대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 3, 275-292. Aug 2010

조기 대수(Early Algebra)의 연구 동향과 접근에 관한 고찰

이 화 영* · 장 경 윤**

본 연구는 조기대수(Early Algebra)의 연구 동향을 살펴보고, 대수와 관련된 교과의 본질에 대한 탐구를 통하여 조기대수지도에 접근할 수 있는 여러 가지 방법을 논의하였다. 산술과 대수는 형태상 유사하고 대수를 산술의 연장선이라고 보는 관점이 우세하나, 산술과 대수의 근본적인 목적과 기호와 문자의 역할에 있어서 차이가 있다는 인식 또한 제기된다. 또한, 역사적으로 기하가 대수의 출발점이었다는 인식을 할 수 있었다. 본 연구자는 이에 따라 조기대수에 접근할 수 있는 가능성 있는 여러 가지 방향을 도출해 내었다. 조기대수 지도를 위하여 (1) 아동들의 비형식적인 전략을 고려하기 (2) 대수적 관계를 고려한 산술추론하기 (3) 기하적 문제 상황에서 대수추론을 시작하기 (4) 문자와 식의 도구를 제공하기 등을 통하여 조기대수 교육에 접근할 수 있다.

Ⅰ. 들어가며

Early Algebra는 1980년대부터 산술과 대수의 연결의 관점에서 논의되고 있는 대수 교육의 한 측면이다. NCTM(1989, 2000)을 비롯한 개혁적인 권고안에서는 대수가 초등학교 저학년 때에 시작하여 전 학년에 걸쳐 지도되어야 한다고 권고하고 있는데, 이는 어린 학생들에게는 수학적 관계에 대하여 생각하는 기회를 제공하여 산술을 강화해 줌과 동시에 대수의 힘을 일깨워주고, 중등 학생들에게는 산술과 대수의 개념 사이의 연결을 만들어 중학교에서 갑자기 형식적인 대수를 도입할 때 야기되는 여러 가지 개념적 오류를 최소화하고자 하는 교수학적 노력에서 기인한다.

실제로 이러한 노력은 MiC(Mathematics in Context) 프로젝트, TERC의 Investigation 교육과정, 호주의 Queensland 교육과정 등에 반영되어 초등학교 저학년에서부터 패턴, 변화, 일반화, 미지수, 동치, 관계 등을 도입하여 지도하도록 시도하고 있다. 미국의 NCISLA의 Early Algebra 프로젝트의 장기간에 걸친 연구에서는 초등 1, 2학년 학생들이 이러한 내용을 학습하여 대수의 기초를 형성하는데 도움이 되었음을 보고하였으며, 특히 부진학생들을 대상으로 한 연구(Carey, Fenneman, Carpenter, & Levi, 1995; Means & Knapp, 1991; Secada & Brendefur, 2000; Villaseñor & Kepner, 1993; Waxman & Padron, 1995; Koehler, 2004)에서도 대수적 관계와 동치 등을 고려한 학습에서 괄목할만한 향상을 보였음을 보고하였다.

우리나라 수학교육과정에서도 '문제푸는 방법 찾기' 단원을 통하여 대수적인 문제를 비형

* 정왕초등학교, bornapril@empal.com
** 건국대학교, kchang@konkuk.ac.kr

식적인 전략으로 접근하고 있다. 초등 수학에서는 연립방정식과 관련된 문제를 주로 '예상과 확인'의 산술적인 전략을 사용하고, 중학교에서는 방정식을 통한 대수적 전략을 사용하도록 하고 있어, 양쪽의 전략사이의 '간격'이 존재하게 된다. 실제로 중학교 2학년 학생들의 경우 연립방정식을 학습하면서, 그것들이 이미 초등학교에서 비형식적으로 다루었던 내용이라는 것을 전혀 의식하지 못하게 된다. 이와 관련된 실험 연구(장지현, 2008)에서 연립방정식의 풀이에서 초등학교 6학년보다 중학교 3학년 학생들의 정답률이 낮음을 보고하여 이를 뒷받침하고 있다. 학생들은 여러 가지 비형식적 전략과 사고 과정을 생략한 채 형식적으로 문자를 조작하는 데에만 집중하게 되는 것이다. 따라서, 산술과 대수 사이에 존재하는 이러한 학생들의 사고와 교육과정의 간격을 연결해 줄 방안을 강구할 필요성이 도출된다.

Early Algebra는 관점에 따라 '초기 대수' 혹은 '조기 대수'로 번역할 수 있는데, 이는 Early Algebra를 어떻게 이해하는가와 관련이 있다. Lins & Kaput(2004)은 Early Algebra를 두 가지 관점으로 구분하였는데, 그 첫 번째는, 학생들이 대수를 학교에서 처음 접하는 시기(12~13세)에 형식적인 대수를 어떠한 방법과 내용으로 시작하는가에 관한 것이다. 두 번째는, 학생들에게 좀 더 이른 나이인 7세 정도에 대수적 추론을 도입하는 방법과 내용에 관한 사항을 일컫는 것으로 생각해 볼 수 있다. 전자의 경우, Early Algebra는 '초기 대수'로, 후자의 경우 '조기 대수'로 이해될 수 있을 것이다. 본고에서는 Lins & Kaput(2004)의 두 번째 관점에서 Early Algebra를 다룰 것이며, 따라서, 'Early Algebra'를 '조기대수'로 번역하기로 한다.

본 연구에서는, 조기 대수의 지금까지의 연구 동향을 살펴보고, 조기 대수로 접근할 수 있는 여러 가지 방법에 대하여 고찰함으로써, 조기 대수 교육 실행에 있어 구체적인 접근 방안과 관련한 앞으로의 연구에 시사점을 얻고자 한다.

II. 조기 대수 연구 동향

1960년대부터[1] 지속적으로 산술과 대수의 연결 측면에서 조기 대수(early algebra)에 대한 많은 연구가 이루어졌다. Lins & Kaput (2004)은 대수에 관한 연구들을 1990년대까지와 1990년대 이후의 연구들로 크게 구분하여 고찰하였는데, 본 연구에서는 이를 기초로, 조기대수 연구의 주제로 범주화하여 정리한다.

먼저, 1990년대까지의 대수 교육과 관련된 연구들은 주로 대수 학습 단계를 체계화하는 연구와 학생들의 오류 유형에 관한 연구의 두 가지 유형으로 나눌 수 있다.

1990년대 이후 대수교육 연구에 변화가 나타나기 시작하였는데, 크게 세 가지로 볼 수 있다. 그 첫 번째는 어린 학생들의 수학능력이 기대보다 앞선다는 연구들이고, 두 번째는 대수교육과 대수적 사고에 관한 관점 변화를 보고하는 연구들, 그리고 세 번째는 대수 교육에서 새로운 테크놀로지를 사용하는 진보된 아이디어의 연구이다. 본고에서는 그 중 첫 번째에 해당하는 연구들을 살펴보기로 한다.

1. 대수 학습 단계의 체계화 연구

1990년대까지의 대수 교육과 관련된 연구들 중 첫 번째 유형은 주로 대수 학습의 단계를 체계화하기 위한 것이었다. Küchemann(1974,

1) 서구에서 조기대수가 본격적으로 논의된 것은 1980년대부터이지만, 그에 앞서 옛 소련의 Davydov의 연구로부터 거슬러 올라가면 1960년대부터 조기대수에 관한 연구가 이루어졌다고 볼 수 있다.

1978)은 일반화된 산술에서의 발달과 Piaget의 발달 단계를 연결시키는 시도를 하였고, Garcia & Piaget(1984)는 대수의 역사적 발달 시기들 사이의 전이의 메커니즘이, 심리발생적인 단계들 사이의 전이에서 발견되는 것과 유사하다고 주장하였다.

Harper(1987)는 여러 가지 기호적 문제 해결 표현(기술 표현, 축약된 표현, 기호적인 표현)을 인지적 발달과 상호 관련시키고자 시도하였다. Sfard(1989)는 조작적 관점이 덜 추상적이기 때문에 필수적으로 구조적 관점보다 선행한다는 가설을 가지고 수학적 개념 구조의 모델을 제시하였다.

2. 대수 학습에서 오류에 관한 연구

1990년대까지의 대수 연구의 두 번째 유형은 학생들이 대수에서 겪는 오류의 유형과 오류의 원인에 관한 연구들이다. 이는 어린이들이 어떠한 능력을 지니고 있는지, 그 잠재력을 개발시키기 위한 방법은 무엇인지를 모색하기보다는, 아이들이 무엇을 못하는지에 집중되어 있다고 볼 수 있다. 발달단계와 교수 사이에 맞지 않는 부분이 있다는 인식아래, 개념과 산술의 불충분한 이해로 인하여 생기는 오류에 관한 조사 연구(Becker, 1988; Filloy, 1987; Galardo & Rojano, 1987; Herscovics, 1987; Kershner, 1987, 1990; Pereia-Mendoza, 1987)가 이루어졌으며, 대수 지도가 학생의 상태를 파악하고 이를 고려하는데 실패한 것을 오류의 원인으로 지적하였다. 또한, 산술에서 대수로의 이행 과정에서의 인식론적 간격으로 알려진 불일치(Herscovics & Linchevski, 1994 ; van Amerom, 2003)나 교수학적 단절(Filloy & Rojano, 1989; van Amerom, 2002)이 보고되었다. Sfard(1995)는 대수 개념에서의 학생들의 발달의 불연속과 대수의 역사적 발달을 비교하였다. 그는 기호적 대수가 대수의 구조적 개념에 대응하는 반면, 대수에서 축약된 표기법이 대수의 연산 개념에 연결된다고 하였다.

3. 어린 학생들의 대수 능력에 관한 연구

1990년대 이후, 대수 교육에 관한 연구의 범위가 확대되면서, 대수교육의 대상 또한 확대되어 조기대수의 가능성을 열어주었다. 특히, 유치원 또는 초등학교 저학년 아동들을 대상으로 한 문제 해결의 과정을 보고한 연구들에서 어린 학생들이 대수와 관련된 예전의 인식보다 더 나은 능력을 보여준다는 것을 보고하기 시작하였다.

조기대수의 가능성에 관한 선구적인 연구는 구소련의 Davydov(1962; Freudenthal, 1974)를 들 수 있다. 그는 초등학교에서 대수적 추론을 형성하는 방향을 추구하였는데, 이는 근본적으로 '발달은 학습에 선행한다'는 피아제의 아이디어와 정반대의 가정(Levi & Kaput, 2004)을 전제로 한다. 그는 초등학교 1학년~4학년 학생들에게 다이어그램, 그림, 문자식과 같은 도구를 제공함으로써 일반화의 사고를 육성하는 장기간의 교수 실험을 수행하였는데, 그 결과 양적 관계를 문자기호로 표현하는 것이 가능하였으며, 문제 해결에서 문자기호와 문자식은 수기호와 수식보다 앞서 도입할 수 있다는 가능성을 확인하였다.

Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck (1993)은 유치원 아이들의 곱셈과 나눗셈의 문제해결 과정을 보고하였다. 이들은, 유치원 아이들은 생각했던 것보다 훨씬 잘 곱셈과 나눗셈 상황과 관련된 문제들을 해결 할 수 있었다는 것과, "특정한 곱셈과 나눗셈이 요구하는 배경지식이 유치원 어린이들에게 잘 발

달되어 있으며, 그들은 행위(action)와 관계를 표현함으로써 곱셈과 나눗셈 문제를 해결할 수 있다"(p.440)는 것을 보고하였다.

Hativa & Cohen(1995)은 어린 아동들에게 음수 개념과 과정을 가르칠 수 있는 가능성에 대하여 조사한 결과, 긍정적인 결론을 얻어내었다. Mason(1991, 1996)은 모든 학생들은 자연스러운 일반화 능력과 일반성의 표현 능력을 가지고 있다는 것을 제시하였다. Brizuela & Lara-Roth(2001a, 2001b)는 산술에서의 대수적 성질을 끌어내어 덧셈 관계와 함수표를 가지고 어린 아동들에 의하여 구성된 표를 분석함으로써 아이들이 이미 지니고 있는 이해를 밝혀내었다. 이와 유사하게 Carraher, Brizuela, Earnest (2001)는 수직선에서 특정한 수 대신 N-3, N-2, N-1, n, N+1과 같은 표현의 발달에 관한 것을 연구하였다. Warren(2001)은 어린 아이들의 교환법칙에 대한 이해를 조사하고, 형식적 대수가 시작되기 직전까지 대수의 교수 학습을 위한 다양한 제안을 제시하였다(Lins & Kaput, 2004).

이와 같이, 1990년대 이후의 조기 대수와 관련된 연구들은 어린이들에게 적절한 도구를 제공하면, 생각했던 것 보다 어린이들이 '더 잘 할 수 있다'는 인식을 뒷받침하였다.

III. 대수교육을 위한 선행교과

최근의 개혁적인 권고들은 대수를 초등학교 저학년에서부터 시작하여 모든 학년에 걸쳐 가르쳐야 한다고 말한다(NCTM, 1989, 2000). 이는 누군가가 대수를 "대수적 표현을 단순화하는 것, 방정식을 푸는 것, 기호 조작의 규칙"이라고 규정한 전통적인 주제의 이미지를 넘어서 확장해야 한다는 것을 제시한다(Kaput, 2000. p.2). Koehler (2004)에 의하면, 이러한 비전은 모든 학생들에게 대수의 힘을 일깨우는 것을 강조하고, 학생들의 수학적 지식을 세우고, 형식적 대수를 도입하기 전에 대수적 추론을 도입하는 식으로의 대수 교수-학습으로의 변화를 요구한다. 이러한 관점의 전환은 모든 학생들을 위한 대수를 요구하므로, 대수는 더 이상 높은 수준의 수학과 사회 활동을 위한 관문의 역할을 계속해서는 안 된다. 그러나 조기 대수의 목적은 고등학교 수학 교육과정을 초등학교로 가져오는 것이 아니다. 오히려, 대수의 기초가 될 수 있는 대수적 추론을 초등학교 저학년에서부터 시작하여, 산술이 나중의 형식적 대수로 이행될 때 그 간격을 좁혀주는 것이 그 목적이 된다.

1. 산술과 대수

학교교육에서의 대수교육은 지금까지, 그리고 지금도 많은 나라에서 어떠한 경험적인 뒷받침 없이 대체로 산술은 '보다 구체적이고 더 쉬우며', 대수는 '보다 추상적이고 어렵기 때문에', '산술 다음에 대수'의 전통을 받아들이고 있는 입장을 취한다 (Lins & Kaput, 2004). 이는 Piaget의 인지 발달 이론에 의하여 이론적 뒷받침을 받고 있는 것처럼 보이기도 한다. Pettito(1979 ; Lins & Kaput, 2004)는 교수 실험을 통하여 이를 뒷받침하고 있는데, 대수는 산술에 비하여 형식적 사고를 요구하고, 형식적 사고는 나중의 발달 단계에 부합하므로, 대수가 산술보다 다음에 와야 한다는 것이다. 그러나, 선(先) 산술, 후(後) 대수의 입장을 취하는 학교 전통을 따르면서 학생들이 나타내는 여러 가지 어려움을 생각해 볼 때, 산술과 대수 사이의 차이점과 유사점을 자세히 고찰하여 조기 대수 학습의 범위와 다음 학년을 위하여 조기

대수 학습에서 무엇을 다룰지에 관한 문제들을 구체적으로 생각해 보아야 한다.

먼저, 산술과 대수의 차이점에 관한 것이다. 이것은 산술과 대수가 다루거나 강조하는 본질이 다르다는 입장이다.

첫째, 일반적으로 산술은 과정이나 절차에 초점을 두는 반면, 대수는 대상과 관계를 강조(김성준, 2003)한다. 산술에서는 계산 결과가 도출되면 끝이 나는 반면, 대수에서는 그 초점이 관계에 맞추어져 있고(Carpenter et al., 2005) 그 관계를 기호로 표현하고, 기호 조작을 통하여 관계를 파악한다. Charbonneau(1996)은 대수의 핵심은 '관계'와 '분석'이며, 대수는 관계를 다루기 위한 도구라고 보았다. 관계를 다룬다는 것은 먼저 대상을 볼 수 있고, 대상간의 연결을 통해 규칙을 파악할 수 있다는 것이다. 또한 산술은 알려진 수를 가지고 직접적인 계산을 다루는 반면, 대수는 미지의 또는 변수에 대한 추론을 요구하거나 특정한 상황과 일반적인 상황 사이의 차이점 인식을 요구한다. 따라서, 양을 다루고 추론하는 산술 활동에서 양들 간의 관계 및 동치성을 고려하도록 강조하는 것은 차후 대수 추론 활동을 자연스럽게 연결하는 데 도움이 될 것이다.

둘째, 문자, 기호, 표현과 동치성의 개념에 대한 것도 차이가 있다는 관점이다. 산술적인 문자는 대부분 약어체이거나 단일체인 반면, 대수의 문자는 변수나 미지의 수를 나타낸다(van Amerom, 2003). 쉬운 예로, 산술에서 3+4는 하나의 문제이며 명령으로 3에 4를 더하라는 뜻이다. 반면, 대수에서는 3+4 또는 a+b를 동치인 하나의 수로, 또는 형식적인 표기로 해석한다. Sfard(1991, 1995)는 3+4에 대한 산술적인 해석과 대수적인 해석이 과정적 대 구조적[2] 또는 조작적 대 구조적이라는 것에 대응한다고 하였다(Amerom, 2003). 또한 등호의 의미에서도 차이가 있다. 산술에서는 어린이들이 등호를 계산 결과를 도출하라는 명령으로 인식하는 어린이들이 많은 데 반하여, 대수에서는 등호 양 변의 양이 같다는 의미 즉, 동치성으로의 변화를 요구한다. 따라서, 이에 따라 산술에서 대수학습으로 이행할 때 등호의 개념 변화를 수반하지 못하여 어려움을 겪게 되는 경우가 많다. 학교수학에서의 기호적 대수에서의 문제점을 김성준(2003)은, 문자의 사용이 곧바로 식의 값을 구하는 과정으로 이어지게 되고, 이 과정은 학생이 이후 문자의 사용에서 그 의미를 미지수로 제한해서 사용하는 문제를 낳는다고 보고 있다.

다음은 산술과 대수의 유사성에 관한 입장이다.

첫째, 대수를 '일반화된 산술'이라고 볼 때, 산술과 대수는 동일한 연속선상위에 놓여 있으며, 근본적으로 같은 수 연산의 아이디어 위에 놓여 있다. 잘 알려져 있듯이, 대수를 보는 관점은 다양하다. Al-Khwarizmi(1931), Euler(1984), Katz(2007), Wheeler(1996) 등은 대수는 계산 · 기호조작 · 미지수 · 변수라고 보았으며, Whitehead(1927), Charbonneau(1996), Kieran & Wanger (1989)는 대수를 패턴과 관계라는 관점에서 논의하였다. Usiskin(1988)은 대수를 일반화된 연산, 문제 해결 절차, 양들 사이의 관계에 대한 연구, 구조로써의 대수의 네 가지 측면으로 구분하였다. Maclaurin(1748)은 다음과 같이 대수의 성격을 기술하였다.

> 대수란 목적에 맞게 고안된 어떠한 기호와 상징을 계산하거나 편리성을 찾는 일반적인 방법이다. 이것은 보편적(universal)인 산술이라고 불리며, 공통 산술과 비슷한 조작과 규칙에 의해 진

2) Kieran(1989; van Amerom, 2003)는 대수적 표현의 수학적 구조의 인식과 관련하여, 수학적 표현의 두 가지 개념을 명명하였다. 과정적(procedural) 표현은 수의 연산과 관련되며 결과를 위한 활동이며, 구조적(structural) 표현은 수학적 대상에 대한 연산과 관련되는 표현을 일컫는다.

행되고, 같은 원리들에서 발견된다(Katz, 2007)

De Morgan은 산술 - 보편산술 - 기호대수 - 의미적 대수의 순서로 대수가 발달해 왔다고 보았다. 여기서 보편산술은 즉각적으로 계산 결과를 얻는 산술과 대비하여 문자기호를 사용하는 것을 말한다. 보편산술은 산술에서 대수로 이행하는 과도기적 단계인데, Usiskin(1988)이 대수를 '일반화된 산술'이라고 보는 것과 일맥상통한다. 이렇게 대수는 여러 측면이 있으나, 여러 나라의 학교 수학 전통에서의 대수는 거의 항상 일반화된 산술이라는 관점을 취한다. 왜냐하면, 대수를 일반화된 산술이라고 볼 때, 추상대수로부터 학교대수를 구분하기가 용이한 측면을 무시할 수 없기 때문이다. 전통적인 학교 대수에서는 문자는 항상 수를 상징하지만, 추상대수에서는 문자는 순열, 행렬, 기하 변환을 포함하여, 정의된 연산 조합의 어떠한 집합의 원소나, 전체적으로 추상적인 원소를 의미할 수 있다(Lin & Kaput, 2004). 따라서, 학교 대수를 De Morgan, Maclaurin과 Usiskin의 '보편산술', '보편적 산술', '일반화된 산술' 이라는 관점을 수용한다면, 사실상 산술과 대수는 근본적으로 동일한 연속선상에 놓여있음을 알 수 있다. 즉, 특정수가 아닌 임의의 값에 대한 산술을 할 수 있도록 일반화된 식이 대수라고 본다면 산술이 대수의 한 분야로 인식이 가능하다.

또한, 이렇게 산술과 대수가 연속선상 위에 놓여 있다면, 이는 근본적으로는 산술과 대수가 같은 수 연산의 아이디어 위에 놓여 있다는 것을 의미한다. 실제로 결합법칙, 분배법칙, 등식의 성질 등 기본적인 대수의 법칙들은 산술 학습시에도 충분히 경험해 볼 수 있다.

둘째, 산술적 추론 활동은 대수와 직결된다. 또한, 산술적 연산과 산술적 표현에 대단히 의존을 많이 하는 대수는, 종종 산술적으로 다루어지기도 한다. '닭과 토끼 문제'를 보자. '닭과 토끼의 머리가 50개이고 발이 140개이다. 닭과 토끼는 각각 몇 마리인가?(Polya, 1981)' 이 문제는 잘 알려져 있듯이, 산술적으로 또는 대수적으로 모두 해결 가능하다. 산술적으로는 시행착오를 거듭하면서 최종 결과에 도달하는 '시행착오' 방법이 있고, 토끼도 다리가 2개라고 가정하고, 총 50마리일 때 다리의 개수는 100개 이므로 남는 40개가 토끼의 또 다른 다리 2개에 해당되는 개수가 되어 결과적으로 토끼는 20마리라고 구하는 방법 등 여러 가지가 있다. 대수적으로는 닭을 x, 토끼를 y로 놓고 연립방정식을 세워 해결할 수 있는데, 이 때에는 일반화가 대수적 추론의 중심에 놓여있다(Schliemann, Carraher et al., 2003). 이와 같이, 본질상 같은 문제이지만 해결하는 방법에 따라 대수 문제가 될 수도 있고, 산술 문제가 될 수도 있으며, 대수적 풀이와 산술적 풀이 양쪽 모두 가능하다.

김성준(2003)에 따르면, 초등학생들의 산술 활동에서 양을 다루고 그 양을 비교하는 활동을 발견할 수 있는데, 이러한 활동은 주어진 상황에 내재된 수학적 관계를 다룸으로써 가능한 것이다. 그러나 산술에서는 이러한 활동에서 자연스럽게 생각할 수 있는 '관계' 측면을 생략하고 있으며, 오히려 수와 연산을 강조하기 위해 규칙에 따르는 알고리즘을 그 핵심으로 보고 있다. 그 결과 산술에서 대상과 관계는 의미를 갖기 힘들게 되어 있으며, 이러한 학생들의 인식은 대수 학습에서 계속되면서 대수방정식의 풀이, 기호 표현 해석, 구어에서 기호적 표현으로의 변환, 대수적 구조의 이해 획득 등(Stephens, 2006)에 많은 문제를 일으키게 된다.

위와 같이 살펴보았을 때, 산술과 대수의 차이점과 유사성을 인정하고 산술과 대수의 학습

에서 이를 근본적으로 교육적으로 활용하는 것이 산술과 대수의 학습 양쪽에 이익을 가져다 준다는 것에 동의할 수 있다.

2. 기하와 대수

학교수학에서 산술과 대수를 같은 영역으로 보고 산술에서 대수로 이행하고자 하는 노력은 의외로 진지하지 않다. 산술과 대수가 수준차이가 있는 본질상 동일한 대상이라는 것을 명확히 논증한 예는 찾아보기 힘들다. 그러나, 역사적으로 Lee(1997), Lins & Kaput(2004)가 주장하듯, 대수는 산술에서 자라나왔으며 대수는 '일반화된 산술'이라고 여기는 관점이 여전히 우세하다.

그러나, 역사적으로 대수가 산술에서 발달한 것이 아니라는 견해도 있다. 즉, 역사적으로는 '선(先)산술, 후(後) 대수'의 관계가 아니라는 관점이다(Charnonneau, 1996, Katz, 2007).

Charbonneau(1996)는 '대수는 산술의 발전의 산물만은 아니다. 대수는 기하와 더 많은 관련을 맺고 있다'고 주장하였다. 그는 16세기 말의 Viéte가 대수를 세분화하기 전까지 기하는 Euclid 원론에서의 등식의 사용, Eudoxu의 비례론, Apollonius의 원뿔곡선론과 같은 대수 규칙을 증명하는 하나의 수단이었고, 마찬가지로, 대수는 Al-quarizmi가 방정식 $x^2+10x=39$을 풀기 위하여 기하 도형으로 설명하였다든지, Cardano가 방정식 $x^2=ax+cxy$, 방정식 $x^2+6x=20$을 도형으로 설명한 것 등과 같은, 기하 문제들을 푸는 수단이었다고 설명하였다.

Katz(2007) 또한 대수의 역사적 발달 과정을 깊이 들여다볼 때, 절대 산술에서 대수가 발달된 것이 아니라고 하였다. Katz(2007)은 다음과 같이 대수의 개념적 발달의 네 단계를 제시하였다.

- 기하적 단계 : 모든 대수적 개념이 기하적 상황을 설명하기 위한 기하적 개념인 단계.
- 정적인 방정식 풀이 단계 : 이 단계의 목표는 어떠한 관계를 만족하는 수를 찾는 것에 있는 단계.
- 동적인 함수 단계 : 동적인 함수 단계는 움직임이 대수의 핵심적인 개념이 되며 움직임을 대수적으로 표현하고자 하였던 단계.
- 추상의 단계 : 추상의 단계는 수학적 구조를 탐구하는 것이 목표가 되는 단계.

이에 따르면, 대수의 개념상의 발달 단계에서 기하적 상황 내지는 문제가 가장 앞서 있다. Katz(2007)는 대수의 발달이 개념적으로는 원래 기하적 문제에서 출발하였음을 여러 가지 예를 들어 설명하였다. 그 중의 하나는, 18세기 Euler와 Maclaurin의 메소포타미아 대수의 원류에 관한 설명을 인용한 것이다. 메소포타미아에서는 토지 측량사들이 이른바 "자르고 붙이는(cut and paste)" 방법을 사용하여 땅을 분할하였다. 이와 관련하여 바빌로니아 점토판(YBC 4663)에 <표 III-1>과 같은 문제가 주어져 있다.

<표 III-1> '자르고 붙이는' 방법에 의한 대수(Katz, 2007)

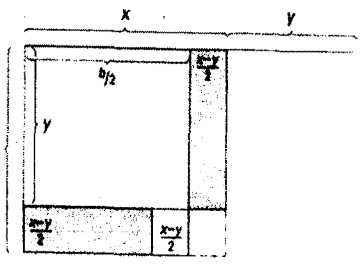
<문제> 주어진 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합이 $6\frac{1}{2}$이고, 직사각형의 넓이가 $7\frac{1}{2}$인 문제 (Neugebauer & Sachs, 1945, p. 70)에서, 가로와 세로의 길이를 구하여라.
필경사들의 풀이
먼저, $6\frac{1}{2}$의 반으로 $3\frac{1}{4}$을 얻는다. 그 다음, $3\frac{1}{4}$의 제곱을 하여 $10\frac{9}{16}$을 얻는다. 여기에서 주어진 $7\frac{1}{2}$을 빼면 $3\frac{1}{16}$을 얻는다. 이 수의 제곱근은 $1\frac{3}{4}$가 된다. 따라서, 가로의 길이는 $3\frac{1}{4}-1\frac{3}{4}=1\frac{1}{2}$이고, 세로의 길이는 $3\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}=5$이다.

이러한 기술은 분명히, "자르고 붙이는" 기하적 과정 전체를 다루고 있는 것으로 볼 수 있다. 그리고 바빌로니아인들이 남긴 이러한 과정은 점토판에 명시적으로 남기지는 않았지만, 하나의 과정 즉, 알고리즘을 기술한 것으로 볼 수 있다. 왜냐하면, 필경사들이 변을 [그림 III-1]과 같이 오늘날 우리가 $x+y=b,\ xy=c$ 라고 쓰듯, 일반적 체계를 따라 이름붙이는 체계의 일반화(같은 방식으로 풀린 유사한 문제들이 많이 있으므로)를 하기 위한 그림을 염두에 두고 있었다는 암시가 나타나기 때문이다(Katz, 2007).

필경사들은 총합 b를 반으로 나눔으로써 시작하고, 그것을 제곱하여 구성한다. $\frac{b}{2}=x-(\frac{x-y}{2})=y+(\frac{x-y}{2})$이기 때문에, $\frac{b}{2}$의 제곱은 $\frac{x-y}{2}$의 제곱으로 본래의 직사각형의 넓이 c를 초과하고, $(\frac{x+y}{2})^2-xy=(\frac{x-y}{2})^2$이다. [그림 III-1]에서 만약 $\frac{b}{2}$에 나중 사각형의 변을 더하면 x를 찾을 수 있고, $\frac{b}{2}$에서 그것을 빼면, 세로의 길이 y를 얻을 수 있다.

우리는 이것을 현대의 식으로써 그 알고리즘을 표현할 수 있다.

$$x=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}\quad y=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$



[그림 III-1] YBC 4633의 일반적 풀이와 풀이과정의 도해(Katz, 2007)

Radford(1996) 또한, HØyrup(1990)의 설명을 인용하여, 바빌로니아 대수학은 미지수를 포함한 수 연산인 '산술'의 형태가 아니며, 원시적으로 비연역적인 '자르고 붙이는' 기하학이 자리 잡고 있다는 것을 주장하였다.

Radford(1996)는 그 근거로 고대 바빌로니아의 점토판 BM 13901의 첫 번째 문제에 대하여, 고전적인 해석과 Høyrup(1986)의 해석을 비교하여 제시하였다. BM 13901의 첫 번째 문제의 고전적인 해석은 다음과 같다.

"정사각형의 넓이와 한 변의 길이를 더했더니, 그 값이 3/4이다"

이 문제에 대한 고전적 풀이는 "[정사각형의 한 변]의 계수를 1 이라 두자. 1을 두 부분으로 나누어라. 1/2×1/2=1/4을 3/4에 더하여라. 1은 1의 제곱이다. 제곱했었던 1/2을 빼면, 1/2이 [정사각형의 한 변]이다. (Thureau-Dangin, 1938a, van der Waerden, 1983, pp. 60-61; Radford, 1996).

HØyrup(1985, 1986)은 이 문제를 달리 해석한다. 그의 문제 해석은 다음과 같다.

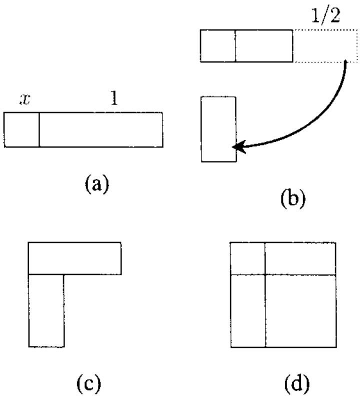
"정사각형의 넓이와 한 변의 길이를 더했더니, 그 값이 3/4이다"

이에 대한 풀이도 고전적인 해석과는 다르게 다음과 같다.

> 1을 돌출부의 길이로 둔다. 1을 반으로 잘라서 만든 1/2과 회전시켜 붙인 1/2 [직사각형, 여기서는 정사각형]으로 만든 1/4을 3/4에 붙이면 1이 되는데, 그 1은 정사각형이다. 1에서 당신이 덧붙였던 1/2을 떼어 내면, 1/2은 정사각형의 한 변이다(HØyrup, 1986, p. 450; 류성림, 정해남, 1998 재인용)

Høyrup의 해석은 [그림 III-2]와 같이, 먼저 한 변의 길이가 x인 정사각형에 길이가 1인 직사각형을 붙이고(a), 이 직사각형을 1/2씩 반으로 잘라, 그 중 하나를 아래쪽으로 붙인다(b).

작은 정사각형을 그려 넣으면 새로 그려진 아래쪽 정사각형은 넓이가 1/4인데(c), 그 1/4의 정사각형을 기준으로 전체의 큰 정사각형의 넓이가 1이 된다고 보고, 한 변의 길이를 구할 수 있는 완전한 정사각형을 얻는다(d). 따라서, x의 길이는 1/2이 되므로, x와 x^2의 합은 3/4이다.



[그림 III-2] BM 19301-(1)에 대한 Høyrup(1985, 1986)의 풀이(Radford, 1996)

이러한 기하적 대수의 단계는 형태는 다르지만, 고대 그리스 수학에서도 마찬가지로 나타난다. Katz(2007)는 <원론> 제Ⅱ권에서의 명제를 들어 직사각형과 정사각형을 '자르고 붙여' 조작하는 예를 보였는데, 그 명제는 다음과 같다.

원론 II-5 명제 : 만약 한 직선이 같은 선분으로 잘라지거나, 같지 않은 선분으로 잘라진다면, 같지 않은 직선에 포함된 직사각형은 구간의 점 사이에 있는 정사각형과 함께 전체적으로 반직선 위의 정사각형과 같다.

Katz(2007)에 의하면, 이 명제는 [그림 III-1]에 제시된 상황과 같은 맥락이며, 그렇게 보았을 때, "같지 않은 선분들"을 x와 y(그 합은 b)라고 생각해 본다면, 그 명제는 결국 $xy+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 라고 할 수 있고, 이의 결과는 $x+y=b$; $xy=c$ 의 방정식 체계의 해결에 쓰일 수 있다. xy대신 c로, $x+y$대신 b로 치환하면,

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c \text{ or } \frac{x-y}{2}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}.$$

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

이고, y에 관해서도 비슷한 결과를 얻을 수 있다. 그리스의 '기하적 대수'의 많은 부분이 바빌로니아 수학에서 유래된 것이 아닐까 하는 논란의 여지가 남아있기는 하다. 그러나, 바빌로니아 수학과 그리스 수학의 목적이 방정식의 해를 찾는 것이지만, 그 방법이 기하적 방법을 염두에 두고 풀어 나갔다는 점은 부인하기 어렵다.

Katz와 Radford가 보인 예를 통하여 시초에 기하적 상황 또는 기하적 풀이에서 대수가 시작하였다는 측면이 있었음을 충분히 인식할 수 있다.

Ⅳ. 대수로 가는 길

초등학교에서 배우는 산술 개념과 기능들을 대수를 배우는데 필요한 개념과 기능으로 어떻게 전환해야 하며 어떻게 연결해야 할 것인가를 고려하는 것은 매우 중요하다. 본 연구자는 위에서 살펴 본 산술과 대수의 유사성과 차이점, 역사적인 대수 발달에서의 기하의 역할, 조기대수 실행을 위한 연구들을 종합하여 다음과 같은 접근 방향을 도출하였다. 첫째, 대수 이전에 아동의 직관과 비형식적인 산술 추론을 통하여 대수와의 연결고리를 만들어 줄 수 있다. 두 번째 방법으로는, 산술과 대수의 유사성과

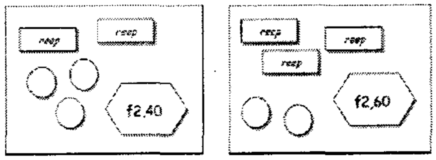
차이점에 대한 인식을 바탕으로 수들 간의 관계와 등식과 연산의 관계 즉, 대수적인 관계를 산술 추론에 이용하는 방법을 생각해 볼 수 있다. 세 번째로는 기하적 상황 또는 기하적 문제에서 시작하는 접근 방법을 생각해 볼 수 있다. 마지막으로, Pre-Algebra 방식의 접근 방법으로 변수와 문자 사용, 식의 구성 등의 도구를 직접 제공해주는 방법 등이 있다. 대수를 하나의 언어로 본다면, 대수적 추론과 기하적 접근은 의미론에, 대수적 관계를 고려한 산술 추론 및 Pre-Algebra식 접근은 구문론에 해당된다 할 수 있을 것이다. 또한, 위의 모든 범주의 방법에서 아동들의 비형식적 사고와 전략을 함께 고려할 수 있을 것이다.

1. 비형식적 전략을 고려하기

van Amerom (2003)은 기술적인 것에서 축약된 형태로의 표기상의 변화는 보다 형식적인 대수로 이행하는 것이며, 대수적 사고의 안내와 더불어, 대수적 표기 또한 형식적 대수로의 이행과 유기적인 관계를 지니고 있다고 보고, 대수적 표기의 안내에 의하여 형식적 대수로의 이행이 증진된다고 설명하였다. 그리고 이를 위한 학습 과정에서 학생들의 비형식적 전략들을 포함할 것을 주장하였다. 예를 들면, 'Petra는 Jacqueline보다 5점이 많다'를 'Petra 점수=Jacqueline 점수+5'로 표현할 수 있다. 이와 비슷하게, 'pA=3×pJ'의 표현이 제시되기도 하였다. 다음은 대수적 표기를 지도하는 과정에서의 아동들의 비형식적인 전략에서 시작하는 장면이다.

교사 : 누가 4점이고, 누가 9점이니?
Yvette : Annelies가 9에요.
교사 : 그것을 어떻게 쓸 수 있겠니? 칠판에 나와서 보여주렴.
Yvette : (나와서 씀) A-9p   j-3p
Sanne : 저 같으면 선(-) 대신 등호를 쓰겠어요.

또한, van Amerom(2003)은 [그림 IV-1]와 같은 문제를 제시하여 비형식적 전략의 예를 보였다.



[그림 IV-1] 비형식적 대수 추론 문제 (van Amerom, 2002)

위의 [그림IV-1]은 여러 가지 방법으로 이 문제에 접근해 볼 수 있지만, 산술적인 해결자는 비형식적인 '시행착오(trial and error)[3]' 방법을 사용하여 해결할 수 있다. 캔디바와 매직볼 각각에 어떤 수를 임의로 넣어 계산해 보고, 이를 조정하는 방법이다. 보다 대수적인 성향을 가진 사람도 또한 비형식적으로 두 그림을 관찰하고 왼쪽의 그림과 오른쪽의 그림의 차이가 캔디바 1개가 증가하고 매직볼 1개가 감소하였는데 전체의 가격은 20센트가 늘었으므로, 캔디바 1개는 매직볼 1개보다 20센트가 비싸다는 사실을 발견해낸다. 그리고 캔디바 1개를 줄이고 매직볼 1개를 늘려가는 식으로 하여 캔디바를 모두 소거하면, 매직볼 5개에 2.00프랑이 되고 매직볼 1개는 40센트라는 것을 알 수 있다.

이른 형식화가 대수적 사고를 방해하는 경우도 보고되고 있다. van Amerom(2003)에 따르면, 6, 7학년 학생들이 형식적으로, 그리고 비형식적인 전략을 모두 사용하여 방정식을 풀 수 있는데, 이 과정에서 형식적 기호화가 주요 방해

3) 제7차 교육과정에서는 '예상하고 확인하기' 방법으로 알려져 있음.

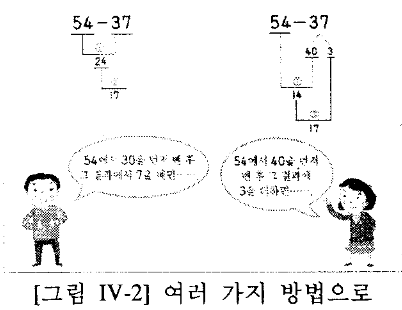
물로 발견되었다. 또한, 장지현(2008)의 연구에서도, 양들 간의 관계를 보고 양을 추론하는 문제를 그림으로 제시하였을 때, 초등학교 6학년보다 중학교 3학년 학생들의 정답률이 근소하긴 하지만 낮음을 보고하고 있다. 초등학교 6학년 학생들이 다양한 비형식적인 방법으로 문제에 접근하는데 비하여 중학교 3학년은 대다수의 학생들이 문자를 이용한 방정식으로 접근하였다. 이는 문자만을 이용한 방정식의 해결에서의 문제점을 시사한다고 하겠다.

우리나라 초등학교 수학 교육과정 5학년 1학기에서는 비형식적인 전략에 다가설 수 있도록 대수 이전의 비형식적인 전략을 몇 가지로 범주화하여 문제 유형에 따라 명시적으로 제시해 주고 있다. 이에 따르면, 그림으로 그려서 알아보기, 표로 그리기, 예상하고 확인하기, 거꾸로 풀기, 간단히 하기, 식으로 나타내기 등이다. 비형식적인 전략의 창안과 지도에서 그치지 말고, 그것을 대수적인 원리로 연결하여 대수로 안내하는 과정이 필요하다.

2. 대수적 관계를 고려한 산술 추론

대수적 추론은 학생들에게 수학적 관계에 대하여 생각하고 산술과 대수간의 연결을 만드는 기회를 제공한다(Koehler, 2004). 김성준(2003)은 대수에서 식을 하나의 대상으로 보고 조작하고, 문제 상황에서 관계와 구조를 파악하는 능력을 갖추려면, 양적인 추론을 통하여 수나 문자를 다룰 때 수나 문자가 의미하는 양에 초점을 맞출 수 있다고 제안하였다. Carpenter (2003;2004), Koehler(2004)등은 초등학교에서 산술에서 대수적 추론으로의 원활한 이행을 위하여 수 연산에서의 '관계적 사고(relational thinking)'전략을 발달시킬 것을 주장하였다. Carpenter et al (2005)에 따르면, '관계적 사고'는 주어진 식을 따라 단순히 답을 계산하기보다는 수와 연산의 근본적인 성질을 이용하여 수학적 표현을 변형하는 것이다. 산술 학습시에 대수적 관계를 고려한 사고는 수 연산을 재구성하기, 등식을 변환하기 등이다. 예를 들어, 85+69+15를 해야 할 때, 대수적 관계를 고려하여 사고하는 학생들은 암묵적으로 근본적인 성질들(교환법칙, 결합법칙 등)을 사용하고, 85+15=100임을 알아, 문제를 85+15+69로 변환한다. 학생들이 교환, 결합, 분배법칙을 명시적으로 아는 것은 아니지만, 이러한 성질을 이용하는 것은 표준 알고리즘을 사용할 때보다 관계적 사고를 할 때 더욱 드러난다. (Koehler, 2004).

우리나라 제7차 교육과정에서도 [그림IV-2]과 같이, 연산의 세로셈 알고리즘만을 익히도록 하는 데에서 벗어나, 대수적인 관계에 바탕을 둔 연산을 해 보도록 시도하고 있다. 아동들이 대수적인 관계를 고려한 사고를 통하여 수와 연산을 한다 하더라도, 아동들이 그 순간에 바로 대수적 성질을 명시적으로 깨닫고 이를 이용하였다고 보기는 어렵다. 그러나, 산술에서 대수적 관계를 고려하여 이를 이용한 문제를 해결하는 경험은, 이후 대수 학습에서 문제를 해결하기 위하여 수와 연산의 성질을 이용하여 식을 변형하거나, 기존에 알고 있던 사실을 이용하는 데에 커다란 바탕이 될 것임은 충분히 예상이 가능하다.



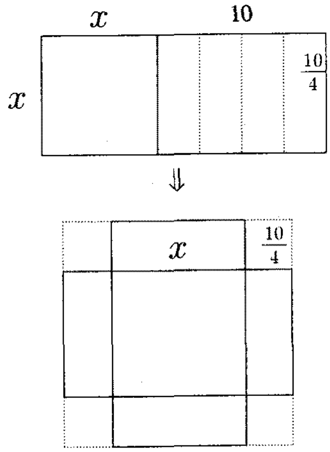
[그림 IV-2] 여러 가지 방법으로 뺄셈하기(2-1, 교육과학기술부, 2010)

3. 기하적으로 접근하기

현대 수학이라고 특징지어지는 특정한 형식의 추상화에 익숙하기 위해서는 긴 시간이 걸리며, 추상화에 대한 많은 경험이 필요하다. 그러나, Barton(2007)이 지적하였듯이, 일반화된 산술을 통하여 대수를 도입하는 것은 학생들이 이러한 유형의 추상화 활동에 충분히 훈련되지 않은 이유로 여러 가지 장벽을 만나게 되는 결과를 낳는다. 그는 새수학에서 구조에 집중하는 것과, 기초 계산능력 신장을 위하여 수에 집중하는 것은 어린 아동들의 경험의 일부분으로써 불충분하다고 지적한다. Thom(1998)도 또한, 현대수학에서 대수교육의 강화를 위하여 유클리드 기하의 많은 부분을 삭제한 것을 강하게 비판하면서, 학생들에게는 대수보다 기하가 훨씬 유용한 교과임을 강조한 바 있다.

Katz(2007)는 학생들에게 대수를 지도할 때 대수가 기하 문제 해결을 출발점으로 하여 발달한 만큼, 어린 아동들에게는 수보다는 발생론적으로 "실제적인 기하 문제" 혹은 기하 개념으로 접근해야 한다고 하였다. 즉, 대수를 수 자체로서 접근하기보다는 기하적인 상황 혹은 실제적인 기하 문제에서 시작하여 이를 바탕으로 산술 또는 대수로 접근해야 함을 강조하였다. 다음 $x^2+10x=39$ 의 풀이는 Al-Khwarizmi (Charbonneau, 1996)의 이른 바, '자르고 붙이는' 방법을 이용한 풀이인데, '자르고 붙여' 마지막으로 도출된 해는 일반적인 대수적 풀이에서 이항하여 나오는 해와 그 형태가 일치한다.

먼저, 방정식 $x^2+10x=39$을 정사각형의 넓이 x^2과 직사각형의 넓이 $10x$의 합이 39인 도형으로 본다. $10\times x$인 직사각형을 4등분하면, 각각의 4등분된 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{10}{4}$이 된다.



[그림 IV-3] Al-Khwarizmi의 '자르고 붙이기'방법의 방정식 풀이(Charbonneau, 1996)

이제, $\frac{10}{4}\times x$인 직사각형을 정사각형의 네 변에 덧붙인다. 이렇게 변형된 도형의 넓이는 39인데, 네 귀퉁이의 넓이를 포함한 넓이를 구함으로써 그 안에 포함된 x값을 구해낼 수 있다. 즉,

$$39+4\left(\frac{10}{4}\right)^2=\left\{x+2\left(\frac{10}{4}\right)\right\}^2$$

$$39+\left(\frac{10}{2}\right)^2=\left(x+\frac{10}{2}\right)^2$$

$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}$$

$$x=\sqrt{25+39}-5$$

으로 구해진다. 위와 같이, 도형을 이용하여 그것을 변형한 과정으로 풀어가는 방법은 x를 미지수로 놓고 그것을 구하기 위한 '이항과 소거' 방법보다 학습자에게 구체적이며 의미가 있다.

다시 말하면, 이러한 종류의 활동은 일반적으로 방정식 풀이에서 기계적인 알고리즘의 사용이나 수식의 조작에 대한 단점을 보완해 줄 수 있으며, 조기 대수로의 접근을 위한 기하적인 의미 풍부한 산술 활동으로써 가능하다.

4. 문자와 식의 도구 제공하기

어떠한 내용이나 활동이든지 교수에 도움이 되어 목표를 달성할 수 있게 하는 유용한 것이면 조기 대수의 일부가 될 수 있다(Lins & Kaput, 2004). 조기 대수 학습에 도움이 되는 방안 중 하나로, 학생들에게 직접적으로 문자와 식을 도입하여 대수추론에 이용하도록 하는 방법도 꽤 오랫동안 논의되어 왔다. 이러한 방식의 가장 대표적인 경우가 Pre-algebra인데, Pre-algebra는 보통 미국의 7~9학년 학생들이 대수 교육을 본격적으로 받기 이전에 입문을 위하여 따로 대수와 관련된 기초적인 내용을 배우는 코스이다. Pre-algebra에서는 자연수와 정수에 대한 복습에서부터 자연수의 분해, 연산의 성질(결합법칙, 분배법칙 등), 제곱수, 방정식의 기초, 변수, 분수와 소수, 등 다양한 내용을 다루며, 대수의 이해를 깊게 하기 위하여 기하 영역에 속한 넓이, 부피, 둘레 등의 내용을 다루기도 한다.

다음은 1차 방정식 풀이에 관한 Pre-algebra 교과서에서의 접근 방법이다.

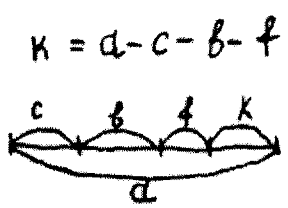
<문제> $x+9=11$, x를 구하여라.

$$\begin{aligned} x+9 &= 11 \\ \underline{-9} &= \underline{-9} \\ x+0 &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

검사 : $2+9=11$.

[그림 IV-4] 1차방정식 풀이(Bob Miller, 2007)

어린 학생들에게 이렇게 대수로 접근할 수 있도록 '문자와 식'이라는 도구를 제공할 수 있을 것인가에 관한 것은 이미 1960년대에 구소련의 Davydov의 연구로부터 그 가능성이 확인되었다. Davydov(1969; Frudenthal, 1974)는 초등 1~4학년을 대상으로 몇 년간에 걸쳐 문자와 식을 다룰 수 있는 능력을 길러주는 수업과 실험을 실행하였다. [그림 IV-5]과 같이, 1학년에서부터 전체와 부분의 관계를 문자로 표현하여 문자들 간의 관계를 파악하며, 미지수와 자리지기 값을 결정하고 식을 세울 수 있도록 하고, 4학년에서는 2차방정식의 풀이를 하도록 하였다. Davydov는 대부분의 아동들이 목표에 도달하였다고 기술하고 있는데, 우리는 이 실험을 통하여 어린 아동들이 생각했던 것보다 일찍 문자와 식을 받아들일 수도 있음을 확인할 수 있다.



[그림 IV-5] 1학년 아동의 부분과 전체의 관계 문자 표현(Davydov, 1969; Freudenthal, 1974)

Whitman(1976, 1982 ; Kieran & Chalouh, 1993 에서 재인용)은 Pre-algebra에서 문자를 미지수로 사용하는 것을 지도할 때, '원상복구식' 풀이 과정이 학생들이 방정식의 전체적인 구조를 보게 하며, 그 구조를 체계적으로 풀어나가는데 도움이 된다고 소개하기도 하였다. 또한, Kieran(1988; Kieran & Chalouh, 1993에서 재인용)은 산술문제에서 등호를 중심으로 방정식 만들기에 도움이 되는 '가리기식' 방법을 소개하였다. 이는 동치식을 방정식으로 만들기 위해 방정식 중 일부를 처음에는 손가락으로, 다음에는 □로, 마지막에는 문자로 바꾸는 방법을 이용하는 것이다.

이와 같이, 산술과 대수에 대한 여러 연구들의 견해를 살펴보면, 조기 대수 지도의 접근 방향을 설정할 수 있다. (1) 추론 활동에서 어린이들의 직관과 비형식적인 접근을 고려하여

야 하며 (2) 이 때의 추론은 대수적인 관계를 고려하도록 하며 (3) 산술 추론 혹은 대수 추론이 일어날 수 있는 실제적인 기하적 문제, 기하적 상황 등에서 출발하는 것이 좋으며 (4) 아동들이 대수적 체계에 진입하는데 필요한 기호의 사용과 식의 구성 등의 도구적인 요소를 함께 지도하여 주는 것이 필요하다 하겠다.

V. 맺는 말

본 연구에서는 지금까지의 조기 대수의 연구동향을 살펴보고, 산술과 대수의 간격을 좁히고자 이루어진 여러 시도를 살펴보았다. 대수교육에서 주로 어린이들의 대수 학습 발달 단계의 체계화, 대수 학습에서의 오류에 관한 연구가 주로 이루어졌던 이전에 비하여, 1990년대 이후부터 어린이들의 대수 능력에 관한 실증적인 연구들이 행하여졌다. 그 결과, 어린이들에게 적절한 도구를 제공하면, 생각했던 것보다 어린이들이 '더 잘 할 수' 있다는 것이다. 따라서, 조기대수 교육을 통하여 산술에서 나중 학년에서의 대수교육으로 연결하여 줄 수 있다는 인식을 갖게 하였다.

또한, 본고에서는 대수 교육과 관련된 선행교과의 본질을 탐구하였다. 산술과 대수의 유사성과 차이점에 관한 연구를 비롯하여, 대수의 기원과 발달에 대한 여러 논의를 살펴보았다. 산술과 대수가 형태상 같은 기호와 문자 및 식을 사용하고, 대수를 '일반화된 산술'이라고 보는 관점이 우세하나, 산술과 대수의 목적과 문자와 기호의 역할에 있어서도 차이점이 있다는 것을 확인하였다. 역사적으로는 기하가 대수의 출발점이었다는 인식을 할 수 있었으며, 이에 따라 본 연구자는 조기대수에 접근할 수 있는 가능성 있는 여러 가지 방향을 도출해 내었다. 그것은 (1) 아동들의 직관과 비형식적인 사고를 고려하기 (2) 대수적 관계를 고려한 산술 추론하기 (3) 기하 문제 또는 기하 상황에서의 출발하기 (4) 문자 사용과 식 세우기를 직접 지도하기에 관한 것이다.

이상과 같이, 본 연구에서는 조기대수 교육을 위한 방안을 큰 관점에서 논의하였다. 조기대수 교육을 위해서는 이러한 방법을 실현하기 위한 구체적인 실행연구가 이루어져야 할 것이다. 이를 위하여, 대수교육의 내용을 함께 고려하여야 한다. Bednarz, Kieran & Lee(1996)은 대수로 접근하기 위한 교수 학습 측면을 크게 일반화, 문제 해결, 모델링, 함수의 네 가지로 구분한 바 있다. 이것이 선형적인 순서가 있는 것은 아니며, 그들 자신도 무엇을 선택하느냐에 따른 "대가"를 치러야 할 것이라고 언급하였듯이, 대수를 무엇으로 볼 것인가에 따라 지도의 순서를 적절히 배분 또는 혼합 구성하여 적용할 필요가 있다. 따라서, 향후의 조기대수에 관한 연구는 앞의 네 가지 내용 측면에서의 접근을 자세히 살펴볼 필요가 있다.

지금까지 살펴본 내용에 비추어 현재 우리나라의 초등학교 교육과정에서의 산술 교육을 조기대수 교육의 측면에서 생각해 볼 필요가 있다. 우리나라 제7차 교육과정에서는 그 이전과 마찬가지로 기초적인 사칙연산이 매우 강조되어 있고, 대수적인 추론은 매학기 학기말 시험에서 제외되는 매 학년 마지막의 '문제 푸는 방법 찾기' 한 단원에만 국한되어 있다. 그리고 이 단원에서의 문제 푸는 방법 찾기는 아동들이 스스로의 비형식적인 방법을 시도해보는 것이 아니라, 이미 몇 가지로 "정리된" 비형식적 방법을 제시해 주고 그 방법대로 문제에 접근하도록 가르치고 있다. 따라서 아동들은 대수적인 추론을 스스로 할 기회를 가지지 못하며, 안내받지 않은 유형의 대수 추론 문제를 접하

였을 때는 매우 소극적이거나 수동적인 태도를 지닐 수밖에 없다는 문제점이 있다. 한 편, 세로셈의 알고리즘만이 아닌, 대수적인 관계를 바탕으로 한 여러 가지 방법으로의 연산을 해 보도록 하고 있다는 점에서 고무적이라 할 것이다. 그러나, 앞에서 제시한 여러 연구에서 밝힌 바와 같이, 산술에서 대수로의 원활한 이행을 위하여 초등학교 아동들에게 문자와 기호에 대한 좀 더 적극적인 접근의 가능성도 생각해 볼 때가 되었다고 생각하며, 이에 대한 후속 연구를 통한 발전적인 논의를 기대한다.

참고문헌

김성준(2003). '초기대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰. **수학교육학연구 13**(3). 대한수학교육학회.

교육과학기술부(2009). 수학 2-1. 서울교육대학교 국정도서편찬위원회.

류성림 · 정해남(1998). 대수학의 발전에서 기하와 산술의 역할 : 교수학적인 관점에서의 역사적 소견. *Approaches to Algebra*. 대한수학교육학회 1998년 하계 집중 세미나(22회) 논문집. 대한수학교육학회.

장지현 (2008). 대수적 사고 증진을 위한 연립방정식 지도 계열에 관한 연구. 건국대학교 석사학위 청구논문. 건국대학교.

Al-Khwarizmi, M.(1931). *The Algebra of Mohammed ben Musa*, Frederic Rosen, trans., Oriental Translation Fund, London.

Barton, B. (2007). Commentary from Mathematics Educator : Stagies in the History of Algebra with Implications for Teaching. Educational Studies in Mathematics. 66. 181-201 by Katz, V. J. (2007).

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (eds.) (1996). *Approaches to Algebra* : Perspectives for Research and Teaching. Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. L., Kaput J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Brizuela, B., & Lara-Roth, S. (2001a). Additive relations and function tables, In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. vincent (eds.), The future of the teaching and learning of algebra(Proceedings of the 12th ICMI Study conference, pp. 110-119). Melbourne, Australia : The University of Melbourne.

Carpenter, T., Ansell, E., Fennema, E., & Weisbdck, L.(1993). Models of problem-solving:A study of kindergarten children's problem-solving processes. Journal for Research in Mathematics Education, 24. 429-441.

Carpenter, T. P., Levi, L, (2000). Developing conceptions of algebaic reasoning in the primary grades. American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Carpenter, T., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school : Generalization and proof. The future of the teaching and learning of algebra. Proceeding of the 12th ICMI Study Conference, pp. 155-162. Melbourne, Australia : The University of Melbourne.

Carpenter, T. P.,Levi, L., Franke, M. L., Koehler, J. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. ZDM 2005 Vol. 37 (1).

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes : Algebra and Its Relation to Geometry. *Approaches to Algebra perspectives for Research and Teaching*. KIUWER ACADEMIC PUBLISHERS.

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra*, trans. by John Hewlett (reprinted from the 1840 editin), Springer-Verlag, New York.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. Educational Studies in Mathematics, 5, 391-412.

Hativa. N., Cohen. D. (1995). Self Learing of Negative Number Conceps by Lower Division Elementary Students Through Solving Computer-Provided Numerical Problems. Educational Studies in Mathematics 28 : 401-431.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, Educational Studies in Mathematics, 27, 59-78.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Paper presented at the Algebra Symposium, Washington, DC.

__________(2000). Teaching and learing a new algebra with understanding.(ERIC Document Repreduction Service No. ED 441 062).

Kieran, C., Wanger, S. (1989). The Research Agenda conference on algebra : Background and issues. *Research issues in the learning and teaching of algebra.*

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra : *The Transition from Arithmetic to Algebra, Research Ideas for the Classroom : Middle Grades mathematics*, NCTM. MacMillan Publishing Comany, New York.

Katz, V. J. (2007). Stagies in the History of Algebra with Implications for Teaching.Educational Studies in Mathematics. 66. 181-201

Koehler, J. (2004). Learning to think relationally and using relational thinking to learn. University of Wisconsin, Madison, Doctoral Diss.

Lee, L. (2001). Early algebra - But which algebra? in H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (eds). *The future of the teaching and learning of algebra*(Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 392-399). Melbourne, Australia : University, UK.

Lins & Kaput (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning : The Current State of the Field. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra.* The 12th ICMI Study. The University of Melbourne, Australia. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.

Mason, J. (1991). Supporting primary mathematics : *Algebra. Milton Keynes*, UK: Open University Press.

__________(1996). Expressing generality and roots of algebra. *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching.* Dordrecht, The Netherland : Kluwer.

Nathional Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation Standards for School Mathematics*. Reston. VA:Auther.

__________(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA : Auther.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery : On understanding, learning and teaching problem solving.* NY : John Wiley & sons, Inc.

Radford, L (1996). The Roles of Geometry and

Arithmetic in the Development of Algebra : Historical Remarks from a Didactic Perspective. *Approaches to Algebra perspectives for Research and Teaching.* KIUWER ACADEMIC PUBLISHERS.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22.

__________(1995). The development of algebra : confronting historical and psychological perspectives, Journal of Mathematical Behavior 14, 15-39.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and Relational Thinking : Preservice Elementary Teachers' Awareness of Opportunities and Misconceptions. Journal of· Mathematics Teacher Education 9 : 249-278.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A Lara-Roth, S., Peled, Irit. (2003) Algebra in Elementary School. International Group for the Psychology of Mathematics Education, the 25th PME-NA Conference (Honolulu, HI, Jul 13-18, 2003), v4 p127-134

Thom, R. (1998). "Modern" Mathematics : An Educational and Philosophic Error? : in New Directions in Phiosophy of mathematics, ed. by Tymoczko.(1998). pp 67-78. Princeton, NJ; Princeto university Press.

Urbańska, A. (1993). On the Numerical Competence of Six-Years-Old Children. Educational Studies in Mathematics 24 : 265-275, 1993.

Usiskin, Z. (1988). Concepts of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford(Ed.). *The ideas of algebra*, K-12 : 1988 Yearbook(pp. 8-19). Reston, Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, INC.

van Amerom, B. (2002). Reinvention of early algebra, Freudenthal Institute.

__________(2003). Focusing on Informal Strategies when Linking Arithmetic to Early Algebra. Educational Studies in Mathematics 54 : 63-75, 2003. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Whitehead, A. N.(1927). *Science and the Modern World.* pp. 198-199. Cambridge.

Research Trends and Approaches to Early Algebra

Lee, Hwa Young (Jeongwang Elementary School)
Chang, Kyong Yun (Konkuk University)

In this study, we discussed the way to teach algebra earlier through investigating to research trends of Early Algebra and researching about nature of subject involving algebra.

There is a strong view that arithmetic and algebra have analogous forms and that algebra is on extension to arithmetic. Nevertheless, it is also possible to present a perspective that the fundamental goal and role of symbols and letters are difference between arithmetic and algebra. And, we could recognize that geometry was starting point of algebra trough historical perspectives.

To consider these, we extracted some of possible directions to approaches to teach algebra earlier. To access to teaching algebra earlier, following ways are possible. (1) To consider informal strategy of young children. (2) Arithmetic reasoning considered of the algebraic relation. (3) Starting to algebraic reasoning in the context of geometrical problem situation. (4) To present young students to tool of letters and formular.

* **Key Words** : 조기대수(Early Algebra), 산술(arithmetic), 대수(algebra), '자르고 붙이는' 기하(cut and paste geometry), 비형식적 전략(informal strategy), 대수적 관계(algebraic relation)

논문 접수 : 2010. 07. 16
논문 수정 : 2010. 08. 12
심사 완료 : 2010. 08. 20