대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 3, 305-322. Aug 2010

# 평면도형의 넓이 학습에서 나타나는 인식론적 장애

박 은 률* · 백 석 윤**

평면도형의 넓이 학습에서 나타나는 인식론적 장애의 유형은 크게 측정의 속성과 관련된 장애, 단위정사각형 개념과 관련된 장애로 나눌 수 있다. 먼저, 측정의 속성과 관련된 장애의 원인은 길이와 넓이 개념 사이의 혼동, 도형 영역과 측정 영역에서 정의하는 방법상의 혼동 때문이며; 둘째, 단위정사각형 개념과 관련된 장애의 원인은 학생들에게 단위정사각형이 넓이의 기본단위로 인식이 잘 안되기 때문이며, 2차원적 평면의 개념이 불완전하게 정착했기 때문이다.

이에 따라, 넓이에 대한 측정의 속성과 관련된 장애 현상의 교정적 지도 방안은 두 속성간의 관계를 살펴볼 수 있는 활동을 제시하고, 측정의 개념으로 넓이를 정의할 필요가 있으며, '정렬(array)'의 개념으로 넓이공식을 유도하고, 통합적으로 공식을 적용하도록 지도할 필요가 있다. 한편, 단위정사각형 개념과 관련된 장애 현상의 지도방안은 각 단계를 충분히 활동할 수 있도록 넓이를 구하고자하는 도형의 소재 및 형태를 다양하게 제시할 필요가 있으며, 넓이에 대한 연속량적 개념을 인식하도록 교수학적 방안을 구안해야 한다.

## I. 서론

초등수학의 측정 영역의 내용은 실생활의 경험을 바탕으로 이루어지는 조작적 사고 활동이 중심이 된다. 즉, 측정 영역은 학습자의 실생활과 밀접한 관련성을 갖고 있으며, 물체의 길이, 넓이, 무게, 부피 등과 같이 실생활 속의 다양한 대상과 상황의 속성에 수치를 부여하는 활동이 측정 영역의 주된 내용이 된다(NCTM, 2007; Lehrer, 2003). 초등수학에서의 측정이란 조작적 활동의 대상은 '연속량'의 속성을 지닌다. 이러한 실생활 속의 연속량은 그 크기를 수학적으로 즉시 계산하거나 비교하기가 어렵다.

초등수학의 측정 영역에 포함되어 있는 양적 요소를 살펴보면, '길이', '시각', '넓이', '무게', '부피', '밀도' 등이 있다. 여기에서 '길이', '시각', '무게', '온도'와 같은 양적 요소들은 '자', '시계', '저울', '온도계'와 같은 직접적인 측정 도구가 있다. 그러나 '넓이', '부피'와 같은 경우는 직접적인 측정도구가 없다. 1㎠의 정사각형, 1㎤의 정육면체라는 '단위넓이', '단위부피'의 개념이 있기는 하지만 앞서 언급한 측정도구들과 같이 실생활에 직접 사용하지 못하며, 또한 측정 대상의 다양한 형태에 따라 단위량의 개념을 활용하는 데는 어려움이 따른다.

이러한 이유로 학생들은 측정이란 조작적 활동이 내포하고 있는 측정 대상이 갖는 양적 개념에 대한 진정한 이해보다는 측정치의 산출이라는 단순 계산에 치중하기 쉽다. 다시 말해

* 서울시흥초등학교, parkey2000@naver.com
** 서울교육대학교, sypaik@snue.ac.kr

측정 대상이 갖는 양적 개념에 대한 올바른 수학적 이해보다 간편한 양의 크기 계산 공식에 관심을 집중하게 된다는 것이다. 바로 이점이 넓이나 부피 개념에 대한 올바른 인식을 방해하거나 불완전케 하는 이유가 된다.

이상 논의한 초등수학의 측정 영역의 학습에서 보이는 특정 양의 개념에 대한 진정한 이해의 결손, 직접적인 측정도구가 없는 양의 크기 계산의 난점, 특정 양의 크기 계산을 위한 무분별한 공식의 적용 등으로 발생되는 해당 양에 대한 진정한 이해를 방해하는 장애요소를 최소화시키기 위해 학생들이 극복해야 할 인식론적 장애가 무엇인지를 확인하는 것은 매우 중요하다. 따라서 본 연구는 평면도형의 넓이 학습에서 보이는 초등학생들의 인식론적 장애의 유형을 확인하여 그러한 장애가 나타나게 된 원인을 분석하고, 그에 따른 교정적 지도방안을 모색해 보고자 하였다.

## II. 수학교육에서의 인식론적 장애

Bachelard(2002)에 의해 과학철학에 도입된 인식론적 장애는 과학의 발전 과정 중 단절이 보이는 곳에 나타나는 사고에 대한 사고의 저항이라 할 수 있다. 다시 말해 Bachelard (1996)는 과학의 발전 과정을 연속과 충만함의 철학이 아닌 불연속의 철학이며 단절이 나타난다고 하였다. 특히, 단절의 현상을 상식과 과학의 단절, 과학의 역사에서의 단절로 설명하였으며 이러한 단절이 나타나는 곳에는 인식론적 장애가 나타난다고 하였다. Bachelard (2002)의 인식론적 장애에 대한 연구가 다소 심리적인 원인에 치우친 면이 있다. 하지만 경험주의 및 연속주의에 빠져있던 이전의 과학철학을 뛰어넘어 인식론적 장애의 탐구를 통해 좀 더 객관적이며 과학적으로 현실적인 과학의 문제를 해결할 수 있었다. 이로 인해 Bachelard(1994)의 철학은 새로운 과학정신이라고 할 수 있으며 다른 분야에 많은 영향을 미치게 되었다. Bachelard(1994)의 과학철학을 수학교육에 온전히 적용시킨다는 것은 무리가 있지만 많은 연구자들이 수학교육과 관련된 시사점을 Bachelard(2002)의 인식론적 장애 이론에서 차용하고 있음을 볼 수 있다.

인식론적 장애의 이론을 수학교육에 도입한 학자는 Brousseau(1997)이며 그는 교수학적 상황론으로 대표된다. 그는 수학적 개념이 어느 특정 상황에서는 바르게 사용되나, 다른 상황에서는 국소적으로 특수화되며 그 의미가 변형되는 현상을 인식론적 장애라고 보았다. 따라서 특정 내용 지도를 위한 교수학적 상황 설정에 있어서 인식론적 장애를 극복할 수 있도록 해당 인식론적 장애를 면밀히 탐구하여 교수학적 상황을 구성해야 된다고 하였다. Brousseau (1997)는 교수학적 상황과 수학적 개념의 발달 과정이 대응함에 주목하여 인식론적 장애를 극복할 상황 설정을 위해서는 수학적 개념의 역사 발생적 상황에 대한 분석이 이루어져야 함을 강조하였다.

Brousseaus(1997)는 인식론적 장애를 단순히 운이나 실수로 인해 나타나는 것으로 보지 않았다. 즉, 인식론적 장애 현상은 이전의 성공적인 지식의 결과였던 것이 이제 새로운 상황에서는 부적합해진 것이라고 간주하는 방식으로 지식과 관련시켜 설명하고 있다. 이것은 인식론적 장애의 극복을 일종의 지식을 구성하는 것과 유사한 것으로 간주하는 것이며 수학적 개념의 학습지도에 시사하는 바가 크다. 수학적 개념의 역사발생적 상황에 대한 분석을 통해 인식론적 장애에 대한 면밀한 탐구가 이루어지고, 이러한 탐구를 교수학적 상황 설정에 반영함으로써 학습자의 개념학습이 이루어져야 함

을 강조하는 것으로 역사발생적 원리에 의한 수학 학습과 밀접한 관련이 있음을 알 수 있다.

한편, 수학교육자 Sierpinska(1994)는 학생들의 수학에 대한 이해의 어려움을 철학적으로 고찰함에 있어서 Bachelard(2002)의 인식론적 장애 이론을 도입하고 있다. 특히 인식론적 장애 현상을 부정적인 시각이 아니라 긍정적인 의미를 내포하고 있는 것으로 보았고, 인식론적 장애를 극복하는 것이 더 높은 이해의 상태로 나아가는 것임을 확인하였다. 또한 Sierpinska (1994)는 인식론적 장애의 개념이 Skarga(1989)의 카테고리의 개념과 같은 기능을 Brousseau (1997)가 수학교육에 도입하면서부터 시작하고 있다고 보았다. 이러한 카테고리는 연구 분야를 형성하고 다양한 연구 문제를 설명하는 기능을 담당하고 있다. 그러나 주된 기능으로는 사고를 지시하는 것이라고 하면서 이러한 기능을 인식론적 장애가 하고 있다고 보았다. 이렇듯 Sierpinska(1994)는 수학교육에 있어서 이해 및 사고의 기능과 관련된 인식론적 측면에서 인식론적 장애를 탐구하고 있으며 부정적인 의미로 바라보는 것이 아니라 긍정적인 의미로서 살펴보고 있음을 알 수 있다.

앞에서 살펴본 세 연구자들의 이론을 바탕으로 인식론적 장애의 현상이 수학교육에서 유의미하게 사용될 수 있음을 알 수 있다. 인식론적 장애 현상을 단순히 실수와 잘못된 습관이 빚어낸 결과로서 판단하는 것이 아니라, 지식의 구성 활동과 관련하여 인식론적 장애 현상에 접근해야 하며, 부정적인 의미로서 다룰 것이 아니라 인식론적 장애의 극복을 통해 더 높은 이해의 상태로 나갈 수 있는 긍정적인 의미로 생각할 필요가 있다. 이를 위해, 역사발생적 상황에 대한 분석을 통해 인식론적 장애 현상을 탐구하고, 인식론적 장애를 극복할 수 있는 교수학적 상황을 설정해야 할 것이다. 다시 말해, 역사발생적 원리에 의한 인식론적 장애의 탐구와 이를 바탕으로 한 수학 학습 지도가 이루어져야 할 것이다.

# III. 넓이 개념의 분석

## 1. 역사발생적 분석

고대 이집트나 바빌로니아의 토지 분할 및 측량을 위한 기하학의 발생은 실용적인 특성을 나타내었다. 이것은 경험적 지식을 바탕으로 구성된 넓이 개념이며 논리적인 정당성이나 정합적인 체계를 갖추지 못한 실험적 수준의 것이었다. 이러한 실용적 수학이 기원전 7세기부터 그리스로 전파되었다. 즉, 초기의 그리스 수학의 특징은 실용적인 모습을 나타내었다. 하지만 기원전 5세기경, 탈레스에 의해 시작된 논증기하에 힘입어 그리스 수학은 실용적인 특징이 사라지고 엄밀한 정의와 공리, 공준을 중요시하게 되었다. 이러한 그리스 수학의 특징은 알렉산드리아 시대로 접어들면서 유클리드의 <기하학 원론>으로 체계화 되었으며 현재의 수학교육에도 크게 영향을 미치고 있다.

이러한 주류적 그리스 수학과 달리 기원전 2세기경, 비주류적 그리스 수학으로 논증기하가 아닌 '겹쳐보기'와 같은 측정의 방식이 사용되었고, 아르키메데스의 측정의 방식도 볼 수 있었다. 하지만 논증기하로 특징지어지는 주류적 수학은 기하학의 치밀한 논리적 전개의 전형을 넘겨주었지만, 수학적 탐구와 발견의 정신, 그리고 측정의 개념으로서 넓이를 이해하는데 있어서 인식론적 장애로서 작용되었다. 특히 초등수학에서의 넓이 학습은 측정의 개념으로서 인식되어야 한다. 논증이나 대수와 같은 고도의 접근보다 단위넓이를 통한 실제적 측정의

방식으로 인식되어야 하는 것이다. 따라서 유클리드 <기하학 원론>의 영향으로 인해 현재의 초등 수학 교과서 및 넓이 학습이 아직도 논증적이거나 대수적인 방식으로 접근하며, 측정이 넓이 학습에 인식론적 장애로서 작용되는지 확인할 필요가 있다.

## 2. 수학적 분석

### 가. 평면도형의 넓이 개념

평면도형의 넓이란, 단위로 삼은 정사각형을 그 도형의 내부 영역에 빈틈이나 중복됨이 없이 깔았을 때의 측도를 의미한다. 보다 수학적으로는 면적 공리(area axiom)를 써서 면적을 규정하기도 한다(정동권, 2001, pp.6-7).

평면상의 어떤 다각형 P에 대하여 양의 실수 a=a(P)를 대응시키는 함수 a(P)가 존재하여 다음의 성질을 가질 때, a를 다각형 P의 면적 (area of the polygon P)이라 한다.
A1. a(∅)=0, 삼각형 T에 대하여 a(T)>0

<표III-1> Baturo와 Nason의 넓이 측정 기초 지식의 분류(Baturo와 Nason, 1996, p.244)

| | |
|---|---|
| 구체적 지식 | · 덮기로 넓이 측정하는 방법 알기<br>· 임의 단위와 표준단위로 넓이 측정하는 방법 알기<br>· 측정 단위의 계수로 넓이 측정하는 방법 알기<br>· '자르고 붙이기'로 다른 형태를 만들 때 도형의 넓이가 보존된다는 것 알기 |
| 계산적 지식 | · 공식 사용하기 ; 넓이 측정을 위해 크기와 모양에 적절한 단위 사용하기<br>· 넓이 측정 표준 단위 사이의 관계 알고 이해하기 ; 소수 이용, 이해하기 |
| 원리 개념적 지식 | · 측정될 요소 알기<br>· 다양한 도형의 요소 알기, 왜 넓이를 측정하는지 알기<br>· 일정함과 '자르고 붙이기' 변형의 도형의 넓이 보존 알기 ; 넓이는 구체적인 하위 단위로 세분화될 수 있는 연속적 성질<br>· 넓이는 길이의 특성으로부터 기인하고 관계는 정사각형에 기초 ; 간접적으로 넓이를 비교하기 위해 표준단위 사용, 단위 크기와 수는 반비례 ; 몇 넓이들은 정확히 계산될 수 없다.<br>· 공식에 기초한 지식<br>(a) 파이가 무엇이며 그것이 무엇에서 나왔고 어떤 도형과 관계되는지<br>(b) 공식이 어떻게 나왔는지 (c) 다른 공식이 어떻게 연결되는지 |

<표III-2> Lehrer, Jaslow, Curtis의 측정 중심 개념(Lehrer, Jaslow, Curtis, 2003, p.102)

| 아이디어 | | 설 명 |
|---|---|---|
| 단위 개념 | 반복 | 길이의 세분화는 측정을 얻기 위해 바뀐다. |
| | 확인된 단위 | 각 세분화는 확인되어 진다. |
| | 타일링 | 단위들은 공간을 채운다. |
| | 분할 | 단위들은 부분화 되어질 수 있다. |
| | 부가성 | 10단위의 측정이 8과 2의 구성물로서 생각되어질 수 있으므로 등등 측정은 더해진다. |
| 스케일 개념 | 0점 | 어떠한 지점도 스케일 상의 원점 또는 영점으로서 작용할 수 있다. |
| | 정확성 | 물체와 관련하여 단위의 선택은 측정의 관계적인 정확성을 결정한다. 모든 측정은 본래적으로 근사값이다. |

A2. 두 개의 합동인 삼각형 S, T에 대하여, $a(S)=a(T)$

A3. 두 개의 다각형 P, Q에 대하여, $a(P \cup Q)=a(P)+a(Q)-a(P \cap Q)$

A4. 한 변의 길이가 1인 정사각형 S에 대하여 $a(S)=1$.

즉, 선은 넓이가 없고, 모든 삼각형은 양의 넓이를 가지며 두 도형이 합동이면 그 넓이도 같다. 그리고 그 넓이에 대한 가법성이 성립하고, 단위넓이는 1로 규정한다는 의미이다.

### 나. 평면도형의 넓이 측정 개념

측정은 대상이나 활동의 속성에 수치를 부여하는 것이다. 평면도형 넓이의 측정에 있어서 학습해야 할 기초 개념은 학자들마다 다소 차이가 있다. 먼저, Baturo와 Nason(1996)은 넓이 측정 과정에서 학습해야할 기초 지식을 3가지로 분류하여 제시하고 있다. 또한 각 지식별로 추구해야할 구체적인 지식을 열거하고 있다. 구체적인 내용은 다음의 표와 같다.

한 편, Lehrer, Jaslow, Curtis(2003)이 제시하는 측정에서의 중심적 개념들은 다소 차이가 있다. 그 구체적인 내용은 다음의 표와 같다.

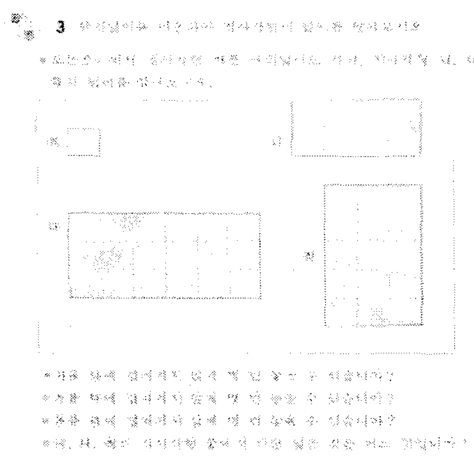
또한, Lehrer(2003)의 개념적 기초는 8가지이다. (1) 단위-속성관계 (2) 반복 (3) 채우기 (4) 단위의 동일성 (5) 표준화 (6) 비 (7) 가법성 (8) 원점. 그리고 Stephan과 Clements (2003)는 넓이 측정의 중요개념으로 분할, 단위 반복, 보존, 배열의 구성을 들고 있다. 끝으로 Nunes, Light, Mason(1993)은 측정의 주요 조작으로 보존, 반복, 세분화를 들고 있다.

## 3. 교수학적 분석

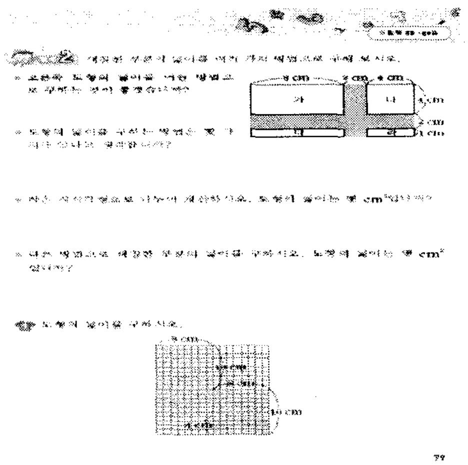
### 가. 넓이 개념과 관련된 우리나라 교과서의 특징

우리나라 교과서의 넓이 개념과 관련된 특징은 먼저, 넓이 측정의 지도 절차 및 과정을 강조한다. 즉, 직접 비교, 간접 비교(임의, 보편), 단위에 의한 측정, 공식화로 이어지는 측정의 절차를 정확하게 밟는다. 둘째, 넓이 공식의 활용 및 공식을 통한 문제 해결을 강조한다. 즉, 공식을 이용한 다양한 넓이 상황(부정형의 상황 포함)을 해결하도록 하고 있다.

측정의 절차 및 과정을 정확히 밟아나감으로써



[그림 III-1] 7차 교과서의 표준 단위에 활용(교육과학기술부, 2010, p.79)



[그림 III-2] 2007 개정 교과서의 공식의 의한 비교(교육인적자원부, 2009, p.90)

측정 학습의 유기적 연결이 자연스러우며 학생이 측정으로서 넓이의 개념을 이해하는데 도움이 된다. 하지만, 우리나라 교과서는 넓이 공식의 활용과 적용에 강조를 둠으로써, 측정 학습에 다소 뒷걸음질 하게 한다. 수학적으로 형식화하여 일반화된 공식을 인식하고 적용하여 문제를 해결하는 능력도 길러야 하겠지만, 본질적으로 넓이의 개념을 이해하기 위해서는 측정의 개념을 정확하게 인식하는 게 중요하다. 넓이 공식이 측정의 개념보다 더 지배적으로 학생들에게 인식된다면, 학생들은 일반화의 장애를 쉽게 범할 수 있다. 따라서 일반화된 공식의 무분별한 적용은 이러한 측정으로서의 넓이 개념에 인식론적 장애가 될 수 있다.

### 나. 교과서 분석으로 살펴본 넓이 개념의 인식론적 장애

우리나라의 교과서는 측정의 절차를 정확한 단계로 학습하도록 제시되어 있다. 즉, 직접비교, 간접비교(임의, 보편), 단위에 의한 측정, 공식화로 이어지는 측정의 절차를 정확하게 밟아 나감으로써 측정으로서의 넓이 개념을 충실하게 학습하도록 하였다. 하지만, 공식의 활용 및 공식을 이용한 문제해결을 강조하여 공식의 무분별한 적용을 비롯한 인식론적 장애를 발생할 위험을 초래하였다. 이러한 넓이 개념의 인식론적 장애를 극복하고 좋은 이해를 습득하기 위한 교수학적 시사점을 외국교과서에서 찾을 수 있었다.

먼저, 다양한 측정활동을 바탕으로 넓이 개념을 측정으로 정의해야 한다. 넓이 개념의 정의가 없기 때문에 생기는 여러 인식론적 장애를 최소화하고 실제적이며 다양한 측정활동을 바탕으로 넓이 개념을 습득하도록 해야 한다.

둘째, 공식의 활용 및 공식을 이용한 문제해결보다 공식의 통합을 강조해야 한다. 측정의 개념으로 습득된 넓이 개념을 바탕으로 부정형의 넓이 문제 상황을 해결하기 위해 공식보다는 측정의 방법을 통해 일관성 있게 해결할 수 있어야 하겠다. 또한 공식의 암기보다는 넓이 해결의 한 전략으로 공식을 사용할 수 있도록 제시해야 한다. 이런 의미에서 여러 도형의 공식의 통합을 강조해야 한다.

셋째, 단위넓이의 덮기와 array의 개념을 바탕으로 넓이 공식을 도입해야 한다. 길이의 곱을 통해 넓이를 공식화하지만 학생들은 왜 길이의 곱이 넓이가 되는지 알지 못한다. 단위넓이의 array를 바탕으로 단위넓이의 수가 도형의 길이와 관련됨을 인식할 때, 공식과 관련된 인식론적 장애를 최소화할 수 있다.

마지막으로, 두 속성간의 관계를 확인하는 활동을 제시해야 한다. 둘레와 넓이와 같이 학생들이 쉽게 혼동하는 속성들을 활동을 통해 학생들이 구별할 수 있도록 함으로써 속성과 관련된 인식론적 장애를 극복할 수 있도록 해야 한다.

## IV. 연구 방법

### 1. 연구 대상

본 연구의 초점이 평면도형의 넓이를 학습한 학생들이 나타내는 인식론적 장애를 분석하는 것이기 때문에 5학년과 6학년을 대상으로 삼았다. 이에 따라 서울시에 소재한 S초등학교 5학년 57명과 6학년 61명, 총 118명을 대상으로 연구를 진행하였다.

### 2. 연구 설계

#### 가. 측정 기본 개념 추출 및 검사 도구 제작

초등학생들이 평면도형의 넓이 학습에서 나타나는 인식론적 장애의 유형을 분석하기 위해 지필평가를 실시하였다. 이를 위해, 초등학생들이 평면도형의 넓이를 측정의 개념으로 학습하는 과정에서 반드시 학생들이 습득해야 하는 개념을 확인하였다. 이를 위해 이미 Ⅳ장에서 확인한 선행연구를 토대로 하여 넓이 측정의 기본 개념으로 단위-속성 관계, 반복(세분화)과 타일링, 표준화를 추출하였다. 이렇게 추출된 개념을 토대로 관련된 선행 연구의 문항을 참고하여 검사 도구를 제작하였다. 구체적인 내용은 아래의 표와 같다.

나. 자료 수집 및 분석

두 차례의 예비 검사를 거쳐 검증된 검사 도구를 바탕으로 2009년 10월에 본 검사를 실시하였다. 눈금자를 사용하지 못하도록 눈금 없는 자를 나눠주었으며, 단위 정사각형을 나타내는 1㎠ 종이조각을 개별 학생에게 제공하였다.

본 검사를 보완하고 좀 더 명확히 인식론적 장애를 파악하며 그 원인을 확인하기 위해 면담을 실시하였다. 면담은 본 검사의 결과를 바탕으로 각 문항의 응답 유형을 간추려, 유의한 반응들을 나타내었던 학생들 중 대표학생 2-3명씩을 선정하여 실시하였다.

본 검사 및 면담 내용을 토대로 수집된 자료는 문항별로 분석하였다. 구체적으로 본 검사의 결과를 바탕으로 인식론적 장애의 유형을 분류하였고, 면담 내용을 바탕으로 인식론적 장애의 원인을 분석하였다. 그리고 문헌 연구를 병행하여 인식론적 장애의 원인에 따른 지도 방안을 고찰하였다.

# Ⅴ. 자료 분석

## 1. 문항별 분석

### 가. 1번 문항

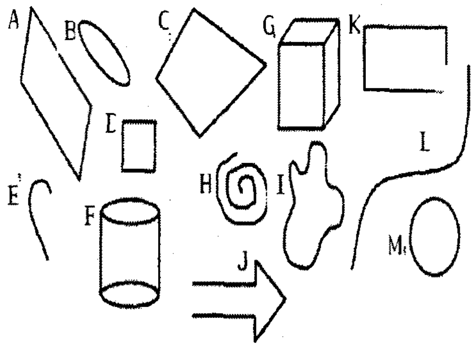
1번 문항은 아래의 그림에서 넓이를 가지는 도형에 표시(동그라미)하며 그렇게 선택한 이유를 적는 문항이다.

<표 V-1> 1번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 기호 | 선택한 이유 | 5학년 | | | 6학년 | | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | 계 | C | D | 계 | |
| A,B,C,D, K,L,M | 선분 연결 | 5 | 6 | 11 | 18 | 11 | 29 | 40 |
| G,F | 입체 도형 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 6 |
| A,G,D,F | 공식 | 11 | 1 | 12 | 3 | 11 | 14 | 26 |
| A,C,D,K | 다각형 | 2 | 13 | 15 | 4 | 1 | 5 | 20 |
| 기 타 | | 11 | 8 | 19 | 4 | 3 | 7 | 26 |
| 합 계 | | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |

<표 Ⅵ-1> 검사 도구의 문항별 측정 개념 요소 및 출처

| 추출된 넓이측정의 개념요소 | 문 항 | 출 처 |
|---|---|---|
| 단위-속성의 관계 | Task 1, 2 | Baturo와 Nason(1996)<br>Fischbein(1987), 이대현(2002)재인용 |
| 반복(세분화)과 타일링 | Task 5, 6 | Zacharos(2006) |
| 표준화 | Task 3, 4 | Kamii와 Kysh(2006) |
| 3가지 요소 통합 | Task 7 | Baturo와 Nason(1996) 수정 및 자체 제작 |




[그림 V-1] 1번 문항의 그림

먼저, 학생들은 '넓이'를 인식할 때, '선분'의 연결과 닫힘을 통해 인식하고 있었다. 전체의 34%에 해당하는 수치로 제일 높았다. 또한 학생들은 공식에 의존하고 있었다. 다시 말해서, 넓이 공식이 가능한 도형을 선택하거나, 다각형을 선택한 것으로 이 두 유형을 합치면 '선분의 연결'보다 더 높은 수치를 나타내었다. 이를 통해 볼 때, 학생들은 '넓이'를 '선분'이나 일반화된 '공식'을 통해 인식하고 있음을 알 수 있었다.

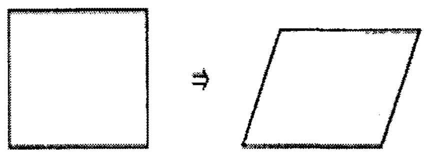
나. 2번 문항

2번 문항은 아래의 그림과 같이 빨대 여러 개를 이용하여 직사각형을 만들고 나서 옆으로 밀었을 경우 두 도형의 넓이가 같은지를 비교하는 문항으로 왜 넓이가 같고 다른지 그 이유와 함께 적도록 하였다. 이 문항은 학생들이 도형의 둘레가 같을 때, 넓이의 변화를 제대로 파악하고 있는 지를 확인하는 것이다. 즉, 직사각형의 둘레가 평행사변형의 둘레와 같지만, 높이의 차이로 넓이가 달라지는 것을 이해하는지 확인하는 문항이다.

많은 학생들은 '비스듬히 밀었다'라는 언급에 초점을 두었다. 즉, 언어적 장애, 다시 말해, 유추의 실패로 오답을 한 경우가 제일 많았다.

<표 V-2> 2번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 구분 | 이 유 | 5학년 A | 5학년 B | 5학년 계 | 6학년 C | 6학년 D | 6학년 계 | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 같다 | 비스듬히 밈 | 11 | 11 | 22 | 16 | 14 | 30 | 52 |
| | 길이가 같다 | 10 | 7 | 17 | 8 | 3 | 11 | 28 |
| | 측정후공식 | 2 | 1 | 3 | 0 | 2 | 2 | 5 |
| | 등적분할 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 6 |
| | 기타 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | 계 | 23 | 21 | 44 | 27 | 21 | 48 | 92 |
| 같지 않다 | 높이차이 | 2 | 2 | 4 | 0 | 2 | 2 | 6 |
| | 모양이 달라져서 | 4 | 5 | 9 | 3 | 7 | 10 | 19 |
| | 기타 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | 계 | 6 | 7 | 13 | 4 | 9 | 13 | 26 |
| 합 계 | | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |



[그림 V-2] 2번 문항의 그림

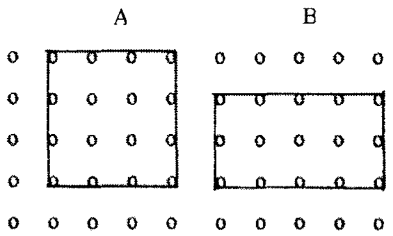
또한, '길이가 같다'라고 응답한 학생들은 '넓이'를 단순히 '길이', 즉 '둘레'의 개념과 혼동하는 경우였다. 한 편, 등적분할을 잘못 일반화 시킨 응답과 엄밀하지 못한 측정과 공식으로 잘못 대답한 응답도 있었다.

다. 3번 문항

점판 위에 그려진 직사각형 모양 초콜릿의 넓이를 비교하는 문항이다. A와 B초콜릿 중 큰 것을 선택하고 왜 그렇게 선택했으며 무엇을 세어서 비교 했는지 선택의 이유를 적도록 했다. 이 문항은 학생들에게 있어서 단위 정사각형이 넓이의 기본 단위인지를 확인하는 문항이다. 즉, 학생들이 넓이 비교의 기본 단위로 무엇을 선택하는지 확인하는 문항이다.

<표 V-3> 3번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 기호 | 선택한 이유 | 5학년 | | | 6학년 | | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | 계 | C | D | 계 | |
| A | 못의 개수 | 22 | 12 | 34 | 12 | 8 | 20 | 54 |
| | 단위정사각형 개수 | 0 | 6 | 6 | 9 | 11 | 20 | 26 |
| | 공식으로 구함 | 3 | 1 | 4 | 0 | 2 | 2 | 6 |
| | 직관적으로 | 2 | 4 | 6 | 3 | 4 | 7 | 13 |
| | 기 타 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 5 |
| | 계 | 28 | 25 | 53 | 26 | 25 | 51 | 104 |
| B | 직관적으로 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| | 가로길이 차이 | 0 | 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 6 |
| | 공식 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | 기타 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | 계 | 1 | 3 | 4 | 3 | 4 | 7 | 11 |
| 같다 | | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 합 계 | | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |




[그림 V-3] 3번 문항의 그림

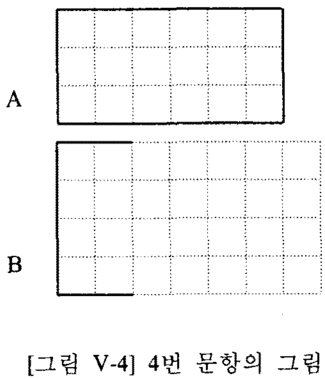
'단위 정사각형'에 비해 학생들이 넓이 비교를 위한 도구로 사용한 것은 '못의 개수'였다. 즉, 학생들은 넓이를 비교할 때 '단위 정사각형'보다는 다른 임의의 도구를 더 활용하였다. 또한, 잘못된 오답인 B를 선택한 학생 중에는 단순히 '길이'로 비교한 경우가 많았다. 한 편, 이 문항에서도 공식과 직관을 통해 해결한 학생들이 있었다.

라. 4번 문항

4번 문항은 격자 상에 제시된 A도형의 넓이와 같이 B도형을 그리는 것이다. A도형은 가로 6칸, 세로 3칸으로 이루어져 있으며, B도형은 세로 4칸으로 직접 그려 넣도록 미완성 그림으로 제시하였다. 격자와 도형을 구분하기 위해 격자는 점선, 도형은 실선으로 제시하였다. 직사각형 A의 넓이와 같은 직사각형 B를 만들기 위해서는 B의 세로선 4와 5의 중간에 선을 그어야 한다. 이것은 단위 정사각형을 분리된 낱개의 단위로 파악해서는 안 되며 넓이의 연속성을 이해하고 단위 정사각형을 분할할 수 있는 지를 확인하는 문항이다.

<표 V-4> 4번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 응답유형 | 5학년 | | | 6학년 | | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | 계 | C | D | 계 | |
| 지그재그 | 16 | 12 | 28 | 3 | 5 | 8 | 36 |
| 4.5에서 | 1 | 2 | 3 | 12 | 12 | 24 | 27 |
| 4에서 | 1 | 4 | 5 | 1 | 3 | 4 | 9 |
| 5에서 | 2 | 4 | 6 | 4 | 3 | 7 | 13 |
| 6에서 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 5 | 6 |
| 못 함 | 7 | 4 | 11 | 5 | 2 | 7 | 18 |
| 기 타 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 6 | 9 |
| 합 계 | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |




[그림 V-4] 4번 문항의 그림

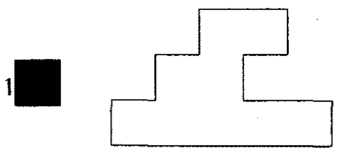
정답도 많았지만, 더 많은 응답 유형은 '지그재그'의 형태였다. 또한 4, 5, 6에서 선을 내린 학생들도 많았다. 이를 통해 볼 때, '지그재그' 형태를 포함한 많은 학생들은 단위 정사각형을 분리된 낱개로 인식하며 넓이의 연속성을 제대로 인식하지 못함을 알 수 있었다.

마. 5번 문항

5번 문항은 단위 정사각형을 이용하여 주어진 부정형의 넓이를 구하는 것이다. 문항에 그림으로 단위 정사각형을 제시했고, 또한 실제 크기의 단위 정사각형 종이를 이용하여 직접 해결하도록 하였다. 이 문항은 단위 정사각형을 반복적으로 덮어서 넓이를 구하면 쉽게 해결되지만, 선분의 길이로 공식을 이용할 때는 어려운 문제로, 학생들이 단위 정사각형을 반복적으로 덮을 수 있는지를 확인하기 위한 문항이다.

<표 V-5> 5번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 응답유형 | | 5학년 | | | 6학년 | | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | 계 | C | D | 계 | |
| 9㎠ | 단위정사각형개수 | 19 | 13 | 32 | 18 | 22 | 40 | 72 |
| | 파악 안 됨 | 3 | 7 | 10 | 3 | 7 | 10 | 20 |
| | 공식 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| | 계 | 22 | 21 | 43 | 22 | 29 | 51 | 94 |
| 오답 | 3㎠(높이) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 15㎠(5*3) | 1 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| | 18㎠(둘레) | 4 | 1 | 5 | 2 | 0 | 2 | 7 |
| | 25㎠(5*5) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 기타 | 2 | 1 | 3 | 7 | 1 | 8 | 11 |
| | 계 | 7 | 7 | 14 | 9 | 1 | 10 | 24 |
| 합 계 | | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |



[그림 V-5] 5번 문항의 그림

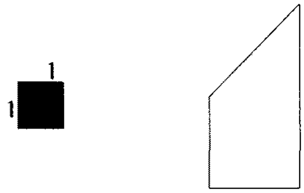
단위 정사각형이 제시될 때, 많은 학생들이 그것을 이용하여 쉽게 해결했다. 하지만 공식을 이용하여 해결한 학생도 있었다. 한 편, 오답으로 응답한 학생들은 단위 정사각형을 제대로 사용하지 못하고 '높이', '둘레' 및 단순히 '밑변×높이'로 해결한 경우가 많았다.

바. 6번 문항

5번 문항과 같이 단위 정사각형을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구하는 것이다. 6번 문항은 5번 문항과 같은 개념요소를 측정하지만 5번 문항과 달리 단위 정사각형을 분할해야한다. 단위 정사각형을 모두 덮고 나면, 덮을 수 없는 직각 이등변 삼각형 2개가 남는다. 이 삼각형의 넓이를 알기 위해서는 단위 정사각형을 절반으로 분할하고, 그 값을 정확하게 인식해야 한다. 즉, 이 문항은 도형의 덮기에 도형의 분할 능력까지 확인하는 문항이다.

<표 V-6> 6번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 응답유형 | | 5학년 | | | 6학년 | | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | 계 | C | D | 계 | |
| 6㎠ | 단위정사각형개수 | 18 | 11 | 29 | 20 | 22 | 42 | 71 |
| | 파악 안 됨 | 1 | 5 | 6 | 1 | 4 | 5 | 11 |
| | 공식 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 6 |
| | 계 | 20 | 17 | 37 | 24 | 27 | 51 | 88 |
| 오답 | 5㎠(사각형만) | 2 | 3 | 5 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| | 8㎠(2*4) | 0 | 5 | 5 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| | 10㎠(둘레, 대각선2) | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| | 11㎠(둘레, 대각선3) | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| | 12㎠(2*6) | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 15㎠(둘레) | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 기타 | 3 | 1 | 4 | 4 | 2 | 6 | 10 |
| | 계 | 9 | 11 | 20 | 7 | 3 | 10 | 30 |
| 합 계 | | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |

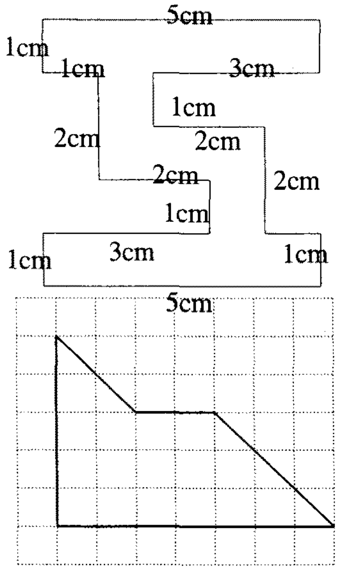



[그림 V-6] 6번 문항의 그림

6번 문항도 5번 문항과 비슷한 분석 결과를 나타냈다. 단위 정사각형을 이용한 학생이 제일 많았으며, 공식으로 해결한 학생도 있었다. 한편, 오답으로, 단위의 분할을 하지 못하는 학생들은 대부분 '둘레', '밑변×높이'로 해결하였다. 그리고 단위의 분할을 하지 못하고 '단위 정사각형'의 개수만을 세어 해결한 학생도 있었다.

사. 7번 문항

7번 문항은 개별적으로 알아보았던 측정개념을 통합적으로 확인했으며 2개의 문항을 제시했다. 5, 6번 문항과 달리 7번 문항은 단위 정사각형을 그림으로 제시하지 않았고, 사용하라는 언급도 하지 않았다. 학생들이 스스로 자유롭게 문제를 해결하도록 했다.




[그림 V-7] 7번 문항의 그림

<표 V-8> 7-2번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 응답유형 | | 5학년 | | | 6학년 | | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | 계 | C | D | 계 | |
| 18.5㎠ | 단위정사각형개수 | 12 | 9 | 21 | 17 | 18 | 35 | 56 |
| | 파악 안 됨 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 5 | 8 |
| | 공식 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| | 계 | 15 | 11 | 26 | 20 | 22 | 42 | 68 |
| 오답 | 4.5㎠(높이, 삼각형0.5) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 5㎠ (높이) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 16㎠(사각형만) | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 |
| | 18㎠(개수혼동) | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | 7 |
| | 19㎠(둘레, 삼각형혼동) | 4 | 1 | 5 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| | 21㎠(삼각형을 사각형계수) | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| | 35㎠ (7*5) | 2 | 7 | 9 | 2 | 0 | 2 | 11 |
| | 기 타 | 5 | 4 | 9 | 7 | 1 | 8 | 17 |
| | 계 | 14 | 17 | 31 | 11 | 8 | 19 | 50 |
| 합 계 | | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |

<표 V-7> 7-1번 문항의 응답 유형과 학생 수

| 응답 유형 | | 5학년 | | | 6학년 | | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | 계 | C | D | 계 | |
| 15㎠ | 단위정사각형개수 | 11 | 7 | 18 | 15 | 19 | 34 | 52 |
| | 파악안됨 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 5 | 11 |
| | 공식 | 1 | 1 | 2 | 5 | 3 | 8 | 10 |
| | 계 | 15 | 11 | 26 | 21 | 26 | 47 | 73 |
| 오답 | 5㎠ (높이) | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 16㎠(개수혼동) | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | 25㎠ (5*5) | 3 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| | 30㎠ (둘레) | 3 | 4 | 7 | 2 | 4 | 6 | 13 |
| | 55㎠ (5*11) | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 기타 | 6 | 7 | 13 | 8 | 0 | 8 | 21 |
| | 계 | 14 | 17 | 31 | 10 | 4 | 14 | 45 |
| 합 계 | | 29 | 28 | 57 | 31 | 30 | 61 | 118 |

첫 번째 문항의 결과는 5번보다 복잡해 보이지만 응답유형은 대체로 비슷했다. 가장 많은 기타 오답 유형은 '둘레'였으며, 그 다음으로 단순히 '밑변×높이'의 공식으로 해결한 경우였다. 또한 '높이', '개수혼동'의 이유로 잘 못 해결한 경우도 있었다.

첫 번째 문항과 달리 두 번째 문항에서 나타난 새로운 응답 유형은 '단위의 분할'과 관련된 것이었다. 첫 번째 문항과 달리 두 번째 문항은 반복과 타일링 뿐만 아니라 단위를 분할 할 수 있는 능력까지 확인하였다. 새로운 응답 유형을 구체적으로 살펴보면, 사각형 개수만 확인하고 삼각형은 빠뜨린 학생(4명), 사각형과 삼각형의 개수를 실수한 학생(11명), 삼각형도 사각형으로 간주하여 개수를 확인한 학생(3명) 등이 있었다.

### 아. 면담 분석

#### 1) 길이와 관련된 장애

I : 그래요. 정말 둘레가 같으면 넓이가 같은 건가요? 잘 생각하고 답하세요.
J : 같아요.
I : 왜 똑같죠?
J : 둘레가 똑같잖아요. 둘레가 같으면 그 둘레로 똑같은 모양이 나오잖아요.

I : 왜 동그라미를 세었는지 말해 줄래요?
K : 동그라미의 개수가 더 많고요, 이 동그라미의 선에 수를 세보면 가로랑 세로를 곱해도 A가 더 커요.
(중략)
I : 점의 개수와 넓이는 무슨 관계가 있나요?
K : 선에 점이 둘러싸여 있으니까 관계있는 것 같아요.

첫 번째 면담은 2번 문항에서 J학생이 '둘레가 같기 때문에 넓이가 같다.'고 말한 것이다. 이 학생은 단순히 둘레, 즉 길이를 이용하여 넓이를 비교하였고, 넓이의 속성과 길이의 속성을 혼동하였다. 두 번째 면담의 K학생은 3번 문항에서 넓이를 비교할 때 단위 정사각형이 아닌 격자의 못을 세어 비교했는데, 특히 선과 관련지어서 생각하고 있었다.

두 면담의 내용은 공통적으로 학생들이 '길이'와 '넓이'를 쉽게 혼동하며 '길이'의 개념이 '넓이'개념을 학습하는데 장애로 인식되고 있음을 확인할 수 있었다.

#### 2) 단위 정사각형과 관련된 장애

I : 지금 더 큰 것을 A, 작은 것을 B라고 했는데 어떻게 구한 거죠?
K : 도형 안에 동그라미 개수가 A가 더 많아요.

I : 왜 5곱하기 3을 하는 거죠?
L : 밑변이 5개니까 5, 그리고 여기가 3개니까 3 그래서 5×3하면 15가 나올 거 같아요.
I : 왜 밑변 곱하기 높이를 한 거죠?
L : 넓이를 구해야 하니까요.

각각, 3번과 5번 문항에 해당하는 면담내용이다. 하지만 K학생과 L학생, 모두 단위 정사각형을 이용하여 문제를 해결하지 않았다. K학생은 격자의 못을, L학생은 공식을 이용하여 해결하였다. 특히 3번 문항에서 격자의 못을 이용하여 해결했던 학생들이 전체의 46%로 높은 비율을 차지한 결과와 여러 선행연구에서 이미 확인한 바와 같이 학생들에게 단위정사각형은 완전하게 약속된 것이 아니었다. 따라서 단위 정사각형에 대한 올바른 인식이 없는 학생들은 장애로 인해 넓이를 바르게 이해할 수 없었다.

## 2. 인식론적 장애 분석 및 논의

가. 인식론적 장애의 유형

앞 절의 내용을 간략히 종합한 위 표의 주요 장애 유형을 토대로 분류하면, 인식론적 장애의 유형을 크게 두 가지로 나눌 수 있었다. 먼저, '길이' 개념과의 혼동이다. '길이'는 2학년에서 먼저 학습하는 내용으로 '넓이'와 깊은 관련이 있다. 문항 분석에서 특히 '넓이'를 '높이'나 '둘레'로 착각하여 해결했던 반응들로, 측정의 속성과 관련된 장애이며 4번 문항을 제외한 1, 2, 3, 5, 6, 7번 문항에서 모두 나타났다.

다른 한 가지는, 무분별한 공식의 사용과 관련된 장애 유형이다. 넓이의 개념적 이해 없이 도구적 이해를 토대로 가로와 세로를 곱하는 많은 학생들을 확인하였다(1, 3, 5, 6, 7번 문항). 공식을 무분별하게 사용하는 학생들은 도형을 볼 때 '선분의 길이'부터 확인했다. 즉, 단위 정사각형으로 쉽게 구할 수 있는 도형일지라도(5, 7번 문항) 공식에 집착하여 '선분의 길이'부터 확인하는 일반화된 사고를 나타내었다 (허학도, 2006; Kamii와 Kysh, 2006). 따라서 이 문제는 '단위 넓이'와 관련된 장애라고 할 수 있다.

나. 인식론적 장애의 원인

1) 측정 속성과 관련된 장애의 원인

측정의 속성과 관련된 장애의 원인은 먼저, 선행 학습된 '길이'에 대한 지배적인 관념 때문이다. 초등학교 수학교육과정에 따라 학생들은 2학년에 '길이'를 먼저 학습하고 5학년이 되어서야 '넓이'를 학습한다. 따라서 '길이'와 '넓이' 개념을 구분하여 바르게 인지하지 못하면, '길이'는 '넓이'에 인식론적 장애로 작용하게 된다 (이대현, 2002; Zacharos, 2006). 이렇게 '넓이'를 바르게 인식하지 못한 학생들은 '넓이'를 '높이'나 '둘레', '밑변×높이'의 공식을 이용하여 문제를 해결하곤 하였다(2, 3, 5, 6, 7번 문항).

두 번째 측정의 속성과 관련된 장애의 원인은 도형의 정의와 측정의 정의를 혼동하기

<표 V-9> 문항별 분석의 종합

| 문 항 | 주요 장애 유형 | 기타 장애 유형 |
|---|---|---|
| 1번 문항<br>(넓이의 개념) | ▶ 선분을 통한 넓이 인식<br>▶ 공식을 통한 넓이 인식 | ▷ 부피와 혼동<br>▷ 다각형으로 넓이 인식<br>▷ 직관적 크기로 넓이 인식 |
| 2번 문항<br>(도형의 넓이 비교) | ▶ 유추로 인한 장애<br>▶ 길이와 혼동 | ▷ 등적분할의 잘못된 일반화<br>▷ 측정의 실패로 인한 장애 |
| 3번 문항<br>(넓이비교의 단위) | ▶ 못의 개수로 넓이 비교 | ▷ 공식으로 비교, 직관 장애<br>▷ 길이, 높이로 넓이 비교 |
| 4번 문항<br>(넓이 연속성) | ▶ 지그재그로 그림<br>▶ 4, 5, 6에서 선을 그음 | ▷ 시도하지 못함 |
| 5번 문항<br>(단위 넓이 덮기) | ▶ 밑변×높이로 잘못된 일반화<br>▶ 둘레와 혼동 | ▷ 높이와 혼동 |
| 6번 문항<br>(단위 덮기 및 분할) | ▶ 밑변×높이로 잘못된 일반화<br>▶ 단위 분할을 못함 | ▷ 둘레와 혼동 |
| 7-1번 문항<br>(단위 넓이 덮기) | ▶ 둘레와 혼동<br>▶ 밑변×높이로 잘못된 일반화 | ▷ 단위 넓이 개수의 혼동<br>▷ 높이와 혼동 |
| 7-2번 문항<br>(단위 덮기 및 분할) | ▶ 밑변×높이로 잘못된 일반화<br>▶ 단위 분할을 못함 | ▷ 높이와 혼동<br>▷ 둘레와 혼동 |

때문이다. 교과서에서 나오는 평면도형은 도형의 요소(각과 선)를 이용하여 정의한다. 이에 따라, 교과서 도형의 그림은 대부분 선분 즉, 윤곽선만을 이용하여 나타낸다. 하지만, 이러한 도형의 표현은 측정의 학습에는 강한 '개념 이미지'로 남게 된다. 이것은 1번 문항에서 '넓이를 가지는 도형'에 관한 선택의 이유로 많은 학생들이 '넓이'를 '선분의 연결'로 파악하고 있음을 통해 확인하였다. '단위 넓이'의 개수인 측정의 정의가 아닌 도형의 정의, 즉 '선분의 연결'로서 넓이를 파악하는 것은 선분의 길이에 몰두하여 넓이를 공식으로만 인식하게 된다. 이 또한, 1번 문항의 응답유형(공식, 다각형)에서 확인할 수 있었다.

2) 단위넓이 개념과 관련된 장애의 원인

먼저, 초등학생은 단위 정사각형을 넓이의 기본 단위로 생각하지 않기 때문이다. 3번 문항에서 '넓이'라는 평면을 측정할 때 학생들은 단위 정사각형보다는 측정대상에 맞게 기본 단위를 설정하였다(Lehrer, 2003; Lehrer, Jaslow, Curtis, 2003). '넓이' 측정을 처음 학습하는 학생에게 단위 정사각형은 '주인의 허락 없이 갖다놓은 학습도구'에 불과하다. 따라서 학생이 단위 정사각형을 넓이의 기본 단위로 충분히 인식할 수 있도록 하는 학습 과정이 필요하다. 이러한 측정의 활동이 넓이 학습에서 충분히 이루어지지 않는다면, 학생들은 '잘못된 단위'나 '공식'이라는 도구적인 이해에 몰두할 수밖에 없을 것이다(Zacharos, 2006).

단위 넓이와 관련된 장애의 두 번째 원인은, 2차 평면에 대한 개념이 부족하기 때문이다. 2차원에 대한 개념이 부족하다는 것은 곧, 넓이(양)의 연속성 개념이 부족하다는 것을 의미한다. 다시 말해, 4번 문항에서 많은 학생들이 단위 정사각형을 분리되어 있는 낱개로 파악하여 지그재그 형태나 가로선의 4, 5, 6번째에서 세로선을 그리는 장애를 나타내었다. 따라서 평면도형의 내부가 연속적으로 이루어졌음을 이해할 수 있을 때, 비로소 문항 4번을 제대로 해결할 수 있을 것이다(백석윤, 1992; Kamii와 Kysh, 2006).

다. 인식론적 장애의 지도방안

1) 측정 속성과 관련된 장애의 지도방안

측정 속성과 관련된 장애의 첫 번째 원인은 '길이'개념에 대한 지배적인 관념 때문이다(2, 3, 5, 6, 7번 문항). 이것을 해결하기 위해, 학생들이 공식으로 일반화되기 전, 다양한 평면의 측정활동을 통해서 측정의 속성이 '넓이'인지, '길이'인지를 파악할 수 있어야 한다.

한 편, MIC 교과서(나온교육연구소, 2004)에서는 '둘레가 같고 넓이가 다른 도형', '넓이가 같고 둘레가 다른 도형' 및 '가로와 세로의 길이가 다른 여러 장의 사진'을 제시하여 '둘레'와 '넓이'의 속성을 살펴볼 수 있도록 하였다. 우리나라 교과서에서도 이러한 두 속성간의 관계를 살펴볼 수 있는 활동을 제시하여 '길이'와 '넓이'가 상당히 밀접한 관련이 있지만 속성과 차원이 다른 측정 개념임을 인식할 수 있도록 해야 한다.

측정 속성과 관련된 장애의 두 번째 원인은 측정의 정의와 도형의 정의를 혼동하기 때문이다(1번 문항). 이러한 문제점은 현행 교과서(교육인적자원부, 2009; 교육과학기술부, 2010)에서 측정의 정의가 부재함에 큰 원인이 있다. 앞에서 살펴본 MIC 교과서(나온교육연구소, 2004)와 일본교과서(杉山吉茂 외 41인, 2005)는 1㎠ 정사각형을 단위 넓이로 약속하고 그 개수로 '넓이'를 정의하고 있다. 하지만 우리나라 교과서는 넓이에 대한 정의가 없다. 올바른 '수학적 정의'가 학생들의 수학적 개념 이해에 미치는

영향을 생각해 볼 때, 교과서에서는 '측정'의 개념으로 '넓이'를 정의해야 한다.

한 편, 우리나라 교과서는 직·간접비교(임의, 보편단위)를 거쳐 공식의 유도로 이어지는 측정의 절차와 더불어 공식의 활용에 중점을 두고 있다. 이에 따라 앞에서 학습한 측정의 개념과 과정이 공식의 활용에 묻혀 인식론적 장애를 초래할 수 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해, 먼저 MIC 교과서와 같이 공식의 통합을 강조하며 공식의 활용보다 측정의 개념으로서 넓이를 인식하도록 교과서를 구성해야 한다. 그리고 일본 교과서와 같이 '반복과 타일링'을 통한 'array'의 개념을 이용하여 넓이의 공식을 유도해야 한다. 넓이를 두 길이의 곱으로 단순하게 인식할 수 있지만, 두 길이의 곱은 넓이의 '승법성'과 연관되므로 쉽지 않다. 따라서 정확한 공식의 이해를 위해 'array' 개념의 학습을 확실히 해야 한다.

2) 단위넓이 개념과 관련된 장애의 지도방안

첫 번째 원인은 초등학생이 단위 정사각형을 넓이의 기본 단위로 고려하지 않기 때문이다(3번 문항). 측정의 절차는 보통 직접, 간접비교(임의의 단위에서 보편적인 단위)를 거쳐 간접측정 및 공식으로의 형식화로 이어진다. 각 단계들은 앞 단계의 문제점을 통해 그 대안으로 대두된다. 따라서 학생은 활동을 통해 직접비교의 문제점을 파악하고 간접비교의 필요성을 인식해야 한다. 즉, 측정 각 단계의 충분한 활동을 통해 1㎠ 정사각형을 넓이의 기본 단위로 생각하고 약속해야 한다. 이를 위해 단편일률적인 도형의 제시를 벗어나 각 단계를 충분히 활동할 수 있는 다양한 생활 소재 및 다양한 모양의 넓이를 제시해야 한다.

단위 넓이와 관련된 장애의 두 번째 원인은 2차 평면에 대한 개념이 부족하기 때문이다(4번 문항). 즉, 넓이의 연속성 개념이 부족하다는 것이다. Piaget, Inhelder, Szeminska (1960)에 따르면, 평면을 '두 선분의 무한한 집합체'라고 인식할 때, 넓이의 연속성 개념을 가진다. 다시 말해 평면이 한 점을 기준으로 가로와 세로로 이은 무수히 많은 선분의 교차로서 인식될 때, 넓이의 연속성 개념을 갖게 된다는 것이다. 또한 넓이의 연속성 개념을 학생이 인식하고 있을 때에만 단위 정사각형의 가로 개수와 세로 개수의 곱을 가로 길이와 세로 길이의 곱으로 변환시키는 데 의미가 있다. 즉, 넓이의 연속성 개념이 인식되어야 넓이의 승법성 개념도 인식된다는 것이다. 따라서 교사들은 단위 정사각형의 장애와 관련하여 넓이의 연속성 개념을 갖도록 교수학적 방안을 강구해야 한다. 실이나 잘게 자른 종이를 이용하여 평면을 만들어 보는 활동과 같은 조작 활동을 통해 넓이의 연속성 개념을 자연스럽게 습득할 수 있도록 학습을 구성해야 한다.

## VI. 결론

본 연구에서는 초등학생의 넓이 학습에서 나타내는 잘못된 응답을 토대로 넓이 구하기에 관한 인식론적 장애 현상을 분석하였다. Bachelard(2002)에 따르면, 과학의 발전과정에는 단절의 현상이 있으며 그 단절이 보이는 곳에는 인식론적 장애 현상이 나타난다고 한다. 이와 같이 학생이 수학적 개념을 학습하는 과정에는 이해의 단절 현상, 즉 인식론적 장애 현상이 나타난다는 것이다. 길이와 넓이는 밀접한 관련이 있지만 서로 다른 차원을 측정의 대상으로 삼는다. 본 연구에서는 넓이를 길이, 즉 둘레나 높이와 혼동하는 학생들이 있음을 보았다. Brousseau(1997)가 말한 바와 같이 이들은 1

차원의 둘레나 높이를 측정할 때는 성공적이지만 동일한 방법으로 2차원의 넓이를 측정할 때는 실패하게 된다. 이러한 학생들이 보이는 학습상의 오류를 단순히 학습상의 실수나 공식을 제대로 암기하지 못했기 때문이라고 치부한다면 넓이 구하기와 관련된 학생들의 구조적인 학습 오류 현상을 바로 잡기 어렵다.

Brousseau(1997)는 수학적 개념의 역사 발생적 상황에 대한 분석을 바탕으로 인식론적 장애 현상의 원인을 탐구하여 이와 같은 인식론적 장애를 극복할 수 있는 교수 상황을 설정할 수 있다고 말한다. 교수 상황 설정의 한 방법론으로 역사발생적 원리라는 시각에 의한 인식론적 장애 현상의 분석을 통해 교수 학습 상황의 설정이 가능함을 설명하고 있다. 본 연구에서 넓이 개념과 관련하여 역사발생적 원리의 관점에 따라 살펴보았을 때 현행 초등학교 수학 교과서에서 인식론적 장애를 유발하는 요소가 있음을 확인할 수 있었다. 본래 수학사에서 넓이의 개념이 실제적인 필요성에 의해 발생된 것처럼 넓이 학습의 초기 단계인 초등학생에게도 넓이의 학습은 측정의 개념을 통하여 실제적으로 학습시킬 필요가 있다. 하지만 우리나라의 초등학교 수학 교과서에서는 넓이에 대한 정의를 찾아볼 수 없으며 측정을 통한 넓이 구하기의 지도보다는 단순히 넓이 공식의 활용을 강조하고 있음을 알 수 있다.

인식론적 장애를 극복하고 올바른 학습이 이루어지기 위한 적절한 교수 상황에 대해 연구했던 Brousseau(1997)와 같이 넓이 구하기와 관련하여 인식론적 장애 현상을 극복시키기 위해서는 구체적인 교수학적 방안이 필요하다. 즉, 넓이 구하기와 관련된 인식론적 장애 현상의 원인을 분석하고 그에 따른 지도방안의 구안이 필요하다. 본 연구에서 많은 학생들은 부정형의 넓이 문항에서 단순히 '밑변 × 높이'와 같은 공식으로 일반화시켜 해결하였다. 이와 같은 넓이 학습상의 오류 현상과 관련하여 면담 및 질적 분석을 통해 그 인식론적 장애의 원인을 살펴본 결과 단위 정사각형에 대한 부족한 인식 때문임을 알 수 있었다. 이에 따라 넓이에 대한 측정의 속성과 관련된 장애 현상의 교정적 지도 방안은 두 속성간의 관계를 살펴볼 수 있는 활동을 제시하고, 측정의 개념으로 넓이를 정의할 필요가 있으며, '정렬(array)'의 개념으로 넓이공식을 유도하고, 통합적으로 공식을 적용하도록 지도할 필요가 있다. 한편, 단위 정사각형 개념과 관련된 장애 현상의 지도방안은 각 단계를 충분히 활동할 수 있도록 넓이를 구하고자하는 도형의 소재 및 형태를 다양하게 제시할 필요가 있으며, 넓이에 대한 연속량적 개념을 인식하도록 교수학적 방안을 구안해야 한다.

## 참고문헌


교육부(1998). **초등학교 교육과정 [별책 2]**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육과학기술부(2010). **초등학교 수학 4-2**. 서울: 두산동아주식회사.

교육인적자원부(2007). **초등학교 교육과정 [별책 2]**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2009). **초등학교 수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

나온교육연구소(2004). **수학으로 보는 세상 - 조각을 모아모아**. 서울: 도서출판 나온.

백석윤(1992). 아동의 공간 개념과 기하 형성 과정에 대한 Piaget의 연구. **진주교육대학교 과학교육연구, 18**, 73-89.

이대현(2002). 초등학생들의 도형의 둘레와 넓이 사이의 관계에 대한 이해의 분석. **한국수**

**학교육학회지, 6**(2), 85-91.

정동권(2001). 평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장. **인천교육대학교 과학교육논총, 13**, 1-36.

허학도(2006). **직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애**. 서울대학교대학원 석사학위 논문.

杉山吉茂 외 41인(2005a). **新編 新しい算數 4下**. 東京: 東京書籍株式會社.

Bachelard. G.(1994). **새로운 과학정신**. (김용선 역). 서울: 인간사랑. (불어 원작은 1934년 출판).

Bachelard. G.(1996). **부정의 철학**. (김용선 역). 서울: 인간사랑. (불어 원작은 1940년 출판).

Bachelard. G.(2002). *The formation of the science mind : A contribution to a psychanalysis of objective knowledge*. (tr. by Mary McAllester Jones). Manchester: Clinamen. (불어 원작은 1938년 출판).

Baturo, A., & Nason, R.(1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Students in Mathematics., 31*(3), 235-268.

Brousseau. G.(1997). *Theory of didactical situations in mathematics : didactique des mathematiques*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An education approach.* Dordrecht: D. Reidel publishing company.

Kamii. C., & Kysh. J.(2006). The difficulty of "length × width" : Is a square the unit of measurement?. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 105-115.

Lehrer, R.(2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.). *A Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.179-192). Reston, VA: NCTM.

Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C.(2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 100-121). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). 학교 수학을 위한 원리와 규준. (류희찬 외 2인, 역). 서울: 경문사.

Nunes, T., Light, P., & Mason, J.(1993). Tools for thought : The measurement of length and area. *Learing and Instruction, 3*, 39-54.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A.(1960). *The child's conception of geometry*. (tr. by Lunzer, E. A.). London: Routledge. (불어 원작은 1948년 출판).

Sierpinska, A.(1994). *Understanding in mathematics*. London. Washington D.C.: The Falmer Press.

Skarga, B.(1989). *Granice historycznosci*. Warsaw: Panstwowy Instytut Wydawniczy.

Stephan, M., & Clements, D.(2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

Zacharos. K.(2006). Prevailing educational practical for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 224-239.

# Epistemological Obstacles in the Learning of Area in Plane Figures

Park, Eun Yul (Seoul Siheung Elementary School)
Paik, Suck Yoon (Seoul National University of Education)

The epistemological obstacles in the area learning of plane figure can be categorized into two types that is closely related to an attribute of measurement and is strongly connected with unit square. First, reasons for the obstacle related to an attribute of measurement are that 'area' is in conflict with 'length' and the definition of 'plane figure' is not accordance with that of 'measurement'. Second, the causes of epistemological obstacles related to unit square are that unit square is not a basic unit to students and students have little understanding of the conception of the two dimensions. Thus, To overcome the obstacle related to an attribute of measurement, students must be able to distinguish between 'area' and 'length' through a variety of measurement activities. And, the definition of area needs to be redefined with the conception of measurement. Also, the textbook should make it possible to help students to induce the formula with the conception of 'array' and facilitate the application of formula in an integrated way. Meanwhile, To overcome obstacles related to unit square, authentic subject matter of real life and the various shapes of area need to be introduced in order for students to practice sufficient activities of each measure stage. Furthermore, teachers should seek for the pedagogical ways such as concrete manipulable activities to help them to grasp the continuous feature of the conception of area. Finally, it must be study on epistemological obstacles for good understanding. As present the cause and the teaching implication of epistemological obstacles through the research of epistemological obstacles, it must be solved.

* **Key Words** : 평면도형의 넓이(the area of plane figure), 인식론적 장애(epistemological obstacles)

논문접수: 2010. 7. 26
논문수정: 2010. 8. 13
심사완료: 2010. 8. 20