대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.3, 323-335. Sep 2010

선형방정식계의 해법을 중심으로 한 선형대수에서의 교수법 연구

강 순 부* · 이 용 균** · 조 완 영***

선형대수는 대수학, 해석학, 기하학 등 수학의 모든 분야의 문제 해결에 광범위하게 이용될 뿐만 아니라 항공공학, 전자공학, 생물학, 지질학, 기계공학 등 다양한 학문영역에서 문제해결의 수단으로 쓰이는 이용도가 높은 학문이다. 따라서 선형대수는 수학 전공 학생뿐만 아니라 일반 학생에게도 쉽게 다가갈 수 있어야 한다. 그러나 대부분의 학생들은 선형대수 학습에서 많은 어려움을 느낀다. 왜 어려움을 느낄까? 선형대수를 학습하는 많은 학생들은 개념을 아예 인지하지 못하거나 자신들이 가지고 있던 선지식을 통해 오개념을 갖게 되고, 연이어 학습되는 부분에서 학습장애를 일으키고 오류를 범하기 때문이다. 본 연구는 선형방정식계의 학습에서 나타나는 학생들의 어려움과 오류를 분석하고 연구하여 보다 효과적인 선형대수 교수법을 제시하였다.

Ⅰ. 서론

수학은 고대, 중세, 근세, 현대에 이르기까지 각각 당시의 사회문제를 해결해 주거나 해결할 수 있는 방법을 제시하면서 중요한 역할을 해왔고 지금도 그 역할을 수행하고 있다. 특히, 선형대수는 대수학, 해석학, 기하학 등 수학의 모든 분야의 문제 해결에 광범위하게 이용될 뿐만 아니라 항공공학에서의 비행제어체계, 전자공학에서의 전기회로망 설계, 생물학에서의 개체군 역학계, 지질학에서의 기준면 설정, 기계공학에서의 CAD(Computer-Aided Design) 등 다양한 학문영역에서 문제해결의 수단으로 쓰이는 이용도가 높은 학문이다. 따라서 선형대수는 수학 전공 학생뿐만 아니라 일반 학생에게도 쉽게 다가갈 수 있어야 한다. 그러나 대부분의 학생들은 선형대수 학습에서 많은 어려움을 느낀다. 왜 어려움을 느끼는 것일까?

선형대수는 본래 선형방정식계(system of linear equations)를 푸는 문제와 행렬식을 계산하는 문제에 기초를 두고 탄생된 과목이었다. 선형방정식계는 고대부터 현대까지 소행성 궤도 계산, 경제학의 수리모형 연구, 석유매장 탐사, 항공기 운항과 지원업무의 다양한 스케줄 계획, 전기회로망 설계와 관련된 문제 등 다양한 분야의 문제들을 해결하는 중요한 역할을 해왔다. 즉, 해결하고자 하는 문제를 수학적 모델링과 선형화를 통하여 선형방정식계와 관련된 문제로 바꾼 후, 행렬에 대한 지식을 이용하여 그 문제의 해를 구한 다음, 다시 그 해를 원래 문제에 대한 답으로 해석하여 문제를 해결하였다. 특히, 1980년대 이후에는 디지털 컴퓨터의 발달로 계산이 힘든 행렬을 다룰 수 있게 되면

* 공군사관학교 (sbkang@afa.ac.kr)
** 공군사관학교 (mathyouth@afa.ac.kr)
*** 충북대학교 (wycho@cbu.ac.kr)

서 선형방정식계는 다양한 분야에서 문제해결의 수단으로 쓰이게 되었다. 그래서 이때부터 선형방정식계를 포함한 선형대수는 인문·사회과학 계열에서도 대학의 기초과목으로 채택하기 시작하였고, 현재는 선형대수를 대학에서 기초과목으로 꼭 배워야 하는 과목으로 여기고 있다(최영한, 2004).

선형방정식계의 해법은 고대부터 현재까지 다양한 문제를 해결하는 중요한 수단으로, 본 연구는 선형방정식계의 학습에서 나타나는 학생들의 어려움과 오류를 분석하고 연구하여 보다 효과적인 선형대수 교수법을 논하고자 한다.

II. 선형방정식계의 해법에 대한 역사적 고찰

선형방정식계와 관련된 문제의 해를 구하기 위한 노력은 기원전 4세기경 바빌로니아시대부터 현대에 이르기까지 지속되어 왔다. 특히, 중국의 한(漢 : BC 202 ~ AD 220)나라 때 쓰여진 「구장산술(九章算術)」에서는 선형방정식의 해를 구하기 위해 현대의 「가우스 소거법」과 같은 방법을 사용했다. 이 방법은 약 2,000년 후인 19세기 초까지도 세계에 널리 알려지지 않았다. 19세기 초 가우스(Gauss)는 팰러스(Pallas) 소행성 궤도의 관찰 기록을 이용하여, 미지수가 6개인 선형방정식계를 만들었고, 이 계수행렬에 대해 「가우스 소거법」을 고안해 냈다.

1752년에 스위스 수학자인 가브리엘 크래머(Gabriel Cramer)(1704 - 1752)는 그의 저서 Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques에서 크래머 공식(Cramer's rule)을 처음 발표하였는데 이 공식은 선형방정식계의 해를 행렬식으로 표현하는 선형대수의 정리(theorem)이다. 방정식이 많은 경우의 실제 해의 계산에 있어서는 그리 유용하지 않지만, 피봇팅(pivoting)이 필요하지 않은 경우 작은 크기의 행렬에서는 가우스 소거법보다 훨씬 효율적이다. 사실 행렬식을 이용하여 선형방정식의 해를 구하려는 시도는 그 이전부터 있었다. 1683년 일본 수학자 세키 코와(Seki Kowa)는 행렬식 개념을 최초로 발표하면서 이를 이용하여 방정식의 해를 구했고, 1693년에는 독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz)도 행렬식을 이용해 선형방정식계의 해를 구했다(이상구, 1997).

1949년 하버드대의 Wassily Leontief는 컴퓨터를 이용하여 선형방정식계의 해를 구했다. Leontief는 미국의 경제를 500개의 산업분야로 나누어 각 분야의 산출물이 어떻게 교역되는가를 설명하기 위해 500개의 방정식으로 된 선형방정식계를 만들었다. 이를 다시 42개 변수와 42개 방정식으로 된 선형방정식계로 정제하여 당시 대형 컴퓨터 중 하나였던 MARK II 컴퓨터를 이용하여 56시간 만에 해를 구하였고, Leontief는 그 해를 통해 교역에 대한 분석을 하였다. 이 연구는 컴퓨터를 사용하여 대형 규모의 수리모형을 분석하는 최초의 시도였고, 후에 그 업적을 인정받아 1973년 Leontief는 노벨 경제학상을 받게 되었다(Lay, 2003).

이렇듯 선형방정식계의 해를 구하는 것은 수학의 오래된 연구 분야이다. 그러나 선형방정식계를 포함하는 선형대수는 19세기 중엽이 되어서야 현대 선형대수의 모습을 갖추게 되었고 선형대수의 공리화는 1930년 이후에야 비로서 이루어졌다. 제2차 세계대전 이후에는 현대적인 컴퓨터의 발전과 더불어 행렬이론의 수치해석적인 장점이 부각되어 선형대수에서 선형방정식계의 해법에 대한 중요성을 인식하게 되었다. 1950~1960년대에 선형대수의 교육과정이 벡터공간 중심으로 추천한 적도 있었으나 디지털 컴퓨터의 발달로 컴퓨터 공학, 제어공학, 경

제학, 통계학 등 다양한 분야에서 문제를 풀기 위한 도구로서 선형방정식계를 포함하는 행렬 중심의 선형대수가 부각되었다. 특히, 1990년 선형대수 교육과정 연구단체(LASCG, The Linear Algebra Curriculum Study Group)는 기존의 벡터공간 중심의 교육과정 보다 선형방정식계와 관련된 교육내용을 포함하는 실용적인 행렬 중심의 교육과정으로 전환할 것을 추천한 이후로는 행렬 중심의 선형대수에 대한 관심이 높아졌다(신경희, 2005). 사실 선형대수가 대학의 필수과목으로 자리를 잡은 시기는 미분적분학이나 미분방정식 등 수학의 다른 과목에 비해 역사가 짧기 때문에 선형방정식계의 해법과 교육을 포함하는 선형대수 교수법에 대한 연구는 미분적분학, 미분방정식에 비해 상대적으로 많지 않다. 또한 학생들은 선형대수 학습 시 많은 학습장애를 경험하게 되는데, Dorier는 이것을 새롭고 낯선 행성에 내려 갈 길을 몰라서 헤매는 것에 비유하였다(Dorier, 2000: 신경희, 2005). 따라서 학습장애를 극복할 수 있는 선형대수 교수법의 연구가 절실히 필요하게 되었고 현재는 이 분야에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다(최영한, 2004).

III. 선형대수 학습장애 요인(선형방정식계의 해법 중심)

선형대수는 수학의 다른 분야, 미분적분학, 미분방정식, 기하학, 확률론 등에 광범위하게 이용될 뿐만 아니라 항공공학, 전자공학, 생물학, 지질학, 경제학, 심리학 등의 공학 및 사회과학 분야에도 그 이용도가 높은 학문으로, 다양한 학문 영역에서 문제 해결의 수단으로 쓰이기 때문에 일반 학생들은 선형대수에 쉽게 다가갈 수 있어야 한다. 그러나 선형대수의 형식적인 공리적 구조의 특징은 선형대수를 학습하는 많은 학생들에게 어려움을 느끼게 한다. 또한 선형대수는 수리 논리적 사고를 기반으로 하는 거의 모든 학문 분야에서 대학 미적분학을 이수한 후에 수강하게 되는 가장 기본적인 기초 수학이다. 미분적분학이 논리적 사고보다 다소 직관적 통찰과 계산력에 치중하는 경향이 있는 반면 선형대수는 추상적인 개념을 대상으로 이론을 전개하기 때문에 처음 공부하는 학생들은 그 개념들을 정확하게 이해하고 응용하는데 어려움이 있다. 그렇다면 학생들은 왜 선형대수 학습에서 그렇게 많은 어려움을 느끼는 것일까? 또 선형대수의 어떤 특징들이 이러한 상황을 만들게 되는 걸까?

많은 교육학자들은 학습장애의 원인을 학생들이 가지고 있는 오개념으로부터 출발한다고 생각한다. 이러한 오개념은 이어지는 학습에서 장애를 유발시키고 문제풀이에서는 오류를 범하게 한다. 따라서 학습장애의 원인을 정확하게 분석하는 방법 중에 하나가 학생들이 가지고 있는 오류를 발견하고 분석하는 것이다. 본 논문에서는 공군사관학교 2학년 이공계 학생들(수학 비전공)을 대상으로 학생들이 가지고 있는 오류를 찾기 위해 학기 중간에 실시한 선형방정식계의 해를 구하는 것과 관련된 시험문제에 대해 학생들이 작성한 답안지를 중심으로 오류를 찾고 이의 근원을 분석하였다.

선형대수에서 선형방정식 $AX=B$의 해 X를 구하기 위한 중요한 방법은 가우스 · 조르단 소거법, 크래머 공식과 LU분해법이다. 가우스 · 조르단 소거법은 $AX=B$에서 계수행렬 A와 상수행렬 B를 포함하는 확대행렬을 기본행연산을 통해서 기약 사다리꼴 행렬(reduced eche- lon form matrix)로 변형시켜서 해를 구하는 방법이다. 크래머 공식은 피봇팅(pivoting)이 필요하지 않은 작은 크기의 행렬에서 행렬식을 이용하여

해를 구하는 방법이다. 또한 LU 분해(LU decomposition)는 1948년 Von Neumann과 최초의 stored-program 컴퓨터를 개발한 Alan Turing이 소개한 방법으로 이 방법은 $AX=B$에서 기본행연산(elementary row operation) 또는 기본열연산(elementary column operation)을 통해서 행렬 A를 단위하삼각행렬(unit lower triangular matrix) L과 상삼각행렬(upper triangular matrix) U로 분해하여 $AX=B$를 $LUX=B$로 표현하고 $AX=B$를 $LY=B$ 와 $UX=Y$ 라는 두 개의 단순한 문제로 바꾸어 순서대로 대입하는 것과 거꾸로 대입하는 방법을 통해 역행렬의 존재와 상관없이 해를 구하는 방법이다.

다음은 학기중에 치른 수시시험, 중간시험 문제 중 선형방정식계의 해법과 관련된 시험문제이다. 학생들은 전산과학, 항공공학, 기계공학,

<표 Ⅱ-1> 수시시험 문제

1. 다음 선형방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2 \\ x + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = -5 \end{cases}$$

2. 다음 선형방정식에 대하여 물음에 답하여라.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

(1) 계수행렬의 LU 분해를 구하여라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 선형방정식의 해를 구하여라

3. 다음 선형방정식의 해를 갖기 위해서 b_1, b_2, b_3가 어떤 조건을 만족해야 하는지를 구하고, b_1, b_2, b_3를 이용하여 그 때의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x + y + 2z = b_1 \\ x + z = b_2 \\ 2x + y + 3z = b_3 \end{cases}$$

<표 Ⅱ-2> 수시시험 정답률 (단위 : %)

문 항 번 호		10점 (만점)	5-9점	1-4점	0점	계
1	크래머 방법	**35.3**	23.5	5.9	0	64.7
	가우스·조르단 소거법	**17.6**	0	5.9	0	23.5
	기타 방법	**11.8**	0	0	0	11.8
	소 계	64.7	23.5	11.8	0	100
2-(1)		58.9	23.5	0	**17.6**	**100**
2-(2)		53.0	17.6	5.9	**23.5**	**100**
3		0	29.4	35.3	**35.3**	**100**

전자공학, 산업공학을 전공하는 2학년 학생들이다. 전 학생들은 미분적분학을 두 학기 수강한 학생들이다. 시험 후 정확 한 오류 분석을 위해 학생들과 면담을 실시하였다.

<표 Ⅱ-1>과 <표 Ⅱ-2>는 수시시험 문제와 점수대별 정답률이다. 1번, 2번의 문항은 대부분의 학생들이 정답을 썼고 그에 맞는 증거를 제시했다. 그러나 3번의 정답률은 현저히 떨어지고 만점자가 없었다. 1번의 정답률이 높았던 것은 선형방정식의 해를 구할 때 가우스·조르단 소거법과 같은 특정한 방법으로 제한하지 않았고, 그래서 학생들이 해를 구하는 방법을 선택할 때 학생들의 이해도와 응용력이 높은 각자의 방법을 선택했기 때문이다. 64.7%의 학생이 크래머 공식을, 23.5%의 학생은 가우스·조르단 소거법을, 11.8%의 학생은 기타 방법을 선택했다. 크래머 공식은 행렬식을 이용하여 해를 구하는 방법으로 피봇팅(pivoting)이 필요하지 않은 작은 크기의 행렬에서는 가우스 소거법보다 훨씬 효율적이고 쉽게 이해할 수 있기 때문에 많은 학생들이 선택하였다. 또한 가우스·조르단 소거법을 이용한 학생을 100%로 표시했을 때 만점비율은 75%로 크래머 공식의 54.5%에 비해 정답률이 높았는데 이것은 가우스·조르단 소거법에 대한 이해도와 응용력이 높은 학생들만 이 방법을 선택했기 때문이다. 기타 11.8%의 학생은 크래머 공식과 가우스·조르단 소거법의 문제 해결 능력이 부족하여 본인들의 이해도가 높은 가감법과 대입법을 통해서 해를 구하였다. 이것은 학생들과의 면담을 통해서 확인할 수 있었다. 다음은 가감법과 대입법을 이용하여 문제를 푼 한 학생의 풀이 과정이다.

$$x_1 = -2x_3 \qquad \begin{aligned} -4x_3+4x_2+6x_3 &= 2 \\ 4x_2+2x_3 &= 2 \\ 2x_2+x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x_3+3x_2-x_3 &= -5 \\ 3x_2-5x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} & 10x_2+5x_3 = 5 \\ + & 3x_2-5x_3 = -5 \\ \hline & 13x_2 \quad = 0 \end{array}$$

$$\therefore \quad x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_1 = -2$$

이 학생은 문제에서 해를 구할 때 특정한 방법을 제시하지 않았기 때문에 자신에 제일 경험이 많은 방법으로 문제를 해결했다고 하였다

2번은 평균 이상의 정답률이 과반수 이상을 차지한 반면 0점도 17.6% ~ 23.5%이 었다는 것은 주목할 필요가 있다. 2-(1)은 계수행렬 A에 대해 기본행연산을 통하여 LU를 구하고 2-(2)는 이 LU를 이용하여 후방대입법과 전방대입법을 사용해서 선형방정식의 해를 구하는 것이다. 따라서 2번을 풀기 위해서는 기본행연산에 대한 이해도가 있어야 한다. 그러나 2번에서 0점을 받은 학생들은 1번에서 크래머 공식을 이용해서 해를 구했던 학생들로 이 학생들은 기본행연산, 가우스·조르단 소거법의 이해도가 떨어진 것으로 판단된다.

3번은 과반수 이상이 평균이하의 정답률을 보였다. 3번을 풀기 위해서는 가역행렬 조건, 가우스 소거법, 해와 방정식과의 관계 등 종합적인 이해를 요구하는 문제였다. 따라서 이 중에서 한 가지라도 개념이 부족하면 문제를 해결하기 어려웠던 문제다. 5점 이상을 받은 학생들은 가우스·조르단 소거법을 통해서 기약사다리꼴 행렬까지 변형시키는 것 까지는 성공하였으나 해와 방정식과의 관계에 대한 이해부족으로 정확한 해를 구하지 못했다. 과반수 이상의 4점 이하 학생들은 가역행렬 조건, 가우스 소거법, 해와 방정식과의 관계에 대한 각각의 이해도가 떨어졌고, 따라서 종합적인 이해가 부족했을 것으로 생각된다. 학생들의 답안

지를 분석해보면 학생들은 단순 계산에 의해 문제를 푸는 것은 잘하는 반면 여러 가지 내용을 연관한 종합 문제에 대해서는 상당히 어려움을 느끼고 있다는 것이다. 다음은 어떤 학생의 풀이과정이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3-2b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1-b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2b_1-b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ b_1 = b_2 = b_3 = 0$

∴ 자명해

이 학생은 가우스·조르단 소거법을 통해서 기약사다리꼴 행렬까지 잘 변형하였으나 해를 갖기 위한 조건 $b_3-b_2-b_1=0$을 찾지 못했다. 또한 계수행렬의 계수(rank)는 2로 자유도 1인 해를 갖는다는 사실을 놓쳤기 때문에 해 $x_1=s$, $x_2=b_1+s$, $x_3=b_2-s$ (s : 임의의 실수)를 구할 수 없었다.

<표 Ⅱ-3>은 학기 중간시험의 시험문제 중 선형방정식계의 해법과 관련된 시험문제이고 이 시험의 점수대별 정답률은 <표 Ⅱ-4>와 같다.

크래머 공식을 이용하여 선형방정식의 해를 구하는 1번 문항은 만점 23.5%, 5-9점 76.5%로 대부분의 학생들은 크래머 공식을 잘 이해하고 있었다. 그러나 수시시험 1번 문제에서 크래머 공식을 이용한 학생을 100%로 나타냈을 때 만점이 54.5%이었던 것에 비하면 만점 비율이 떨어진다. 이것은 행렬식에 대한 정확한 개념이 부족하기 때문인 것으로 생각된다. 수시시험 1번 문제에서는 크래머 공식을 적용하여 해를 구하기 위해서는 3×3행렬의 행렬식을 구하면 되었지만 중간시험 1번 문제는 4×4행렬의 행렬식을 구해야만 해를 구할 수 있기 때문이다. 3×3행렬의 행렬식은 Sarrus 방법을 이용하여 행렬식을 구할 수 있고, 또 소행렬식이 2×2인 여인자 전개에 의해서 행렬식을 쉽게 구할 수 있다. 그러나 4×4행렬의 행렬식은 여인자 전개에 의해서만 행렬식을 구할 수 있는데 이때

<표 Ⅱ-3> 중간시험 문제

1. 크래머 공식을 이용하여 다음 선형방정식의 해 y를 구하여라.

$$\begin{cases} x+y-3z+w=1 \\ 2x+y+2w=0 \\ y-6z-w=5 \\ 3x+y+w=1 \end{cases}$$

2. 가우스·조르단 소거법을 이용하여 다음 선형방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x-3y-2z=1 \\ 2x-6y-3z+4w=4 \\ 3x-9y-4z+8w=7 \end{cases}$$

<표 Ⅱ-4> 중간시험 정답률 (단위 : %)

문 항 번 호	10점 (만점)	5-9점	1-4점	0점	계
1(크래머 공식)	**23.5**	76.5	0	0	100
2(가우스·조르단 소거법)	17.6	58.9	23.5	0	100

3×3인 소행렬식을 3번 계산해야 한다. 학생들의 답안 분석을 통해 이를 확인 할 수 있었다. 즉, 5-9점대 학생 중 76.9%의 학생은 4×4행렬의 행렬식을 잘못 계산하였고 나머지 23.1%의 학생은 문제에서 제시한 크래머 공식 이외의 방법을 이용하여 감점을 받았다.

가우스·조르단 소거법을 이용하여 선형방정식의 해를 구하는 2번 문항은 만점 17.6%, 5-9점 58.8%, 1-4점 23.5%이다. 수시시험 전 가우스·조르단 소거법에 대한 이해도가 떨어졌던 학생들은 수시시험 이후에 개념을 정확하게 잡으려고 노력하여 중간시험에서는 이해도가 향상되었다. 그러나 1-4점이 23.5%인 것은 아직도 일부 학생들은 정확한 개념 정립과 연습이 필요하다는 것이다. 또한 소수 학생은 가우스·조르단 소거법과 가우스 소거법에 대한 개념을 혼동하고 있었다.

앞에서 살펴본 것과 같이 선형방정식계를 학습할 때 나타나는 학습장애의 발생 원인은 여러 가지가 있겠지만 원인을 다음 네가지로 정리해 볼 수 있다.

첫째, 개념의 상호의존성 때문이다. 수학은 구조적인 특징을 가지고 있기 때문에 한 개념을 인지하지 못했거나 잘못된 개념을 가지고 있으면 그것에서 파생되는 모든 수학적 명제들의 이해는 불가능하다. 예를 들어 크래머 공식을 이용하여 해를 구하기 위해서는 행렬식의 정의와 구하는 방법들을 정확하게 이해하고 있어야만 행렬식을 구할 수 있다. 또한 가우스·조르단 소거법은 선형방정식의 행렬 표현, 기약 사다리꼴 행렬, 사다리꼴 행렬, 기본행연산을 정확하게 이해하고 있어야만 한다. 중간시험 1번 문항은 크래머 공식을 이용하여 해를 구하는 것이었다. 그러나 5-9점대 학생의 76.5%가 4×4행렬의 행렬식을 잘못 계산하여 정확한 해를 구할 수 없었다. 또 2번 문항은 가우스·조르단 소거법을 이용하여 해를 구하는 문제였다. 그러나 82.4%의 학생들이 기본행연산을 이용하여 얻는 기약 사다리꼴 행렬을 정확하게 구하지 못해 해를 구할 수 없었다. 이와 같이 학생들은 어느 한 부분에서 개념 학습이 이루어지지 않으면 그 뒤에 진행되어야 할 부분에서 학습장애를 일으키고 문제풀이에서 오류를 범하는 결과를 초래할 수 있다.

둘째, 선형대수에서는 학생들이 인지적 유연성을 갖기 어렵기 때문이다. 기약 사다리꼴 행렬과 사다리꼴 행렬, 가우스 소거법과 가우스·조르단 소거법 등 하나의 표현에서 다른 표현으로 바꿀 때 혼돈을 일으키지 않고 바꿀 수 있는 능력을 "인지적 유연성"이라 한다. 중간시험 2번 문항의 답안 중 일부는 가우스·조르단 소거법과 가우스 소거법에 대한 개념을 혼동하고 있었다. 이와 같이 선형대수는 비슷하면서도 다른 뜻을 가지는 혼돈하기 쉬운 용어들과 같은 대상을 다른 관점에서 바라볼 때 달라지는 표현 등이 많아 학생들이 인지적 유연성을 갖기 어렵게 한다.

셋째, 대학 교육과정에서의 선형대수 학습은 고등학교 교육과정에 비해 많은 추상적인 개념을 학습하기 때문이다. 현행 고등학교 수학 교육과정에서의 선형대수는 직교좌표, 벡터 등의 해석기하학적인 내용과 행렬의 크기가 2×2 행렬을 대상으로 하는 선형방정식계의 풀이법 등 일반 대수적인 내용을 다루고 있다(박규홍, 임성근, 양지청, 김수영, 남기수, 양경식, 2004). 그러나 대학 교육과정에서의 선형대수는 선형방정식계를 표현하는 행렬이 $m \times n$행렬로 확장되어 큰 크기의 행렬을 다룰 수 있어야 한다. 또한 선형방정식계의 해를 구하기 위해서는 고등학교 교육과정에서는 2×2 행렬의 역행렬을 공식으로 구하면 되었지만 대학 교육과정에서는 큰 크기의 역행렬을 구하기 위한 행렬식의

정의와 구하는 방법, 수반행렬, 역행렬의 정의와 정리 등 많은 이론을 학습해야 한다. 그리고 고등학교 교육과정에는 없는 가우스·조르단 소거법을 사용하여 선형방정식계의 해를 구한다. 이외에도 선형변환, 벡터공간의 선형구조 등 많은 추상적 개념을 학습하게 된다. 따라서 학생들은 지금까지 경험하지 못했던 많은 추상적인 학습내용으로 학습장애가 유발된다.

넷째, 우리나라의 고등학교 수학 교육이 입시 위주로 운영되어 학생들이 수학에 대한 흥미도가 떨어지는 것도 생각해 볼 수 있다. 이 원인은 선형방정식계의 학습장애 발생 원인과 큰 관계가 없는 것으로 보이지만 근본적인 연관이 있다. 현재와 같이 입시를 위해 강의 중심적이고, 수능 문제의 반복적인 풀이 중심인 고등학교에서의 수학 교육은 문제에 대한 이해와 해결방법을 학생 스스로 찾기 보다는 요령을 통해 문제를 풀어 점수만 높이게 되는데, 이것은 수학에 대한 흥미도를 떨어뜨려 궁극적으로는 수학이 어렵고 지루해서 포기하는 과목으로 전락시킨다. 따라서 이러한 습성에 익숙한 학생들은 대학에서도 선형대수를 포함한 수학과목에 대한 흥미도가 떨어질 수 밖에 없고 나아가서는 학습장애를 유발시킨다.

지금까지 살펴본 선형방정식계의 학습장애 발생 원인은 선형방정식계의 학습시에만 발생하는 장애가 아니고 선형대수 전체에서 발생하는 학습장애의 원인이기도 하다.

Ⅳ. 선형대수에서의 효과적인 교수법

앞에서 살펴본 선형대수의 학습장애 요인들은 학생들이 개념을 아예 인지하지 못하거나 자신들이 이미 갖고 있었던 지식과 함께 오개념을 갖게 되고 연이어 학습되어야 할 부분에서 학습장애를 유발시킨다. 개념의 상호의존성, 인지적 유연성 및 갑자기 심화된 추상개념으로 발생하는 학습장애를 극복하기 위해서는 용어를 명확히 정의하고, 원리와 정의 뒤에 많은 예를 제시하여 학생들이 개념을 쉽게 이해하도록 지도해야 한다. 특히 선형방정식계는 자연스럽게 행렬을 도입하여 행렬의 연산과 성질 등을 소개한 후 행렬의 중요한 성질을 판별하는 방법으로서 행렬식을 소개하는 것이 바람직하다. 여기서는 주로 수식의 계산이 주를 이루므로 비교적 이해가 쉬운 부분이지만 수식계산의 기초가 부족한 학생이나 수학적 기호에 둔감한 학생은 예제와 연습문제 등을 통해서 충분히 지도해야 한다. 사실 학생들이 수학적 계산이나 기호에 약한 것은 학생 개인의 역량 문제이기도 하지만 객관식 위주의 입시 문제의 영향도 있다. 객관식 문제에 익숙한 학생들은 주관식 문제의 답안을 작성할 때 서툴 수 밖에 없고 심지어는 해답만 제시한 경우도 있다. 따라서 학기초에 주관식 문제 답안은 논리적으로 전개해서 작성하고 이를 통해 수학 계산과 기호에 익숙해지도록 유도해야 한다.

선형대수에 대한 학생들의 흥미도를 높이기 위해서는 교수 중심의 강의가 아닌 학생들 스스로 생각하고 사고하고 배우는 형태로 전환해야 한다. Hannula(2002), McNair(2000)는 교수 중심의 일방적인 강의 교육은 학생들의 과목에 대한 흥미를 잃게 하는 주요 원인으로 학생들의 논리적인 사고력, 분석력, 평가력을 저하시켜 학습장애를 일으킨다고 하였다. 또한 학생들의 흥미도를 높이는 다른 방법은 강의 시 제한적이기는 하지만 테크놀리지를 이용해야 한다. The National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 1989, 1991, 2000)은 학생들의 수업 흥미도 증진을 위해 테크놀리지를 이용한 강의를 강조하였는데, 지난 15년 동안 NCTM

Standards에 발표된 수업 흥미도 증진을 위한 논문 118편 중 51편이 테크놀리지를 이용한 강의가 학생들의 흥미도를 높여 학업성취도가 향상된 것으로 연구되었다. 1997년 발표된 미 대통령 과학과 기술위원회에서도 각종 테크놀리지를 이용한 강의는 학생들의 실력 향상은 물론 학생들에게 수학을 공부하도록 바른 동기를 부여하여 흥미도를 크게 향상시킬 수 있다고 하였다(김택희, 2010). 또한 기하학적인 의미를 찾는 등의 과정은 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있다. 이때 제한적이기는 하지만 Maple, Matlab, Mathematica 등의 프로그램을 이용하여 지도하는 것도 학생들의 효과적인 이해에 도움이 될 것이다.

최근 20년동안 선형대수 학습장애를 극복하는 교수법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 특히 Harel(2000)은 피아제(Piaget) 발달에 관한 심리학적 이론에 따른 선형대수에서 학습장애를 극복할 수 있는 효과적인 교수법을 제시하였다. 구체성의 원리(Concreteness Principle), 필요성의 원리(Necessity Principle), 일반화 가능성의 원리(Generalisability Principle)이다. 구체성의 원리는 아직 구체적인 개념이 없는 학생들에게 일반적인 개념을 갖게 하려면 학생들의 관점에서 개념적인 실체가 있어야 하고 이와 다른 정서적인 과정을 겪는다면 추상화는 제대로 이루어지지 않는다는 것이다. 필요성의 원리는 교수가 문제를 풀어주고 학생으로 하여금 이것을 재생하도록 한다면, 학생들은 교수의 풀이를 재생하는 능력은 발달하겠지만 어떻게 문제를 푸는지는 배우지 못하게 된다는 것이다. 일반화 가능성의 원리는 교수법이 구체성의 원리를 만족시키는 구체적인 대상과 관련될 때는 그 대상 내에서 일반화의 가능성이 있어야 하고 학생들로 하여금 일반화할 수 있도록 지도하여야 한다는 것이다.

다음은 앞에서 제시한 학습장애 극복을 위한 효과적인 교수법을 적용하여 가우스 · 조르단 (Gauss · Jordan) 소거법을 설명한 것이다.

(문제) 다음 선형방정식의 해를 구하시오

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 2 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$$

step 1) 학생들은 이미 고등학교 교육과정에서 학습한 행렬과 선형방정식계에 대해 선개념을 갖고 있기 때문에 가우스-조르단 소거법을 설명하기 위해서 필요한 선형방정식계, 계수행렬, 확대행렬, 기약사다리꼴 행렬(사다리꼴 행렬)과 기본행연산을 정의한다. 이때 교수는 용어를 명확히 정의하고, 원리와 정의 뒤에 많은 예를 제시하여 학생들이 개념을 이해하도록 지도한다.

step 2) 구체성의 원리(Concreteness Principle)를 적용하여 설명하기 : 현행 일반 고등학교 교육과정에서는 행렬을 2×2 행렬로 제한하여 교육을 시키고 있다. 따라서 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 미지수 2개, 방정식 2개인 예로 설명하되 가우스 · 조르단(Gauss · Jordan) 소거법과 확대행렬을 동시에 설명하여 학생들의 이해를 돕는다.

(풀이)

가우스 · 조르단 소거법	확대행렬
$\begin{cases} 2x + \ \ y = 2 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$
첫째 식에 실수 $\frac{1}{2}$을 곱한다.	1행에 실수 $\frac{1}{2}$곱한다.
$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

첫째 식에 실수 -3을 곱하여 둘째 식에 더한다.

1행에 실수 -3을 곱하여 2행에 더한다.

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}y=1 \\ \quad\ \dfrac{5}{2}y=-5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 \end{bmatrix}$$

둘째 식에 실수 $\frac{2}{5}$를 곱한다.

2행에 실수 $\frac{2}{5}$를 곱한다.

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}y=1 \\ \qquad\ y=-2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

둘째 식에 실수 $-\frac{1}{2}$을 곱하여 첫째 식에 더한다.

2행에 실수 $-\frac{1}{2}$을 곱하여 1행에 더한다.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

따라서, 방정식의 해는 $x=2,\ y=-2$이다. 특히 마지막 부분의 확대행렬은 선형방정식의 해를 쉽게 구할 수 있음을 보여준다.

step 3) 학생들의 인지적 장애를 극복하기 위해 처음 접하는 정의와 내용의 이해를 위해 사다리꼴 행렬, 기약 사다리꼴과 가우스 · 조르단 소거법을 다시 설명한다

(설명) 위에서 연산을 유한번 시행하여 얻은 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

을 사다리꼴 행렬(echelon form matrix),

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

을 기약 사다리꼴(reduced echelon form matrix) 행렬이라 한다. 여기서 가우스(Gauss) 소거법은 주어진 선형방정식을 기본행연산을 유한번 시행하여 동치인 사다리꼴로 가우스 · 조르단(Gauss · Jordan) 소거법은 기약사다리꼴로 변형하는 과정을 설명하여 준다.

step 4) 필요성의 원리(Necessity Principle) : 전단계에서 2×2 행렬을 이용하여 가우스 · 조르단 소거법을 설명하고 나면 교수는 학생들이 문제를 푸는 방법을 스스로 배울수 있도록 지도해야 한다. 따라서 교수는 방정식 3개, 미지수 3개인 선형방정식을 제시하여 학생들이 스스로 문제를 풀게 한다. 이 과정을 통해서 학생들은 이해가 부족한 부분을 스스로 채울수 있고 교수는 학생들이 부족한 부분을 채울수 있도록 지도해야 한다.

step 5) 일반화 가능성의 원리(Generalizability Principle) : 방정식 4개, 미지수 4개인 선형방정식을 교수와 학생들이 함께 풀면서 학생들로 하여금 방정식 n개, 미지수 n개인 문제에 대해 일반화할 수 있도록 지도하여야 한다.

step 6) 선형방정식

$$\begin{cases} 2x+\ \ y=2 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$$

는 직선 $2x+y=2$와 $3x+4y=-2$의 교점을 찾는 문제로 재해석하고 기하학적인 의미를 찾는 등의 과정을 통해 학생들의 흥미를 유발시킨다.

step 7) 선형방정식의 해를 구할 때 제한적이기는 하지만 Maple, Matlab, Mathematica 등에서 역행렬, 가우스 소거법과 *LU* 분해를 이용하여 해를 구하는 것을 보여주면 학생들의 흥미 유발과 내용 이해에 도움

이 될 것이다. 만약 선형방정식에서 A는 계수행렬, X는 미지수 행렬, B는 상수행렬이면 선형방정식은 $AX=B$로 표현될 수 있다. 이때 Matlab에서는 내장함수가 있어 A의 역행렬이 존재한다면, 역행렬은 inv(A), LU 분해는 [L, U]=lu(A)로 표현할 수 있다. 역행렬을 이용한 해는 $X=\mathrm{inv}(A)*B$로 구할 수 있고, LU 분해를 이용한 해는 $Y=L\backslash B$, $X=U\backslash Y$로 구할 수 있다. 만약 수강 학생들이 컴퓨터 프로그램 언어(C, fotran 등)를 이해하고 사용할 수 있다면, 선형방정식의 해를 구할 때 역행렬, 가우스 소거법과 LU 분해를 이용하여 해를 구하는 알고리즘과 코드를 직접 짜게 하여 내용을 더 효과적으로 이해시킬 수 있다. 즉, 학생 자신이 짠 알고리즘과 코드를 통해 정확한 답이 나오지 않으면 알고리즘과 코드를 수정하게 되고 그 과정을 통해서 역행렬, 가우스 소거법과 LU 분해를 정확하게 이해하게 될 것이다.

Ⅴ. 결론

선형대수가 다양한 분야에서 폭넓은 유용성을 갖게 되는 것은 수(문자)식을 일차식에 국한하여 살펴보는 것으로 기하학적으로는 직선에 해당되는 개념이기 때문이다. 즉, 수학적 모델의 기초적인 출발점이 일차식이기 때문에 현실세계의 복잡한 현상들도 대부분 미시적으로 해부하거나 또는 거시적으로 단순화함으로써 모델을 선형화할 수 있기 때문이다. 그러나 선형대수는 추상적인 개념을 대상으로 이론을 전개하기 때문에 처음 공부하는 학생들은 그 개념들을 정확하게 이해하고 응용하는데 많은 학습장애 요인들이 있다. 그래서 우리는 선형대수 학습장애 요인과 이 학습장애를 극복할 수 있는 교수법을 살펴보았다.

향후 과제는 우리의 연구가 의미 있는 연구가 되기 위해서는 본 논문에서 제시한 선형대수에서의 효과적인 교수법을 제시하는 것으로 끝내는 것이 아니라, 지속적인 연구와 적용을 통해 제시한 교수법의 실질적인 효과를 파악하고, 아울러 본 연구에서 제시하지 못한 더 많은 학습장애 요인과 더 효과적인 교수법을 찾는 것이다.

참고문헌

김택희(2010). 수학 흥미도 증진을 위한 방안 및 고찰. **한국수학교육학회 전국수학교육연구대회 프로시딩 제44회**, 21-28

박규홍, 임성근, 양지청, 김수영, 남기수, 양경식 (2004). **고등학교 수학 Ⅰ,Ⅱ**. 서울: (주) 교학사

신경희(2005). 선형대수에서의 학생들의 오개념. **한국수학교육학회지 E 수학교육논문집**, 19(2), 379-388

S.G. Lee and O.K. Kang(1997). 행렬이론의 과거와 현재. **대한수학회 뉴스 레터 V**. 55, 20-27

최영환(2004). 선형대수의 가르침에 고려하여야 할 사항에 관한 연구. **한국 수학교육학회지 E 수학교육논문집, 18**(2), 93-108

Hannula, M.S.(2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expections and values. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 25-46

Harel, G.(2000). Principle of Learning and Teaching Mathematics. with Particular Reference to the Learning and Teaching of Linear

Algebra: Old and New Observations, In: J.-L. Dorier(Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, 177-189. Dordrecht: Kluwer. MATH-DI 2001a.00360

Lay, David C.(2003). *Linear Algebra and its Application*. 3rd. ed. Boston, MA : Addison-wesily

National Council of Teachers of Mathematics.(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Auther. Retrived August 28, 2007. http://standards, nctm.org/document/chapter7/comm.htm

NcNair, R.E.(2000). Life outside the mathematics classroom: Implication for mathematics teaching reform. *Urban Education*, 34(5), 550-570

United States Presidential Commission. 1997 report: A Nation at Risk. http://www.ed.gov/pubs/NatAtRisk/risk.html

Research on Teaching of Linear Algebra Focused on the Solution in the System of Linear Equations

Kang, Sun Bu (Korea Air Force Academy)
Lee, Yong Kyun (Korea Air Force Academy)
Cho, Wan Young (Chungbuk National University)

Linear algebra is not only applied comprehensively in the branches of mathematics such as algebra, analytics, and geometry but also utilized for finding solutions in various fields such as aeronautical engineering, electronics, biology, geology, mechanics and etc. Therefore, linear algebra should be easy and comfortable for not only mathematics majors but also for general students as well. However, most find it difficult to learn linear algebra. Why is it so? It is because many studying linear algebra fail to achieve a correct understanding or attain erroneous concepts through misleading knowledge they already have. Such cases cause learning disability and mistakes. This research suggests more effective method of teaching by analyzing difficulty and errors made in learning system of linear equations.

***key words** : Teaching Method in Linear Algebra(선형대수 교수법), System of Linear Equations(선형방정식계), Gauss-Jordan Elimination(가우스 · 조르단 소거법)

논문접수 : 2010. 8. 12
논문수정 : 2010. 9. 2
심사완료 : 2010. 9. 11