아요. 그러니깐 그 안으로만 누르면 결과가 나올 것 같은데요.

위에서 학생 A는 흑백게임의 규칙을 홀짝성이라 하였다. 이는 Z_2의 표현법을 자신들의 용어로 정립한 것이며, 이를 활용하여 3×3 흑백게임의 경우는 9번 이내로 답이 나온다고 확신을 가졌던 것이다. 하지만 여전히 답의 존재 여부에 대해서 확신을 가지고 있지는 않았다. 또한 3×3 흑백게임이 아니라 항상 승리할 수 없는 4×4 흑백게임을 탐구하기 시작하였다. 학생 B는 주어지는 초기조건에 따라 나올 수 있는 패턴을 다음과 같이 구분하기 시작하였다.



[그림 IV-1] 4×4 흑백게임에서의 서로 다른 패턴(학생 B)

학생 B : 프로그램을 통해서 랜덤으로 나오는 초기조건을 계속해서 줄여나가서 칸을 최소로 줄이고자할 때 한 개 또는 두 개의 칸이 최소가 되는 경우가 많아서, 그걸 나눠보니 크게 5가지 패턴을 확인할 수 있었고, 그 중에서 5번째 한 가지만 우리가 찾고자하는 답의 패턴이었어요.

위에서 학생 B는 회전과 대칭을 고려하여서 4×4 흑백게임의 초기 조건과 같은 조건들을 탐구하던 중에 칸을 최소로 줄였을 때의 조건들에 집중하는 모습을 보였다. 또한 패턴이라

는 용어를 사용하였는데 이는 답을 찾기위한 자연스러운 분석 과정이라고 볼 수 있으며, 3×3 흑백게임과 달리 4×4 흑백게임에서는 서로 다른 패턴이 있음을 발견하게 된다. 따라서 임의의 4×4 흑백게임에 대하여 수많은 시행착오와 클릭을 통해 학생 B가 다음과 같은 5가지의 패턴이 있다는 것을 발견하였다.

하지만 위의 결과는 많은 시행의 결과이기에 강한 추측뿐이고, 학생들이 이 결과에 대해서 논리적으로 이유를 말하거나 패턴 종류에 대한 확신을 갖는 것은 아니었다.

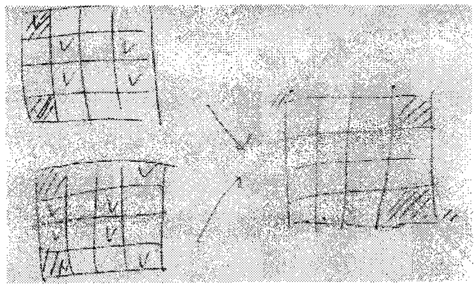
이는 학생들이 흑백게임을 패턴 분석을 하여 수학적 모델을 만들었지만, 분석하여서 수학적 결론을 이끌어내는 데는 한계를 나타내었다는 것을 나타낸다.

실제로 김덕선(2008)은 회전과 대칭으로 고려하지 않은 4×4 흑백게임에 대하여 16개의 패턴이 있다고 하였다. 그래서 연구자가 16개의 패턴을 회전과 대칭을 고려하여서 패턴을 분석한 결과, 학생들이 발견한 5가지의 패턴과 동일하게 나옴을 확인하였다. 따라서 선행연구의 결과를 바탕으로 하여 학생들의 결과가 올바르다고 할 수 있다. 하지만 학생들의 결과는 조작과 경험으로 접근하여 나온 결과이기에 논리성이 결여되었다고 할 수 있다.

따라서 패턴 분석에 따른 수학적 모델에서 흑백게임의 규칙을 찾고, 다른 수학적 모델의 기본이라 할 수 있는 초기조건들의 패턴 종류를 발견하는 것이 중요한 결과이다.

나. 대응 관계에 따른 수학적 모델

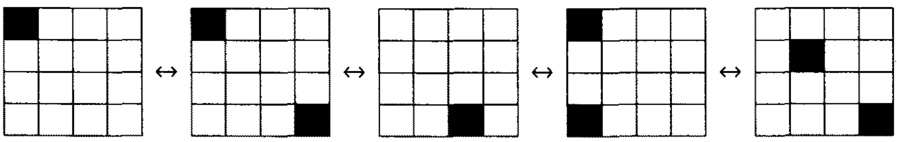
학생들은 3×3 흑백게임에서 클릭하는 경우의 수와 초기조건의 경우의 수가 같음을 착안하여서 한 문제에 대한 해는 유일하다고 생각하고 있었다. 이는 임의의 흑백게임에 대한 결과로도 확대해석하고 있었다. 즉 패턴 분석에 따른 수학적 모델을 분석하는데 있어서도 해가 유일하다는 생각은 자명할 것이라고 판단하고 있었다. 이는 선행연구에서 초기조건의 행렬값이 0이 아닌 경우에만 성립하는 조건이고, 행렬값이 0인 경우에는 성립하지 않는 조건이다. 학생들은 3×3 흑백게임의 초기조건이 행렬값이 0인 경우라는 것은 인지하지 못하여서 이런 오류를 범하였다. 하지만 학생 B가 4×4 흑백게임에서 다음과 같은 반례를 찾게 되면서 오류를 수정했다.



[그림 IV-3] 해가 유일하다는 생각의 반례(학생 B)

연구자 : 똑같은 모양으로 바꾸는데 있어서 한 가지 방법만 있는 것이 아니라고?

학생 A : 그럼 일대일 대응이 아니라는거죠. 두 가지의 경우가 하나의 답으로 가는 경우가 있어서, 비는 경우가 생겨서 일대일 대응이 깨져버리니깐 모든 경우



[그림 IV-2] 4×4 흑백게임에서 초기조건들의 패턴 종류(학생 B)

의 수에 해가 존재하지 않아요. 해가 있을 수도 있고 없을 수도 있고.. 해가 두 개 있는 경우가 있으니 답이 없는 경우가 하나라도 있어요.

위에서 학생들은 일대응 대응이라는 가설로부터 모순이 발생함을 인지하였고, 일대일 대응이 되지 않기 때문에 다대다 대응이라고 유추하고 있다. 즉, 일대일 대응을 고려해보면 임의의 흑백게임의 경우에 항상 승리할 수 있는 것은 아니라고 확신하며, 또한 해가 많은 초기조건이 존재한다면 해가 없는 초기조건도 존재할 것이라고 확신한 것이다.

이러한 결과로 흑백게임의 해를 구한 것은 아니지만, 대응 관계에 따른 수학적 모델은 흑백게임에 대한 해의 존재성 및 유일성에 대한 의문을 풀 수 있는 계기가 되었다고 볼 수 있다.

다. 동치류 분석에 따른 수학적 모델

학생 B는 초기 조건과 같은 조건들을 모색하는 다양한 방법 중에 오른쪽 기준으로 맞추는 방법을 택하였다. 즉, 가장 왼쪽의 열부터 차례로 색을 통일하다보면 가장 오른쪽 기준이 해와 관계있음을 발견하였으며, 4×4 흑백게임에서는 그러한 기준이 16가지가 있음을 발견하였다. 이는 가장 최근에 활발하게 진행되었던 동치류 분석 전략과 매우 유사하며, 그 결과 또한 같음을 살펴 볼 수 있다. 학생 A가 이를 정리해서 다음과 같이 말하였다.

학생 A : 왼쪽이 결정되면, 그 왼쪽을 모두 하얗게 만들기 위해서 오른쪽이 그대로 결정이 되어버리더라구요. 그러니깐 한쪽 기준만 결과가 나와 버리면 세 번째 까지는 다 하얗게 만들 수 있고, 마지막께 하얗게 될지 검정이 하나씩 있을지는 모르고요. 실제로 실험을 해보니깐 왼쪽 16가지를 어떻게 하던지 간에 제일 오른쪽에 결정되어 있는 값은 변하지 않더라구요. 그니깐 오른쪽에 나타날 수 있는 16가지 중에 그 한 가지만 해가 있고, 나머지 15가지는 해가 없다고 생각을 했고.. 그러니깐 4×4에서는 2^{16}개의 총 문제가 있는데, 그 중에서 모든 문제가...... 답이 있는 놈은 16개가 있고 또, 16개 중에 15개는 답이 없는 결과가 나왔어요.

즉, 학생들은 4×4 흑백게임의 경우에 첫째 열의 경우의 수가 2^4가지인 것은 발견을 하고, 이를 김덕선(2008)이 선행연구에서 정의한 방법과 마찬가지로 단계 1부터 단계 4까지 실행하고 마지막 열의 경우만 확인해보았다[7]. 그 결과 4×4 흑백게임에서 주어진 초기조건의 경우에 4열의 정보가 항상 똑같았으며, 3×3 흑백게임에서 주어진 초기조건의 경우의 마지막 3열의 정보는 2^3가지가 있었다. 즉, 4×4 흑백게임에서 주어지는 초기조건의 경우는 마지막 열의 정보를 판단하여서 해를 말할 수 있으며, 해가 있는 경우가 총 2^4가지[8]라고 하는 것도 알 수 있다.

또한 3×3 흑백게임의 경우에 마지막 열의 경우의 수는 8가지 중에 해가 되는 경우는 1가지 있으므로, 승리하기 위한 방법이 1가지임을 확인할 수 있다. 이를 이용해서 학생들은 3×3 흑백게임에서는 암산만으로도 해를 구할 수 있다. 이는 가장 최근에 연구된 선행연구의 결과와도 유사하며, 임의의 흑백게임에서도 적용가능한 해법이다. 학생들은 이 방법으로 임의의 흑백게임에서 승리할 수 있음을 확신하였지만, 해를 구해놓은 것이 아니라 해를 구하는 방법을 알게 된 것뿐이라 생각하여서, 그 가치를

7) 김덕선(2008)은 단계 1부터 단계 4를 실행하여서 마지막 행의 경우를 확인해봤다.
8) 첫 번째 열에 조작가능한 법이 16가지인 것을 고려한 답변이다.

낮게 보고 있었다. 그래서 좀 더 접근하고자 다른 전략들을 모색하는 모습을 보여주었다.

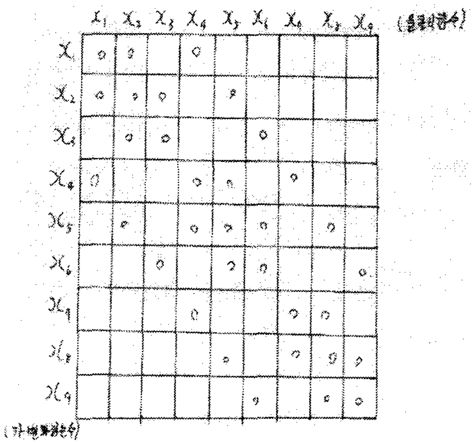
즉 동치류 분석의 수학적 모델은 수많은 초기 조건들을 동치류로 분류하고, 그 대표 인자를 생각하여 흑백게임의 해를 구하는 방법을 알아내는 것이 중요한 결과이다.

라. 선형대수학적 분석에 따른 수학적 모델

흑백게임에 대한 수업 중에 2차시 때, 학생 A가 방정식으로 표현될 수 있을 것 같다는 발언을 하면서 다음과 같이 방정식과 흑백게임과의 연결된 고리를 생각했다.

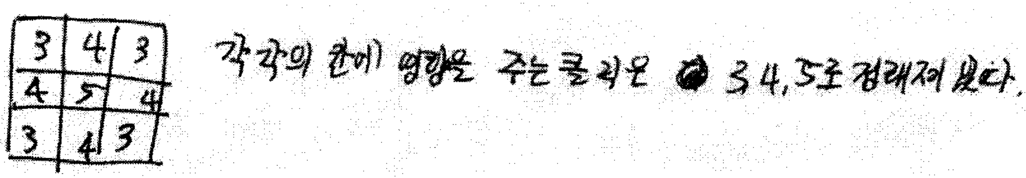
[그림 IV-4]는 해당되는 칸의 색이 바뀔 수 있는 클릭하는 경우의 수를 써놓은 것이다. 이 아이디어를 바탕으로 하여 학생 A가 다음과 같은 표를 칠판에 표시하고 설명하였는데, 이를 통해 선행연구에서 다루어졌던 선형대수학적 전략에 따른 흑백게임 이론을 엿볼 수 있었다.

[그림 IV-5]는 [그림 IV-4]를 풀어서 작성한 것이며, 이는 이상구(2004)가 3×3 흑백게임을 선형대수학적으로 표현한 $AX=B$에서 행렬 A를 표현한 것과 같다. 이로써 학생들이 흑백게임을 연립방정식으로 표현은 할 수 있었으나 미지수가 9개이고, 계산 과정이 단순하지 않아서 해를 구하는데 어려움이 있었다. 그래도 충분한 시간을 가지고 9개의 연립방정식을 두 세 차례 풀어서 해를 구하고 검증도 해봐서 올바르다는 것을 확인하였다. 또한 학생들은 이를 활용하여 4×4 흑백게임을 연립방정식으로 표현은 가능하였으나 방정식의 풀이를 하고 싶어하지 않았다. 미지수가 9개에서 16개로 많아진 만큼 풀이를 하는데 있어서 난해함은 기하급수적으로 어려워졌음을 알기 때문이다. 또한 풀이를 하지 않음으로 인해서 해의 존재성 및 유일성에 대해서 언급하기가 어려웠다. 즉 연립방정식으로의 표현은 가능했지만, 해의 존재 여부는 판단하기가 쉽지가 않았다. 선행연구에서는 연립방정식을 행렬로 표현하여 행렬값을 살펴보면서 선형대수학적으로 접근하였지만, 학생들은 연립방정식의 표현 외에 다른 표현을 찾지 못하고 풀이를 하지 못하는 난관에 부딪쳤다.



[그림 IV-5] 3×3 크기에서의 흑백게임을 방정식으로 표현하기(2)(학생 A)

이후 다른 전략들을 모색하기만 하다가 연립방정식의 해법을 다시 고려하게 된 이유는 학생 A가 흑백게임의 홀짝성을 고려하여 다음과 같은 논리 연산자 XOR이라는 아이디어를 떠올렸기 때문이다.



[그림 IV-4] 3×3 흑백게임을 방정식으로 표현하기(1) (학생 A)

학생 A : 선생님~ 공부한걸 정리를 해봤거든요. (중략) 갑자기 떠오른게 비트 연산인데요. 컨텐츠 자체가 2진수로 인식하잖아요. 그렇게 되면 2진수로 인식한다는 식은 홀짝성과 통하는 부분이 있잖아요.

a	1	1	0	0
b	1	0	1	0
a+b	0	1	1	0

[그림 IV-6] XOR 논리 연산자 (학생 A)

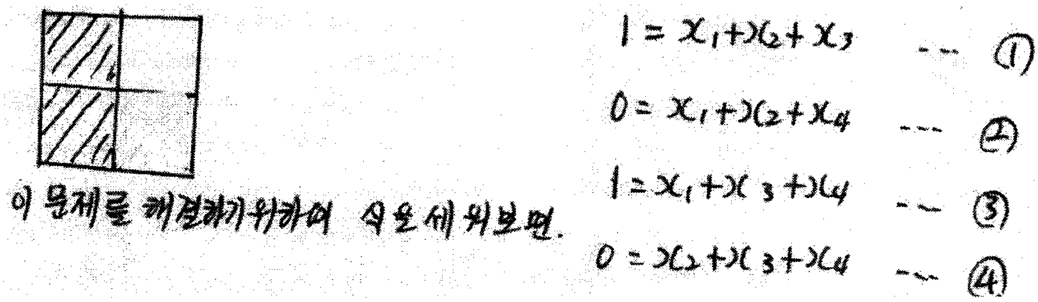
위에서 학생 A가 말한 비트 연산자는 논리 연산자 중에 XOR을 의미하는 것이고, 이는 $(Z_2, +)$를 의미하고 있는 것이다. 홀짝성을 활용하여 Z_2를 정의하고 덧셈연산을 실수에서의 덧셈연산이 아닌 XOR 논리 연산자를 들고 나온 것이다. 이는 실제로 Z_2에서의 덧셈연산을 얘기하는 것과 같음을 [그림 IV-6]에서 확인할 수 있다. 그래서 학생 A는 이를 행연산에 적용한다면 간단하고 빠르게 답을 구할 수 있다고 생각하고 있었다.

기존의 선형대수학적 전략에 따른 흑백게임 이론[9]을 보완할 만한 내용들이 나왔고, 이후 수업에서는 이를 보강하고 점검하는 수업들을 진행하게 되었다.

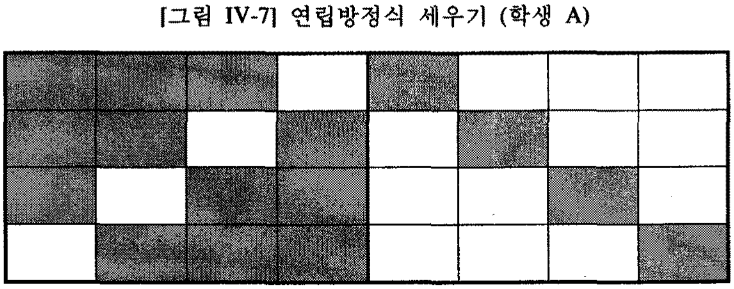
학생A는 자신의 논리를 설명하고자, 2×2 흑백게임의 한 초기조건의 예를 들었고, 다음 그림과 같이 연립방정식을 세웠다.

그리고 기존처럼 연립방정식을 세우는 것이 아니라 홀짝성을 고려하여 다음과 같이 표현하였다.

[그림 IV-8]은 [그림 IV-5]의 식을 2×2 흑백게임에 맞추어 표현하였으며 오른쪽에 x_1부터 x_4를 의미하는 4×4 모양을 추가하였다. 기존의 연립방정식 풀이 방식은 [그림 IV-7]의 2번 식에 1번 식을 더하여 2번 식이 $x'_3+x'_4 \equiv x_1+x_2$



[그림 IV-7] 연립방정식 세우기 (학생 A)



[그림 IV-8] Z_2에서 홀짝성을 고려한 행연산을 사용하여 역행렬 구하기(1) (학생 A)

9) 이상구(2006)에 소개된 선형대수학적 전략에 따른 흑백게임 이론에서는 행렬 값이 0인 경우만 다루었다.

(mod 2)가 되는 것이다. 하지만 학생 A는 홀짝성을 고려하여 클릭을 하였다. 클릭한 후의 효과는 XOR 연산과 마찬가지이며 Z_2에서의 덧셈 계산과도 같다. 즉 흑을 클릭하면 백이 되고, 백을 클릭하면 흑이 된다.

그 예로써 [그림 IV-8]의 2행에 1행을 더하는 연산하는 방식은 2행의 1, 2, 4, 5번째 열의 성분[10]을 클릭하면 됨을 의미한다. 따라서 이와 같은 클릭을 반복하여 다음과 같이 변환할 수 있었다.

[그림 IV-9]의 결과는 2×2 흑백게임에서 해를 구하는 법을 보여주고 있다. 즉 다음과 같은 식 4개를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} x'_1 \equiv x_1 + x_2 + x_3 \pmod 2 \\ x'_2 \equiv x_1 + x_2 + x_4 \pmod 2 \\ x'_3 \equiv x_1 + x_3 + x_4 \pmod 2 \\ x'_4 \equiv x_2 + x_3 + x_4 \pmod 2 \end{cases}$$

[그림 IV-10] 2×2 흑백게임의 해

다시 말해 [그림 IV-7]과 같은 2×2 흑백게임의 초기조건이 있다고 하자. 그러면 이 흑백게임을 전부 흰색으로 통일하기 위해서는 x_2; x_4의 성분이 흰색이 되어야한다. [그림 IV-7]은 $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=1$; $x_4=0$이므로, [그림 IV-10]으로부터 나온 식을 활용하면 클릭해야할 곳은 x_2; x_4이라는 것을 확인할 수 있다.

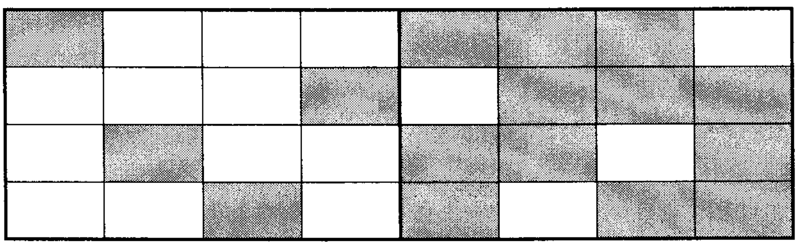
선형연구들에 따르면 2×2 또는 3×3 흑백게임은 항상 승리할 수 있다. 하지만 4×4 흑백게임은 항상 승리할 수 있는 것은 아니다[11]. 또한 김덕선(2008)은 4×4 흑백게임을 행렬 표현했을 때 자유변수 4개에 대해서 언급했다. 따라서 4×4 흑백게임의 경우 위와 같이 홀짝성을 고려한 역행렬을 구해서 자유변수를 살펴보면 다음과 같은 필요충분조건을 구할 수가 있다.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{13} \equiv 0 \pmod{2} \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{14} \equiv 0 \pmod{2} \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{15} \equiv 0 \pmod{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_8 + x_{11} + x_{12} + x_{16} \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

[그림 III-11] 4×4 흑백게임에서 승리하기 위한 필요충분조건

즉 우리는 4×4 흑백게임의 초기조건이 주어졌을 때, [그림 IV-11]의 방정식의 성립여부를 확인하면 해의 존재 여부를 판단할 수 있으며 이는 선행연구들의 결과들보다 강화된 조건이다. 그리고 자유변수가 4개이기 때문에, 해가 존재한다면 그 해가 2^4개라는 것을 확인 할 수 있다.

이를 확장하여 임의의 $m \times n$ 흑백게임의 초기조건이 주어졌을 때, XOR 논리 연산자를 적용한 행연산을 통해 나오는 역행렬을 이용하여, 해가 존재하는 필요충분조건을 구할 수 있고, 그러한 해를 구할 수도 있다.



[그림 IV-9] Z_2에서 홀짝성을 고려한 행연산을 사용하여 역행렬 구하기(2) (학생 A)

10) 1행의 성분 순서대로 2행의 성분들에 클릭하는 것이다.
11) 김덕선(2008)은 행연산을 통하여 마지막 행의 성분을 살펴보고서 승리할 수 있는지의 여부를 확인할 수 있다.

따라서 선형대수학적 분석에 따른 수학적 모델에서는 흑백게임을 클릭하는 경우들을 방정식으로 표현하고, 클릭하는 과정을 연산으로 표현하는 것을 활용한 연립방정식의 풀이가 흑백게임의 해와 관련이 있다는 것을 발견한 것이 중요한 결과이다.

3. 흑백게임에서의 수학적 모델링의 의미

흑백게임에서 승리하기 위해 사용한 네 가지 수학적 모델링은 수학적으로 혹은 교육적으로 다음과 같은 의미를 가진다.

NCTM(2000)에서 패턴을 통한 활동, 즉 아동이 패턴을 인식하고 패턴을 확장하는 것을 가장 자연스러운 활동으로 보고 있다. 또한 아동들이 수를 배우는 과정에서 수와 그림들을 대응해가면서 개념을 습득하고 있다. 이처럼 패턴이나 대응은 가장 기초적이고 중요한 수학 활동이라고 할 수 있다. 또한 중등수학 이상에서는 산술적 의미에서의 등호보다는 함수, 기하의 영역에서 관계적 측면에 의해 등호를 사용하기도 한다. 즉 어떤 목적을 위해 다른 것을 대신 하는 것이 가능하다는 관계인 동치류에 대한 개념을 흑백게임에서의 수학적 모델링에서도 살펴볼 수 있었다. 마지막으로 다룬 연립방정식을 풀기 위한 사고의 전환은 광범위한 응용성을 가진 선형대수학을 자연스럽게 접했다고 본다.

특히 동치류 분석에 따른 수학적 모델링은 선행연구들과 비교했을 때 승리할 방법을 찾았다는 점에서는 동일하며, 선형대수학적 분석에 따른 수학적 모델링은 선행연구들에 비해서 더욱 강화된 조건을 찾기도 하였다. 따라서 흑백게임을 활용한 수업은 발전가능성을 열어둔 수학적 모델링들을 내포하고 있다는 점을 인지할 수 있다.

4. 흑백게임을 유용하게 활용할 수 있는 발문

선행연구에서 흑백게임은 순서가 없는 다양한 수학적 모델링을 내포하고 있었으며, 이를 토대로 한 영재교육원 수업을 통해서도 그 순서가 없음을 재확인할 수 있었다. 패턴 분석에 따른 수학적 모델링은 두 학생 모두 유사한 결과가 나왔으나, 대응 관계나 동치류 분석에 따른 수학적 모델링은 학생 B, 선형대수학적 분석에 따른 수학적 모델링은 학생 A가 각각 토론을 주도하면서 차별화된 결과가 나왔다.

따라서 흑백게임을 활용한 수업에서는 승리하기 위한 방법을 일방적으로 제시하는 것보다는 발문을 통한 다양한 수학적 사고 활동을 유도하는 것이 필요하다고 판단된다. 승리하기 위한 방법을 제시하더라도 발문 후에 제시하는 것이 학생의 사고 작용을 자연스럽게 이어지게 할 수 있다고 보기 때문이다. 이는 발문을 통해 어떠한 결과를 효과적으로 얻고자 함이 아니라 발문을 통해 학생이 미지의 것을 생각해 볼 기회를 주기 위해서이다. 따라서 본 연구의 학생들의 모델링 과정을 활용해 다음과 같이 발문을 제시한다.

먼저 패턴 관계 분석의 수학적 모델링에 대하여 다음 두 가지의 발문을 제시한다.

첫째, 해의 경우들이 몇 가지가 나오는가? 이 발문을 통해 해의 경우들을 살펴보고 패턴을 살펴 볼 수 있게 한다.

둘째, 3×3 흑백게임과 4×4 흑백게임의 해의 경우들은 몇 가지가 있는가? 이 발문을 통해 크기가 다른 흑백게임의 경우에 같은 패턴이 아닐 수도 있다는 생각을 가지게 되며, 각각의 규칙성을 살펴 볼 수 있게 한다.

대응 관계 분석의 수학적 모델링에 대해서는 다음 두 가지의 발문을 제시한다.

첫째, 3×3 흑백게임의 해는 항상 존재하는가? 이 발문을 통해 해와 초기 조건과의 대응 관계를 생각해 볼 수 있게 한다.

둘째, 3×3 흑백게임의 해는 유일한가? 이 발문을 통해 해와 초기 조건과의 대응 관계에 있어서 유일성 및 존재성에 대해 생각해 볼 수 있게 한다.

동치류 분석의 수학적 모델링에 대해서는 다음 세 가지의 발문을 제시한다.

첫째, 초기 조건과 같은 답이 나오는 다른 초기 조건들을 찾을 수 있는가? 이 발문을 통해 클릭을 통해 해를 얻는 과정에 대해 생각해 볼 수 있게 한다.

둘째, 다른 초기 조건들 중에서 간단한 모양을 찾을 수 있는가? 이 발문을 통해 대표 인자들에 대해 정의를 내리는 과정에 대해 생각해 볼 수 있게 한다.

셋째, 4×4 흑백게임에서 간단한 모양을 찾아보자. 이 발문을 통해 3×3 흑백게임과는 대응 관계가 다른 4×4 흑백게임에서의 대표 인자들에 대해 생각해 볼 수 있게 한다.

마지막으로 선형대수학적 분석의 수학적 모델링을 위하여 다음 네 가지의 발문을 제시한다.

첫째, 흑백게임을 연립방정식으로 표현해 볼 수 있는가?

이 발문을 통해 모르는 것을 미지수로 놓는 표현을 생각해 볼 수 있게 한다.

둘째, 방정식을 풀이할 때 계수들이 뜻하는 바는 무엇인가?

이 발문을 통해 홀짝성에 대해 생각해 볼 수 있게 한다. 이는 패턴 분석이나 동치류 분석의 수학적 모델링에서도 언급된 부분이기도하나 방정식의 표현이라는 표현법에 대해 사고할 수 있도록 도와준다.

셋째, 다항식끼리의 연산은 일반적인 사칙연산과 같은가?

이 발문을 통해 홀짝성의 표현법과 함께 연산이라는 것에 대해 생각해 볼 수 있게 한다.

넷째, 연립방정식에서 흑백게임의 해는 무엇을 의미하는가?

홀짝성이라는 표현법과 연산이라는 관계를 가지고 초기 조건과 해를 분석할 수 있게 한다.

위의 발문들은 학생들이 기존과의 다른 사고 활동을 유도하도록 초점이 맞추어진 것이다. 그렇기 때문에 그 결과가 추구한 바와 상이해도 발문의 목적은 달성했다고 할 수 있다.

V. 결론

본 연구는 흑백게임이라는 소재에 대해 중학교 수학영재학생들이 어떤 수학적 모델링을 발견하는지 확인함으로써 수학영재교육용 수업 소재로 활용할 수 있는 방안과 교사들이 유용하게 활용할 수 있는 몇 가지 발문을 제안했다. 이 흑백게임은 패턴 분석, 대응 관계, 동치류 분석, 선형대수학적 분석 등의 다양한 수학적 모델링을 학생에게 접할 기회를 줄 수 있다. 현장 적용을 위해 전남지역의 S대학부설 과학영재교육원 중등수학 사사과정 학생 2명을 대상으로 하는 R&E(Research and Education) 수업에 활용해 보았다. 학생들은 다양한 수학적 사고 흐름을 비순차적으로 보여주었으며, 선행 연구들과는 차별된 새로운 결과를 이끌어내기도 하였다. 따라서 이러한 다양한 수학적 사고 활동을 수학영재 학생들에게 유도할 때는 어떻게 수업을 계획할지 고려하게 되어서, 발문의 예시를 내놓았다.

발문의 최선의 방법은 자연스럽게 학생을 돕는 것이기 때문에 미지의 것을 살펴볼 수 있도록 발문 내용을 구성하였으며, 이러한 발문들

은 학생들의 수학적 사고 흐름을 다양하게 유도하고, 다양한 수학적 모델링들에 대해 사고해볼 수 있도록 기회를 제공해 준다. 따라서 흑백게임을 활용한 수업은 학생들이 흑백게임이라는 한 가지의 주제에 대해서 다양한 수학적 사고를 가능케하는 기회의 장이며 수학영재들의 새로운 학습 주제 탐구에 대한 목마름을 조금은 해결해 주지 않을까하고 생각한다.

참고문헌

김덕선 · 류창우 · 송영무 · 이상구(2008). "흑백게임의 역사와 수학적모델링". 『한국수학사학회지』, 22(1), 53-74

김덕선 · 이상구(2007). "$m \times n$ 크기의 일반적인 흑백 게임의 최적해와 타일링". 『한국수학교육학회 시리즈 E: 수학교육 논문집』, 21(4), 597-612

이상구 · 박종빈 · 양정모 · 김익표(2004). "바둑판을 이용한 흑백 게임의 최적해를 구하는 선형대수학 알고리즘". 『한국수학교육학회 시리즈 A』, 43(1). 87-96

이상구 · 양정모(2006). "Linear Algebraic approach on real sigma-game". 『Journal of Applied Mathematics & Computing』, *21(1-2)*, 295-305

Anderson, M. and Feil, T.(1998). Turning lights out with linear algebra. Mathematics. Magazine, 71, 300-303.

Developing a Material Topic and some Questions with Blackout Game for the Mathematically Gifted Students' R&E

Ryu, Chang Woo (Sunchon National University)
Song, Yeong Moo (Sunchon National University)

Blackout game on a certain size of the Go table, which looks simple, involves a variety of mathematical modeling. This study uses a research and education method. While the mathematically gifted students were playing blackout game, the author, as the instructor, observed the ways in which they approached various mathematical models. Based on the data, this study examines the effects of blackout game on the children's cognitive processes. This study further discusses the issues of questions.

* **key words** : blackout game(흑백게임), case study(사례연구), the gifted/talented(영재), the mathematically gifted students(수학영재학생), mathematical modeling(수학적 모델링), mathematical thinking(수학적 사고), questions(발문)

논문접수 : 2010. 8. 13
논문수정 : 2010. 9. 3
심사완료 : 2010. 9. 11