

압축성 이상(二相) 충격파관 문제에 대한 엄밀 리만해법

염 금 수,¹ 장 근 식^{*2}

EXACT RIEMANN SOLVERS FOR COMPRESSIBLE TWO-PHASE SHOCK TUBE PROBLEMS

Geum-Su Yeom¹ and Keun-Shik Chang^{*2}

In this paper, we present the exact Riemann solver for the compressible liquid-gas two-phase shock tube problems. We hereby consider both isentropic and non-isentropic two-phase flows. The shock tube has a diaphragm in the mid-section which separates the liquid medium on the left and the gas medium on the right. By rupturing the diaphragm, various waves are observed on the phasic field variables such as pressure, density, temperature and void fraction in the form of rarefaction wave, shock wave and material interface (contact discontinuity). Both phases are treated as compressible fluids using the linearized equation of state or the stiffened-gas equation of state. We solve several shock tube problems made of a high/low pressure in the liquid and a low/high pressure in the gas. The wave propagations are well resolved by the exact Riemann solutions.

Key Words : 이상유동(Two-Phase Flow), 이상 충격파관(Two-Phase Shock-Tube), 엄밀 리만해법(Exact Riemann Solver), 선형 상태방정식(Linearized Equation of State), 경화기체 상태방정식(Stiffened-Gas Equation of State)

1. 서 론

충격파관 문제는 초기에 관내 격막에 의해 서로 다른 열역학적 상태로 분리되어 있던 두 유체가 순간적인 격막의 파괴에 의해 생성된 여러 가지 충격파에 의해 변화하는 현상을 수학적으로 취급하는 고전적인 문제이다. 이것은 고속의 압축성 유체에서 발생하는 충격파 현상을 이해하는데 중요하며, 아울러 최근에 발달하고 있는 리만해법을 사용하여 복잡한 유동문제를 해석하는 풍상수치해법(upwind numerical method)의 초석을 쌓는 데에도 유용하다.

단상(single phase) 충격파관 문제는 실험적 또는 이론적으로 많이 연구되었으며, 이론적으로 엄밀한 리만해법(exact Riemann solver)들이 잘 알려져 있다[1]. 몇 가지 예를 들자면 Colella & Glaz[2]는 실제기체(real gas)에 대한 정확한 Riemann

해법을 제시하였다. Toro[3]는 covolume gas에 대한 정확한 Riemann 해법을 유도하고, 이를 Random Choice Method를 이용하여 계산하였다. 그리고 Ivings et al.[4]은 압축성 단상 액체에 대한 정확한 Riemann 해법을 개발하였다.

그러나 이상유동에서의 충격파 전파 현상은 원자력발전, 수중폭발, 로켓추진 등에 중요한 응용이 있음에도 불구하고 아직도 충분히 연구되지 않았는데, 이는 이상유동 내에서 전달되는 파동이 복잡한 것에 기인한다. 복잡한 현상에 대한 이해를 위해서는 먼저 계통적인 문제에 대하여 간단한 모델 문제를 만들어 해석하는 것이 중요하다. 본 논문의 이상 충격파관 문제는 Fig. 1에 보였듯이 초기에 중앙의 격막의 좌우에 기준으로 왼쪽에는 액체가 오른쪽에는 기체로 채워져 있다. 이 후 갑작스런 격막의 파괴로 인해서 액체와 기체 속으로 충격파와 팽창파가 서로 반대방향으로 전파되어 나가며, 유체의 이동에 따라 두 유체의 물질경계면(material interface)도 함께 이동해 나가는 현상을 모사하는 것이다.

본 논문의 목적은 이상유동 충격파관 문제에 대한 엄밀한 Riemann 해법을 1) 등엔트로피 이상유동, 2) 에너지방정식을 포함한 이상유동 두 가지 경우 모두에 대해 자세히 제시하는 것이다. 아울러 개발된 엄밀 Riemann 해법을 상이한 압력의 액체와 기체로 이루어진 이상 충격파관 문제들에 적용하여

접수일: 2010년 7월 7일, 수정일: 2010년 8월 9일,

게재확정일: 2010년 8월 13일.

1 정회원, 한국과학기술원 기계항공시스템학부 (박사후 연구원)

2 종신회원, 한국과학기술원 기계항공시스템학부

* Corresponding author, E-mail: kschang@kaist.ac.kr

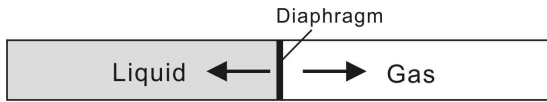


Fig. 1 Schematics of the two-phase shock tube problem

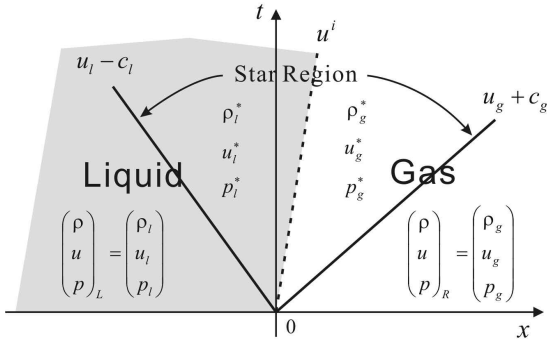


Fig. 2 Riemann solution of the two-phase shock tube problem

보고, 그 수치결과와의 물리적 의미를 살펴본다. 본 논문의 일부인 엔트로피 이상유동의 내용이 2010년 춘계 한국전산유체공학회 학술대회에서 발표된 바가 있다[9].

2. 이상유동 엄밀 리만해법

서로 다른 두 유체가 속도 u^i 로 움직이는 물질경계면에 의해 분리되어 있을 경우, 경계면 좌우에 있는 각각의 유체는 단상유동으로 취급될 수 있다[5]. 이 경우 Riemann 문제의 해법은 Fig. 2와 같이 도식적으로 나타낼 수 있다.

이때 물질경계면에서 두 유체는 다음과 같은 관계식을 만족하게 된다.

$$u_l^* = u_g^* = u^* = u^i, p_l^* = p_g^* = p^*, \rho_l^* \neq \rho_g^* \quad (1)$$

엄밀한 리만해법은 Star Region의 압력 p^* 로부터 다른 변수들을 순차적으로 얻는 것이며, 이때 p^* 는 다음의 압력함수 관계식을 통해 구해진다[1].

$$f(p^*) \equiv f_L(\mathbf{U}_L, p^*) + f_R(\mathbf{U}_R, p^*) + u_R - u_L = 0 \quad (2)$$

여기서 압력함수들, f_L 과 f_R 은 파동의 종류에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$f_K = \begin{cases} f_K^{\text{shock}} & \text{if } p > p_K \\ f_K^{\text{rarefaction}} & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ where } K = L, R \quad (3)$$

이 압력함수들은 유동의 지배방정식 및 상태방정식에 따라 다르게 주어지는데, 본 연구에서는 두 개의 지배방정식, 즉 1) 등엔트로피 이상유동 방정식, 2) 에너지 방정식을 포함한 이상유동에 대해 살펴본다.

3. 등엔트로피 이상유동

등엔트로피 이상유동의 경우 물질경계면을 기준으로 각각의 유체는 다음과 같이 등엔트로피 단상유동 방정식으로 분리해서 취급할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad \text{with } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \end{pmatrix} \quad (4)$$

3.1 상태방정식

유체의 상태를 결정하기 위해서는 상태방정식(equation of state)이 필요한데, 여기서는 기체와 액체 모두 압축성으로 취급한다. 등엔트로피 압축성 유체를 다루는 상태방정식으로는 여러 가지가 있을 수 있는데, 예를 들면 Tait's 상태방정식[6]이나 선형상태방정식[7] 등이 사용되어왔다. 본 연구에서는 다음과 같은 형태의 '선형상태방정식'을 사용한다.

$$\rho = \rho_\infty + \frac{p - p_\infty}{c^2} \quad (5)$$

여기서 ρ_∞ 는 기준밀도, p_∞ 는 기준압력, c 는 음속을 의미한다.

3.2 충격파 관계식

만약 비선형파가 충격파일 경우, 충격파를 사이에 두고 다음의 Rankine-Hugoniot 관계($\Delta \mathbf{F} = S \Delta \mathbf{U}$)가 성립한다.

$$\rho_K u_K - \rho_K^* u^* = S_K (\rho_K - \rho_K^*) \quad (6)$$

$$\rho_K u_K^2 + p_K - \rho_K^* u^{*2} - p^* = S_K (\rho_K u_K - \rho_K^* u^*) \quad (7)$$

여기서 $K = L, R$ 을 의미하고, S 는 충격파의 속도를 나타낸다. 상태방정식 식 (5)을 사용하여 위의 식들을 정리하면 다음과 같은 충격파에 대한 압력함수를 얻을 수 있다.

$$f_K(p^*) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_K} - \frac{1}{\rho_{\infty K} + \frac{p^* - p_{\infty K}}{c_K^2}} \right)} (p^* - p_K) \quad (8)$$

단, $K = L, R$.

3.3 팽창파 관계식

만일 비선형파가 팽창파일 경우는, 다음과 같은 일반적인 Riemann Invariants 관계식이 성립하다.

$$I_L \equiv u + \int \frac{c}{\rho} d\rho, \quad I_R \equiv u - \int \frac{c}{\rho} d\rho \quad (9)$$

상태방정식을 이용하여 위 식을 적분하면 Riemann Invariants에 대한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$I_L \equiv u^* + c_L \ln \rho_L^* = u_L + c_L \ln \rho_L \quad (10)$$

$$I_R \equiv u^* - c_R \ln \rho_R^* = u_R - c_R \ln \rho_R \quad (11)$$

위 식들을 정리하면, 최종적으로 다음과 같은 팽창파에 대한 압력함수를 얻을 수 있다.

$$f_K(p^*) = c_K \ln \left(\frac{\rho_{\infty K} + \frac{p^* - p_{\infty K}}{c_K^2}}{\rho_K} \right); \text{ 단, } K = L, R \quad (12)$$

3.4 Star 영역의 압력 및 속도

Star 영역의 압력은, 압력함수 관계식 식 (2)와 압력함수 식 (8)과 식 (12)를 통해 구할 수 있다. 이 때 주어진 방정식은 비선형 방정식으로 Newton-Raphson법과 같은 반복법을 통해 구할 수 있다. 반복법에 사용되는 초기값으로는 다음의 평균 값을 사용한다.

$$p^0 = \frac{1}{2}(p_L + p_R) \quad (13)$$

Star 영역에서의 압력 p^* 를 구하였다면, Star 영역의 속도 u^* 는 다음의 식으로 구해진다.

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2} \{f_R(p^*) - f_L(p^*)\} \quad (14)$$

3.5 전체영역에서 유동변수 샘플링

앞서 구한 Star 영역의 압력과 속도를 이용하여 전체 영역에서의 유동 변수들의 값을 얻을 수 있다. 구하고자 하는 영역에서의 유동변수 값은, 해당 비선형파의 형태 및 속도에 따라 각각 다르게 계산된다.

만약, 구하고자 하는 해가 팽창파 내부에 있다면, 그 해는 Riemann Invariants로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\rho = \rho_L e^{\frac{1}{c_L} \left(u_L - \frac{x}{t} \right) - 1} \quad \text{for } \frac{x}{t} = u - c \quad (15)$$

$$\rho = \rho_R e^{-\frac{1}{c_R} \left(u_R - \frac{x}{t} \right) - 1} \quad \text{for } \frac{x}{t} = u + c \quad (16)$$

그 외의 영역에서의 해는 아래에서 주어지는 파동의 속도를 이용하여 구하고자 하는 해가 위치하는 영역에 따라 샘플링(sampling)하여 구한다. 샘플링 방법에 대한 절차는 참고문헌[1]에 자세히 나타나 있으므로 여기서는 생략한다.

충격파의 속도는 다음과 같이 주어진다.

$$S_K = \frac{\rho_K^* u^* - \rho_K u_K}{\rho_K^* - \rho_K}, \quad \text{단 } K = L, R \quad (17)$$

팽창파의 선단(head) 속도는 다음과 같다.

$$S_L = u_L - c_L, \quad S_R = u_R + c_R \quad (18)$$

또한, 팽창파의 꼬리(tail) 속도는 다음과 같다.

$$S_L = u^* - c_L, \quad S_R = u^* + c_R \quad (19)$$

4. 에너지 방정식이 포함된 이상유동

에너지 방정식을 포함하는 이상유동의 경우 물질경계면을 기준으로 각각의 유체는 다음과 같이 Euler 단상유동 방정식으로 분리해서 취급할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0, \quad \text{여기서 } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix} \quad (20)$$

위에서 $E = e + u^2/2$ 이고, e 는 내부에너지를 의미한다.

4.1 상태방정식

기체와 액체 모두 압축성으로 취급하기 위해 다음과 같은 경화기체(stiffened-gas) 상태방정식[8]을 사용한다.

$$e = \frac{p + \gamma p_\infty}{(\gamma - 1)\rho} + q, \quad T = \frac{p + p_\infty}{(\gamma - 1)\rho C_v} \quad (21)$$

여기서 γ 는 비열비, T 는 온도, p_∞ 는 기준압력, q 는 상수 값, C_v 는 등적비열을 의미한다. 또한, 음속은 다음과 같이 정의된다.

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p + p_\infty)}{\rho}} \quad (22)$$

4.2 충격파 관계식

충격파에 대해서는 다음과 같은 Rankine-Hugoniot 관계가 성립한다.

$$\rho_K u_K - \rho_K^* u^* = S_K (\rho_K - \rho_K^*) \quad (23)$$

$$\rho_K u_K^2 + p_K - \rho_K^* u^{*2} - p^* = S_K (\rho_K u_K - \rho_K^* u^*) \quad (24)$$

$$u_K (\rho_K E_K + p_K) - u^* (\rho_K^* E_K^* + p^*) = S_K (\rho_K E_K - \rho_K^* E_K^*) \quad (25)$$

여기서 $K = L, R$ 이다. 위 식을 내부에너지에 대해 정리하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$e_K^* - e_K = \frac{1}{2} (p^* + p_K) \left(\frac{\rho_K^* - \rho_K}{\rho_K^* \rho_K} \right) \quad (26)$$

상태방정식, 식 (21)을 사용하여 내부에너지를 소거하면, 밀도와 압력에 대해 다음의 관계가 주어진다.

$$\rho_K^* = \rho_K \left[\frac{2\gamma_K p_{\infty K} + (\gamma_K - 1)p_K + (\gamma_K + 1)p^*}{2\gamma_K p_{\infty K} + (\gamma_K + 1)p_K + (\gamma_K - 1)p^*} \right] \quad (27)$$

이상의 식들을 정리하면, 최종적으로 다음과 같은 충격파에 대한 압력함수를 얻을 수 있다.

$$f_K(p^*) = \frac{p^* - p_K}{Q_K} \quad (28)$$

$$Q_K = \sqrt{\frac{p_L - p^*}{\frac{1}{\rho_K^*} - \frac{1}{\rho_K}}} \quad (29)$$

여기서 $K = L, R$ 이다.

4.3 팽창파 관계식

팽창파에 대한 관계식을 유도하기 위해서 먼저 다음의 일반적인 엔트로피 관계식을 살펴보자.

$$Tds = de + pdv; \quad \text{단, } v = 1/\rho \quad (30)$$

$$Tds = dh - \frac{1}{\rho} dp; \quad \text{단, } h = e + \frac{p}{\rho} \quad (31)$$

여기서 s 는 엔트로피, h 는 엔탈피를 의미한다. 상태방정식, 식 (21)을 이용하여 위의 식들을 온도, 압력, 밀도에 대해 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Tds = C_v dT + (p + p_\infty) dv \quad (32)$$

$$Tds = \gamma C_v dT - \frac{(\gamma - 1) C_v T}{p + p_\infty} dp \quad (33)$$

위 두식을 적분하면 다음과 같이 된다.

$$s_1 - s_2 = C_v \ln \frac{T_1}{T_2} - (\gamma - 1) C_v \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (34)$$

$$s_1 - s_2 = \gamma C_v \ln \frac{T_1}{T_2} - (\gamma - 1) C_v \ln \frac{p_1 + p_\infty}{p_2 + p_\infty} \quad (35)$$

팽창파 전후로는 등엔트로피 관계가 성립하므로, 위 식들에 등엔트로피 조건($s_1 = s_2$)을 적용하면 아래와 같은 등엔트로피 관계식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{p_1 + p_\infty}{p_2 + p_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \left(\frac{p_1 + p_\infty}{p_2 + p_\infty} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \quad (36)$$

앞서 제시된 일반적인 Riemann Invariants 관계식 식 (9)를 등엔트로피 관계식 식 (36)을 이용하여 적분하면 다음의 Riemann Invariants 관계식을 얻을 수 있다.

$$I_L \equiv u^* + \frac{2c_L^*}{\gamma-1} = u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1} \quad (37)$$

$$I_R \equiv u^* - \frac{2c_R^*}{\gamma-1} = u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1} \quad (38)$$

위 식을 압력함수에 대한 식으로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$u^* = u_L - f_L(p^*) = u_L - \frac{2c_L}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p^* + p_\infty}{p_L + p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (39)$$

$$u^* = u_R + f_R(p^*) = u_R + \frac{2c_R}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p^* + p_\infty}{p_R + p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (40)$$

따라서 팽창파에 대한 압력함수는 다음과 같이 표현된다.

$$f_K(p^*) = \frac{2c_K}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p^* + p_\infty}{p_K + p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right], \text{ where } K = L, R \quad (41)$$

4.4 Star 영역의 압력 및 속도

Star 영역의 압력과 속도는 앞서 제시한 등엔트로피 이상 유동의 경우와 유사한 방법으로 구할 수 있다.

4.5 전체영역에서 유동변수 샘플링

전체 영역에서의 유동변수 값은 등엔트로피 이상유동의 경우와 비슷한 방법으로 구할 수 있으며, 각각의 비선형 파에 따른 속도는 아래와 같이 주어진다.

팽창파 내부에서의 해는 Riemann Invariants로 부터 구해진다. 왼쪽 팽창파($x/t = u - c$)에 대한 해는 다음과 같다.

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left[\frac{(\gamma-1)}{2} u_L + c_L + \frac{x}{t} \right] \quad (42)$$

$$p = (p_L + p_\infty) \left[\frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_L} \left(u_L - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - p_\infty \quad (43)$$

$$\rho = \rho_L \left[\frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_L} \left(u_L - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (44)$$

오른쪽 팽창파($x/t = u + c$)에 대한 해는 다음과 같다.

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left[\frac{(\gamma-1)}{2} u_R - c_R + \frac{x}{t} \right] \quad (45)$$

$$p = (p_R + p_\infty) \left[\frac{2}{(\gamma+1)} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_R} \left(u_R - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - p_\infty \quad (46)$$

$$\rho = \rho_R \left[\frac{2}{(\gamma+1)} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_R} \left(u_R - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (47)$$

그 외 영역에서는 다음과 같은 파동의 속도를 이용하여 샘플링 한다.

충격파의 속도는 다음과 같이 주어진다.

$$S_L = u_L - \frac{Q_L}{\rho_L}, \quad S_R = u_R + \frac{Q_R}{\rho_R} \quad (48)$$

여기서 Q 는 식 (29)에 정의되어 있다.

팽창파의 선단(head) 속도는 다음과 같다.

$$S_L = u_L - c_L, \quad S_R = u_R + c_R \quad (49)$$

또한, 팽창파의 꼬리(tail) 속도는 다음과 같다.

$$S_L = u^* - c_L, \quad S_R = u^* + c_R \quad (50)$$

5. 계산결과

본 연구에서는 이상유동 충격파관 문제에 대해, 액체상은 물을 기체상은 공기와 헬륨에 대해 고려하였다. Table 1은 물,

Table 1 Parameters of the linearized and the stiffened-gas equation of state for water, air, and helium

		Water	Air	Helium
Linearized EOS	ρ_∞ (kg/m ³)	1000	0	-
	p_∞ (Pa)	10 ⁶	0	-
	c (m/s)	1000	$\sqrt{10^5}$	-
Stiffened-gas EOS	γ	2.35	1.4	1.667
	p_∞ (Pa)	10 ⁹	0	0
	q (10 ³ J/kg)	-1167	0	0

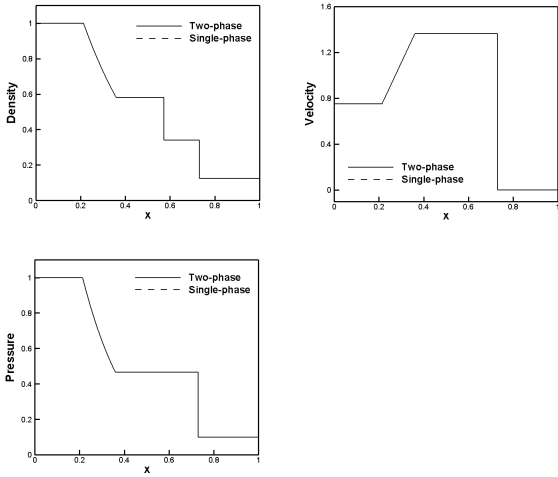


Fig. 3 Exact solution for Sod's single-phase shock tube problem

공기, 헬륨에 대해 두 가지 상태방정식에 대한 상수값들을 나타낸다[7,8].

5.1 단상유동 충격파관 문제

먼저, 본 연구에서 제시된 방법을 검증하기 위해서 앞절에서 제시한 이상유동 엄밀 리만해법을 사용하여 단상유동(공기) 충격파관 문제를 계산하였다. 검증에 사용된 문제는 Sod's shock tube test 문제로서, 이것은 일반적으로 단상유동의 검증 문제로 잘 알려진 문제이다[1].

충격파관의 길이는 1 m 이고 격막은 0.3 m에 위치하며, 이때 초기 조건은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.75 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Fig. 3은 $t = 0.2$ 에서의 계산결과를 보여준다. 그림에서 나타나듯이 본 이상유동 엄밀 리만해법의 결과와 단상유동의 엄밀 리만해법[1]의 결과가 정확히 일치함을 알 수 있다.

5.2 등엔트로피 이상유동 충격파관 문제

여기서는 두 개의 등엔트로피 이상 충격파관 문제를 고려한다. 두 문제 모두 충격파관의 길이는 1 m이고 격막의 위치는 0.7 m이다. 그리고 격막의 왼쪽에는 물이 오른쪽에는 공기가 채워져 있다.

첫 번째 문제는 고압의 물과 저압의 공기에 대한 문제이며, 이때 초기 조건은 다음과 같다.

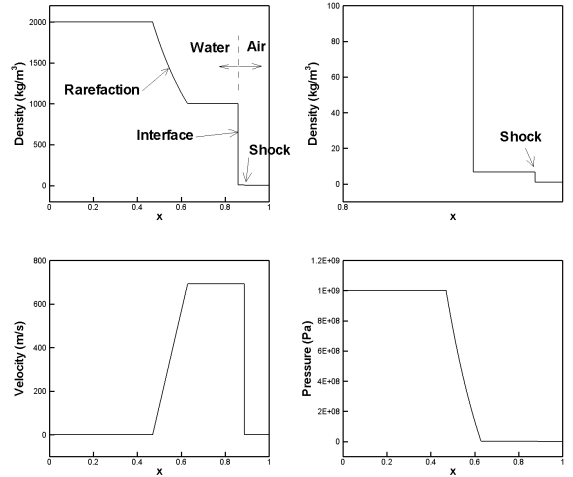


Fig. 4 Isentropic two-phase shock tube problem: high pressure water and low pressure air

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0 \text{ m/s} \\ 10^9 \text{ Pa} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0 \text{ m/s} \\ 10^5 \text{ Pa} \end{pmatrix}$$

Fig. 4는 $t = 0.23 \text{ ms}$ 에서의 계산결과를 보여준다. 이 그림에서 왼쪽의 물속으로 진행되는 팽창파, 오른쪽으로 이동하는 물질경계면, 그리고 오른쪽 공기속으로 진행되는 충격파를 볼 수 있다. 밀도를 확대한 그림에서 나타나듯이 충격파의 크기는 상대적으로 매우 작다. 또한 압력감소는 대부분 물속으로 진행되는 팽창파에 의해 이루어지며, 공기속으로 진행되는 충격파에 의해서는 상대적으로 압력 감소가 매우 작음을 알 수 있다.

두 번째 문제는 저압의 물과 고압의 공기에 대한 문제이다. 초기 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0 \text{ m/s} \\ 10^5 \text{ Pa} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0 \text{ m/s} \\ 10^8 \text{ Pa} \end{pmatrix}$$

Fig. 5는 $t = 0.6 \text{ ms}$ 에서의 계산결과를 보여준다. 이 그림에서 왼쪽의 물속으로 진행되는 충격파, 왼쪽으로 이동하는 물질경계면, 그리고 오른쪽 공기 속으로 진행되는 팽창파를 볼 수 있다. 압력 그림에서 나타나듯이 공기속을 진행하는 팽창파에 의해 약 20 MPa의 압력 차이가 발생하고, 물속으로 진행되는 충격파에 약 80 MPa의 압력 차이가 발생한다.

5.3 에너지 방정식을 고려한 이상유동 충격파관 문제

여기서는 에너지 방정식을 포함하는 이상 충격파관 문제를

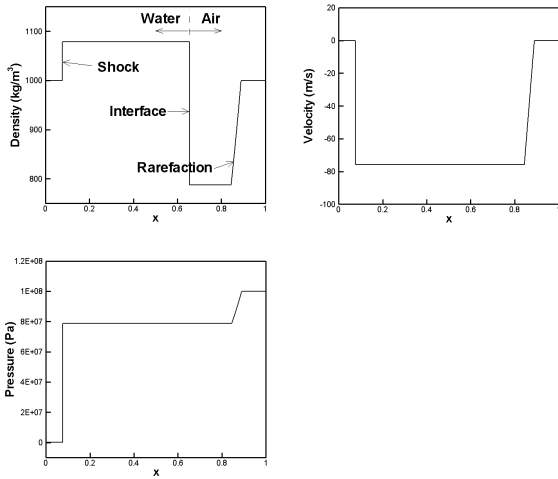


Fig. 5 Isentropic two-phase shock tube problem: low pressure water and high pressure air

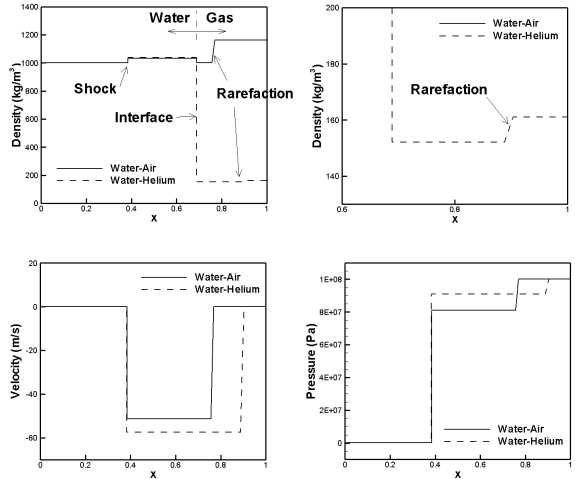


Fig. 7 Two-phase shock tube problem with an energy equation: low pressure water and high pressure air/helium

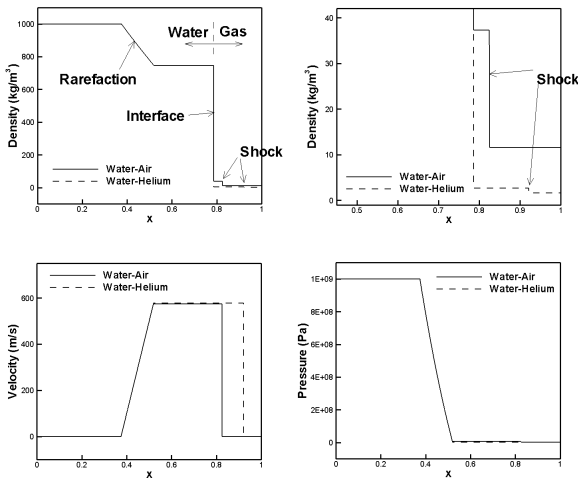


Fig. 6 Two-phase shock tube problem with an energy equation: high pressure water and low pressure air/helium

물과 두 가지 기체(공기, 헬륨)에 대해 살펴본다. 충격파관의 길이는 1 m이고 격막의 위치는 0.7 m이다. 격막의 왼쪽은 액체, 오른쪽은 기체로 채워져 있다.

첫 번째 문제는 고압의 물과 저압의 공기/헬륨에 대한 문제로서 초기 조건은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 1000 \text{ kg/m}^3 \\ 0 \text{ m/s} \\ 10^9 \text{ Pa} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ u \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 300 \text{ K} \\ 0 \text{ m/s} \\ 10^6 \text{ Pa} \end{pmatrix}$$

여기서, 기체상에 대해서는 초기 조건으로 온도를 사용하였으며 해당 조건에서 공기 밀도는 11.6 kg/m^3 이고 헬륨의 밀도는 1.6 kg/m^3 이다. Fig. 6은 $t = 0.15 \text{ ms}$ 에서의 계산결과를 보여준다. 이 그림에서 왼쪽의 물속으로 진행되는 팽창파, 오른쪽으로 이동하는 물질경계면, 그리고 오른쪽 공기와 헬륨속으로 진행되는 충격파를 볼 수 있다. 팽창파와 물질경계면의 속도는 공기와 헬륨 두 가지 모두 유사한 결과를 보인다. 하지만 충격파의 속도는 헬륨의 경우가 공기보다 더 빠름을 알 수 있다. 또한, 등엔트로피 결과와 유사하게, 압력감소는 대부분 물에서 발생한다.

두 번째 문제는 저압의 물과 고압의 공기/헬륨에 대한 것이며, 초기 조건은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 1000 \text{ kg/m}^3 \\ 0 \text{ m/s} \\ 10^5 \text{ Pa} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ u \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 300 \text{ K} \\ 0 \text{ m/s} \\ 10^8 \text{ Pa} \end{pmatrix}$$

앞에서와 같이 기체상에 대한 초기 조건으로 온도를 사용하였으며 해당 조건에서 공기 밀도는 1161 kg/m^3 이고 헬륨의 밀도는 161 kg/m^3 이다. Fig. 7은 $t = 0.2 \text{ ms}$ 에서의 계산결과를 보여준다. 이 그림에서 왼쪽의 물속으로 진행되는 충격파, 왼쪽으로 이동하는 물질경계면, 그리고 오른쪽 공기와 헬륨속으로 진행되는 팽창파를 볼 수 있다. 물질경계면의 속도는 공기와 헬륨 두 가지 경우 모두 거의 같다. 하지만 팽창파의 속도는 헬륨의 경우가 공기보다 더 빠름을 알 수 있다.

일반적으로, 이상충격파관에서 발생하는 파동의 형태는 좌/우 유체의 초기속도에 따라 다르게 나타나는데, 이 경우도 본 리만해법으로 간단히 계산이 가능하다. 예를 들어, 좌/우 유체의 속도가 $u_L = 100\text{m/s}$, $u_R = 0\text{m/s}$ 일 때 각각 왼쪽과 오른쪽으로 진행되는 두 개의 충격파와 오른쪽으로 진행되는 물질경계면이 발생하게 된다.

본 연구에서는 기존의 연구[4]에서와 같이 물의 점성효과를 무시하였으나, 점성이 매우 큰 유체의 경우는 이를 고려하는 것도 필요하다.

6. 결 론

본 논문에서는 등엔트로피 이상유동과 에너지방정식을 고려한 이상 충격파관에 대한 엄밀한 리만해법을 제시하였다. 이를 응용하여 물과 공기/헬륨에 대한 여러 가지 이상 충격파관 문제를 계산하였다. 계산 결과로부터 이상 충격파관에 의해 생성된 충격파, 물질경계면, 팽창파의 거동을 살펴보았으며, 각각의 유동변수에 대해서 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

본 리만해법은 원자력 발전에 관련하여 배관의 갑작스런 파열, 수격현상 등의 응용문제에 사용될 수 있으며, 이상유동 해석을 위해 새로운 수치해법이 개발되면 이를 검증하는 목적으로도 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 연구는 2010년도 2단계 두뇌한국(BK)21사업에 의하여 지원되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] 1999, Toro, E.F., *Riemann Solver sand Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] 1985, Colella, P. and Glaz, H.M., "Efficient Solution Algorithm for the Riemann Problem for Real Gases," *J. Comput. Phys.*, Vol.59, pp.264-289.
- [3] 1989, Toro, E.F., "A Fast Riemann Solver with Constant Covolume Applied to the Random Choice Method," *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, Vol.9, pp.1145-1164.
- [4] 1998, Ivings, M.J., Causon, D.M. and Toro, E.F., "On Riemann Solvers for Compressible Liquids," *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, Vol.28, pp.395-418.
- [5] 2003, Andrianov, N., Saurel, R. and Warnecke, G., "A Simple Method for Compressible Multiphase Mixtures and Interface," *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, Vol.41, pp.109-131.
- [6] 2003, Paillère, H., Corre, C. and Garcia Cascales, J.R., "On the Extension of the AUSM+ Scheme to Compressible Two-Fluid Models," *Comput. Fluids*, Vol.32, pp.891-916.
- [7] 2003, Evje, S. and Flåtten, T., "Hybrid Flux-Splitting Schemes for a Common Two-Fluid Model," *J. Comput. Phys.*, Vol.192, pp.175-210.
- [8] 2008, Saurel, R., Petitpas, F. and Abgrall, R., "Modelling Phase Transition in Metastable Liquids: Application to Cavitating and Flashing Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol.607, pp.313-350.
- [9] 2010, 염금수, 장근식, "공기-물 이상매질 충격파관 문제에 대한 정확한 Riemann 해법," *한국전산유체공학회 춘계학술대회 논문집*, pp.365-367, 제주 KAL 호텔.