

# 탄성파의 모드 전환과 에너지 투과율

## Mode Conversion and Energy Transmission Ratio of Elastic Waves

김 태 언\* · 전 한 용\* · 김 진 오† · 박 준 관\*\*

Tae Eon Kim, Han Yong Chun, Jin Oh Kim and Joonkwan Park

(2009년 12월 31일 접수 ; 2010년 1월 25일 심사완료)

**Key Words** : Elastic Wave(탄성파), Mode Conversion(모드 전환), Energy Transmission Ratio(에너지 투과율)

### ABSTRACT

This paper deals with the energy transmission ratio of the elastic waves transmitting through a solid wall. Based on the displacement of the reflected and transmitted waves relative to the incident waves, the energy transmission ratio of the wave was obtained by multiplying the vibration velocity and stresses. Numerical calculation provided with the transmission ratio and refraction angle corresponding to the incidence angle, and it showed the mode conversion from the incident longitudinal wave to the transmitted transverse wave in particular incidence angle range. The paper established a procedure to find the incidence angle of the maximum energy transmission ratio and confirmed it by experiment.

### 1. 서 론

초음파를 이용하는 센서 기술은 유체의 여러 가지 물리량을 측정하는 데에 활용되고 있다<sup>(1)</sup>. 가령 관 내에서 흐르는 유체의 유속을 측정하는 초음파 센서가 있다<sup>(2)</sup>. Fig. 1에 보인 바와 같이 유체가 흘러가는 방향으로 초음파를 전파시키면 전파 시간이 짧아지고, 반대 방향으로 초음파를 전파시키면 전파 시간이 길어진다. 이러한 시간 차로부터 유속을 환산해내는 것이 초음파 유량계의 가장 기본적인 원리이다.

유체 내에 초음파를 전파시키려면, 변환기(transducer)로써 전기 신호를 역학적 진동으로 변환하고, 그 진동이 유체 경계면에까지 고체에서 탄성파 형태로 전파하게 한다. Fig. 1에서 보듯이 탄성파의 경로

는 송신 변환기로부터 웨지(wedge)를 거쳐 관 벽으로 이어진다. 웨지는 변환기 소자와 관 벽 사이에서 탄성파의 전파경로를 이어주는 물체이다. 이는 송신부에서 탄성파가 관 벽 경계면에 적절한 입사각으로 도달하여 관 벽으로 투과해 들어가도록 하는 요소이다. 수신부에서는 관 벽을 통해 전파된 탄성파가 웨지를 거쳐 수신 변환기로 전파해 가는 경로가 된다.

탄성파는 경계면을 통과할 때 반사와 투과가 함께 일어나므로 파동 에너지의 일부는 반사하고 나머지가 투과한다. 센서 시스템에서는 송신부 파동 에너지가 수신부 변환기에 최대로 도달하는 것이 바람직하다. 이 논문은 경계면에서 탄성파의 에너지 투과율을 다룬다.

고체 내의 탄성파는 종파나 횡파의 형태로 전파하는데, 고체 경계면에 비스듬히 입사하여 투과할 때에 종파와 횡파로 굴절한다. 입사각과 굴절각의 관계는 Snell의 법칙으로 설명된다<sup>(3,4)</sup>. 경우에 따라서는 종파로 입사한 파동이 횡파로만 굴절하거나 횡파로 입사한 파동이 종파로만 굴절되어 투과한다. 이러한 현상을 모드 전환(mode conversion)이라 한

† 교신저자; 정회원, 숭실대학교 기계공학과  
E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : (02)820-0662, Fax : (02)820-0668

\* 숭실대학교 대학원 기계공학과

\*\* (주)파나메츠

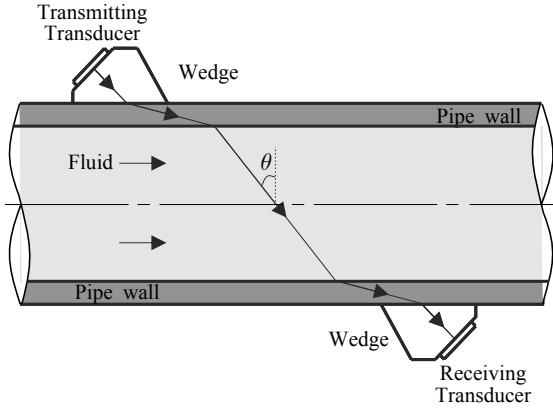


Fig. 1 Schematic diagram of the elastic wave propagation through a pipe in ultrasonic flowmetry

다<sup>(3-5)</sup>. 이 논문은 모드 전환에 의한 탄성파의 투과도 다룬다. 탄성파가 변환기에서 웨지를 거쳐 관 벽에 전달되고, 또한 유체에서 전파한 파동이 관 벽을 통해 웨지를 거쳐 변환기에 도달함에 있어서, 최대의 에너지 투과율을 확보하는 방안을 제시하는 것이 이 논문의 목적이다.

## 2. 파동 에너지 투과 해석

파동은 매질의 전파가 아니라 에너지의 전파이므로 에너지의 관점에서 이론적으로 해석할 필요가 있다. 종파나 횡파로 입사하는 탄성파의 반사율과 투과율을 에너지의 관점에서 이론적으로 식을 유도한다.

두 가지 고체 매질의 경계면에 비스듬히 입사하는 탄성파는 Fig. 2에 보인 바와 같이 일반적으로 종파와 횡파의 형태로 반사함과 아울러 종파와 횡파의 형태로 굴절하여 투과한다<sup>(3,4)</sup>. Fig. 2에서 첨자 0은 입사파를 의미하며, 종파 또는 횡파이다. 또한 첨자 1과 2는 각각 반사파의 종파와 횡파이고, 첨자 3과 4는 각각 투과파의 종파와 횡파이다. Fig. 2에 보인 바와 같이 2차원 평면에서 전파하는 파동의 변위벡터  $\mathbf{u}$ 는 다음 식과 같이 표현된다<sup>(3)</sup>.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = A \mathbf{d} \exp[jk(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - ct)] \quad (1)$$

여기서  $A$ 는 진폭,  $\mathbf{d}$ 는 진동변위방향 단위벡터,  $\mathbf{p}$ 는 전파방향 단위벡터,  $k$ 는 파동수,  $c$ 는 전파속도,  $\mathbf{r}$

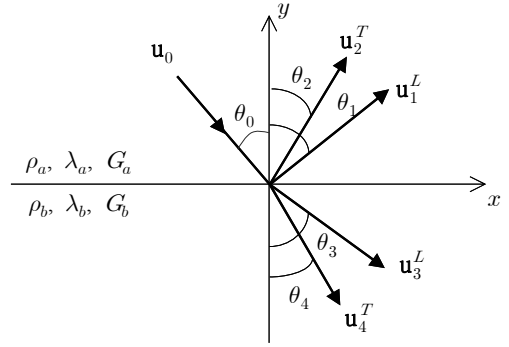


Fig. 2 Reflection and refraction of obliquely incident elastic waves onto a solid interface

( $= x \mathbf{i}_x + y \mathbf{i}_y$ )는 위치벡터이다.

탄성파를 다루는 문헌들은 대개 파동 변위 또는 응력의 관점에서 반사율과 투과율을 제시한다<sup>(3,4)</sup>. 단위면적 당 파동 에너지율은 파동의 진동속도와 응력의 곱으로 계산되며, 이것의 시간 평균인 파동 세기(intensity)는 다음 식과 같이 표현된다<sup>(3)</sup>.

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \quad (2)$$

여기서  $\rho$ 는 매질의 밀도이고,  $\omega(=kc)$ 는 파동의 진동수이며,  $\mathbf{n}$ 은 면에 수직방향 단위벡터이다.

변위 벡터  $\mathbf{u}(=u_x \mathbf{i}_x + u_y \mathbf{i}_y)$ 의 성분  $u_x$ 와  $u_y$ 로써 파동 응력이 다음 식과 같이 표현된다<sup>(3)</sup>.

$$\sigma_y = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3a)$$

$$\tau_{yx} = G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (3b)$$

여기서  $\sigma_y$ 는  $y$ 방향 수직응력,  $\tau_{yx}$ 는 전단응력이고,  $\lambda$ 와  $G$ 는 Lamé상수이며,  $G$ 는 전단 탄성계수이다.

### 2.1 입사 종파의 투과파

Fig. 2에서와 같이 두 매질의 경계면에서 매질  $a$  쪽에서 매질  $b$  쪽으로 종파가 입사각  $\theta_0^L$ 로 입사하는 경우를 고려한다. 입사파의 전파방향 단위벡터  $\mathbf{p}_0^L$  과 진동변위방향 단위벡터  $\mathbf{d}_0^L$  은

$$\mathbf{p}_0^L = \mathbf{d}_0^L = \mathbf{i}_x \sin \theta_0^L - \mathbf{i}_y \cos \theta_0^L$$

이므로, 입사 종파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_0^L$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_0^L(x, y, t) = A_0^L (\mathbf{i}_x \sin\theta_0^L - \mathbf{i}_y \cos\theta_0^L) \exp[jk_0^L(x \sin\theta_0^L - y \cos\theta_0^L - c_L^a t)] \quad (4)$$

여기서  $A$ 는 파동 변위의 진폭이다. 반사파 중 종파의 단위벡터들은

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1 = \mathbf{i}_x \sin\theta_1 + \mathbf{i}_y \cos\theta_1$$

이고, 횡파의 단위벡터들은

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{i}_x \sin\theta_2 + \mathbf{i}_y \cos\theta_2, \\ \mathbf{d}_2 = \mathbf{i}_z \times \mathbf{p}_2 = -\mathbf{i}_x \cos\theta_2 + \mathbf{i}_y \sin\theta_2$$

이므로, 반사 종파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_1$ 과 반사 횡파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_2$ 는 각각 다음 식과 같다.

$$\mathbf{u}_1(x, y, t) = A_1 (\mathbf{i}_x \sin\theta_1 + \mathbf{i}_y \cos\theta_1) \exp[jk_1(x \sin\theta_1 + y \cos\theta_1 - c_L^a t)] \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_2(x, y, t) = A_2 (-\mathbf{i}_x \cos\theta_2 + \mathbf{i}_y \sin\theta_2) \exp[jk_2(x \sin\theta_2 + y \cos\theta_2 - c_T^a t)] \quad (6)$$

여기서 첨자  $L$ 은 종파를 의미하고 첨자  $T$ 는 횡파를 의미한다. 투과파 중 종파의 단위벡터들은

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{d}_3 = \mathbf{i}_x \sin\theta_3 - \mathbf{i}_y \cos\theta_3$$

이고, 횡파의 단위벡터들은

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{i}_x \sin\theta_4 - \mathbf{i}_y \cos\theta_4, \\ \mathbf{d}_4 = \mathbf{i}_z \times \mathbf{p}_4 = \mathbf{i}_x \cos\theta_4 + \mathbf{i}_y \sin\theta_4$$

이므로, 투과 종파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_3$ 와 투과 횡파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_4$ 는 각각 다음 식과 같다.

$$\mathbf{u}_3(x, y, t) = A_3 (\mathbf{i}_x \sin\theta_3 - \mathbf{i}_y \cos\theta_3) \exp[jk_3(x \sin\theta_3 - y \cos\theta_3 - c_L^b t)] \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_4(x, y, t) = A_4 (\mathbf{i}_x \cos\theta_4 + \mathbf{i}_y \sin\theta_4) \exp[jk_4(x \sin\theta_4 - y \cos\theta_4 - c_T^b t)] \quad (8)$$

두 매질의 경계면  $y=0$ 에서 파동의 변위와 응력이 연속이므로, 경계조건을 다음과 같이 설정한다.

$$y = 0 \text{에서 } u_{x0} + u_{x1} + u_{x2} = u_{x3} + u_{x4} \quad (9a)$$

$$u_{y0} + u_{y1} + u_{y2} = u_{y3} + u_{y4} \quad (9b)$$

$$\sigma_{y0} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} = \sigma_{y3} + \sigma_{y4} \quad (9c)$$

$$\tau_{yx0} + \tau_{yx1} + \tau_{yx2} = \tau_{yx3} + \tau_{yx4} \quad (9d)$$

식 (9c)와 (9d)의 응력들은 식 (3a)와 (3b)로부터 각각 계산된다. 식 (4)~(8)을 식 (9)에 대입하고 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$A_0 \sin\theta_0^L \eta_0^L + A_1 \sin\theta_1 \eta_1 - A_2 \cos\theta_2 \eta_2 = A_3 \sin\theta_3 \eta_3 + A_4 \cos\theta_4 \eta_4 \quad (10a)$$

$$-A_0 \cos\theta_0^L \eta_0^L + A_1 \cos\theta_1 \eta_1 + A_2 \sin\theta_2 \eta_2 = -A_3 \cos\theta_3 \eta_3 + A_4 \sin\theta_4 \eta_4 \quad (10b)$$

$$jk_0^L (\lambda^a + 2G^a \cos^2\theta_0^L) A_0 \eta_0^L + jk_1 (\lambda^a + 2G^a) \cos 2\theta_2 A_1 \eta_1 + jk_2 G^a \sin 2\theta_2 A_2 \eta_2 = jk_3 (\lambda^b + 2G^b) \cos 2\theta_4 A_3 \eta_3 - jk_4 G^b \sin 2\theta_4 A_4 \eta_4 \quad (10c)$$

$$-jk_0^L G^a \sin 2\theta_0^L A_0 \eta_0^L + jk_1 G^a \sin 2\theta_1 A_1 \eta_1 - jk_2 G^a \cos 2\theta_2 A_2 \eta_2 = -jk_3 G^b \sin 2\theta_3 A_3 \eta_3 - jk_4 G^b \cos 2\theta_4 A_4 \eta_4 \quad (10d)$$

여기서

$$\eta_n = \exp[jk_n(x \sin\theta_n - ct)], \\ n = 0, 1, 2, 3, 4$$

이다.

식 (10)이 만족되기 위해서는 다음과 같은 관계가 성립해야 한다.

$$k_1 = k_0^L, k_2 = \frac{c_L^a}{c_T^a} k_0^L, k_3 = \frac{c_L^a}{c_L^b} k_0^L, k_4 = \frac{c_L^a}{c_T^b} k_0^L \quad (11a)$$

$$\theta_1 = \theta_0^L, \sin\theta_2 = \frac{c_T^a}{c_L^a} \sin\theta_0^L, \\ \sin\theta_3 = \frac{c_L^b}{c_L^a} \sin\theta_0^L, \sin\theta_4 = \frac{c_T^b}{c_L^a} \sin\theta_0^L \quad (11b)$$

식 (10)에 식 (11)을 대입한 후 정리하면 다음 식과 같다.

$$-\cos\theta_1 \frac{A_1}{A_0^L} - \sin\theta_2 \frac{A_2}{A_0^L} - \cos\theta_3 \frac{A_3}{A_0^L} + \sin\theta_4 \frac{A_4}{A_0^L} = -\cos\theta_0^L \quad (12a)$$

$$-\sin\theta_1 \frac{A_1}{A_0^L} + \cos\theta_2 \frac{A_2}{A_0^L} + \sin\theta_3 \frac{A_3}{A_0^L} + \cos\theta_4 \frac{A_4}{A_0^L} = \sin\theta_0^L \quad (12b)$$

$$-(\lambda^a + 2G^a)\cos 2\theta_2 \frac{A_1}{A_0^L} - \frac{c_L^a}{c_T^a} G^a \sin 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0^L} + \frac{c_L^a}{c_b^a} (\lambda^b + 2G^b)\cos 2\theta_4 \frac{A_3}{A_0^L} - \frac{c_L^a}{c_b^a} G^b \sin 2\theta_4 \frac{A_4}{A_0^L} = (\lambda^a + 2G^a \cos^2 \theta_0^L) \quad (12c)$$

$$-G^a \sin 2\theta_1 \frac{A_1}{A_0^L} + \frac{c_L^a}{c_T^a} G^a \cos 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0^L} - \frac{c_L^a}{c_b^a} G^b \sin 2\theta_3 \frac{A_3}{A_0^L} - \frac{c_L^a}{c_b^a} G^b \cos 2\theta_4 \frac{A_4}{A_0^L} = G^a \sin 2\theta_0^L \quad (12d)$$

식 (12)를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_L \mathbf{x}_L = \mathbf{b}_L \quad (13a)$$

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} M_{11}^L & M_{12}^L & M_{13}^L & M_{14}^L \\ M_{21}^L & M_{22}^L & M_{23}^L & M_{24}^L \\ M_{31}^L & M_{32}^L & M_{33}^L & M_{34}^L \\ M_{41}^L & M_{42}^L & M_{43}^L & M_{44}^L \end{pmatrix} \quad (13b)$$

$$M_{11}^L = -\cos\theta_1, \quad M_{12}^L = -\sin\theta_2, \quad M_{13}^L = -\cos\theta_3,$$

$$M_{14}^L = \sin\theta_4, \quad M_{21}^L = -\sin\theta_1, \quad M_{22}^L = \cos\theta_2,$$

$$M_{23}^L = \sin\theta_3, \quad M_{24}^L = \cos\theta_4,$$

$$M_{31}^L = -(\lambda^a + 2G^a)\cos 2\theta_2, \quad M_{32}^L = -\frac{c_L^a}{c_T^a} G^a \sin 2\theta_2,$$

$$M_{33}^L = \frac{c_L^a}{c_b^a} (\lambda^b + 2G^b)\cos 2\theta_4,$$

$$M_{34}^L = -\frac{c_L^a}{c_b^a} G^b \sin 2\theta_4, \quad M_{41}^L = -G^a \sin 2\theta_1,$$

$$M_{42}^L = \frac{c_L^a}{c_T^a} G^a \cos 2\theta_2, \quad M_{43}^L = -\frac{c_L^a}{c_b^a} G^b \sin 2\theta_3,$$

$$M_{44}^L = -\frac{c_L^a}{c_b^a} G^b \cos 2\theta_4$$

$$\mathbf{x}_L = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0^L \\ A_2 \\ A_0^L \\ A_3 \\ A_0^L \\ A_4 \\ A_0^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_L = \begin{pmatrix} -\cos\theta_0^L \\ \sin\theta_0^L \\ \lambda^a + 2G^a \cos^2 \theta_0^L \\ -G^a \sin 2\theta_0^L \end{pmatrix} \quad (13c,d)$$

여기서  $A_1/A_0^L$ 과  $A_2/A_0^L$ 은 각각 종파 변위 반사율과 횡파 변위 반사율이고,  $A_3/A_0^L$ 과  $A_4/A_0^L$ 은 각각 종파 변위 투과율과 횡파 변위 투과율이다. 식 (13)의 해  $\mathbf{x}_L$ 을 다음과 같이 구하면 입사 종파에 대한 파동 변위의 반사율과 투과율이 얻어진다.

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{b}_L \quad (14)$$

입사 종파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_0$ 는 식 (4)에 표현되어 있고,  $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{i}_y$ 이고,

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{p}_0) = \cos \theta_0^L$$

이므로, 식 (2)로부터 입사 종파의 파동 세기  $I_0^L$ 이 다음 식과 같이 된다.

$$I_0^L = \frac{1}{2} \rho^a c_L^a \omega^2 (A_0^L)^2 \cos \theta_0^L \quad (15)$$

반사 종파, 반사 횡파, 투과 종파, 투과 횡파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ 는 식 (5)~(8)에 각각 표현되어 있고,

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{n}_3 = -\mathbf{i}_y, \quad \mathbf{n}_4 = -\mathbf{i}_y$$

$$(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_1) = \cos \theta_1, \quad (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}_2) = \cos \theta_2,$$

$$(\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{p}_3) = \cos \theta_3, \quad (\mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{p}_4) = \cos \theta_4$$

이므로, 반사 종파의 파동 세기  $I_1, I_2, I_3, I_4$ 가 다음 식과 같이 된다.

$$I_1 = \frac{1}{2} \rho^a c_L^a \omega^2 A_1^2 \cos \theta_1 \quad (16)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \rho^a c_T^a \omega^2 A_2^2 \cos \theta_2 \quad (17)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \rho^b c_L^b \omega^2 A_3^2 \cos \theta_3 \quad (18)$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \rho^b c_T^b \omega^2 A_4^2 \cos \theta_4 \quad (19)$$

식 (15)~(19)로부터 입사 종파에 대한 파동 에너지의 반사율과 투과율은 다음 식과 같이 구해진다.

$$\frac{I_1}{I_0^L} = \left( \frac{A_1}{A_0^L} \right)^2 \quad (20a)$$

$$\frac{I_2}{I_0^L} = \frac{c_T^a \cos \theta_2}{c_L^a \cos \theta_0^L} \left( \frac{A_2}{A_0^L} \right)^2 \quad (20b)$$

$$\frac{I_3}{I_0^L} = \frac{\rho^b c_L^b \cos \theta_3}{\rho^a c_L^a \cos \theta_0^L} \left( \frac{A_3}{A_0^L} \right)^2 \quad (20c)$$

$$\frac{I_4}{I_0^L} = \frac{\rho^b c_T^b \cos \theta_4}{\rho^a c_L^a \cos \theta_0^L} \left( \frac{A_4}{A_0^L} \right)^2 \quad (20d)$$

여기서  $I_1/I_0^L$ 은 반사 종파의 에너지 반사율,  $I_2/I_0^L$ 은 반사 횡파의 에너지 반사율,  $I_3/I_0^L$ 은 투과 종파의 에너지 반사율,  $I_4/I_0^L$ 은 투과 횡파의 에너지 반사율이다.

## 2.2 입사 횡파의 투과파

이번에는 Fig. 2의 두 매질의 경계면에서 횡파가 입사하는 경우를 고려한다. 입사파의 단위벡터들은

$$\mathbf{p}_0^T = \mathbf{i}_x \sin \theta_0^T - \mathbf{i}_y \cos \theta_0^T,$$

$$\mathbf{d}_0^T = \mathbf{i}_z \times \mathbf{p}_0 = \mathbf{i}_x \cos \theta_0^T + \mathbf{i}_y \sin \theta_0^T$$

이므로, 입사파의 변위 벡터  $\mathbf{u}_0^T$ 는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^T(x, y, t) = & A_0^T (\mathbf{i}_x \cos \theta_0^T + \mathbf{i}_y \sin \theta_0^T) \\ & \exp[jk_0^T (x \sin \theta_0^T - y \cos \theta_0^T - c_T^a t)] \end{aligned} \quad (21)$$

반사파와 투과파의 단위벡터들과 변위 벡터들은 2.1절에 표현된 것과 같다.

두 매질의 경계면  $y=0$ 에서 경계조건은 식 (9)와 같다. 식 (21)과 식 (5)~(8)을 식 (9)에 대입하고 정리하면 다음 식과 같다.

$$A_0^T \cos \theta_0^T \eta_0^T + A_1 \sin \theta_1 \eta_1 - A_2 \cos \theta_2 \eta_2 \quad (22a)$$

$$= A_3 \sin \theta_3 \eta_3 + A_4 \cos \theta_4 \eta_4$$

$$A_0^T \sin \theta_0^T \eta_0^T + A_1 \cos \theta_1 \eta_1 + A_2 \sin \theta_2 \eta_2 \quad (22b)$$

$$= -A_3 \cos \theta_3 \eta_3 + A_4 \sin \theta_4 \eta_4$$

$$-jk_0^T G^a \sin 2\theta_0^T A_0^T \eta_0^T + jk_1 (\lambda^a + 2G^a) \cos 2\theta_2 A_1 \eta_1$$

$$+ jk_2 G^a \sin 2\theta_2 A_2 \eta_2 = jk_3 (\lambda^b + 2G^b) \cos 2\theta_4 A_3 \eta_3$$

$$- jk_4 G^b \sin 2\theta_4 A_4 \eta_4 \quad (22c)$$

$$-jk_0^T G^a \cos 2\theta_0^T A_0^T \eta_0^T + jk_1 G^a \sin 2\theta_1 A_1 \eta_1$$

$$- jk_2 G^a \cos 2\theta_2 A_2 \eta_2 = jk_3 G^b \sin 2\theta_3 A_3 \eta_3 \quad (22d)$$

$$- jk_4 G^b \cos 2\theta_4 A_4 \eta_4$$

식 (22)가 만족되기 위해서는 다음과 같은 관계가 성립해야 한다.

$$k_1 = \frac{c_T^a}{c_L^a} k_0^T, \quad k_2 = k_0^T, \quad (23a)$$

$$k_3 = \frac{c_T^a}{c_L^b} k_0^T, \quad k_4 = \frac{c_T^a}{c_T^b} k_0^T$$

$$\sin \theta_1 = \frac{c_L^a}{c_T^a} \sin \theta_0^T, \quad \theta_2 = \theta_0^T, \quad (23b)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{c_L^b}{c_T^a} \sin \theta_0^T, \quad \sin \theta_4 = \frac{c_T^b}{c_T^a} \sin \theta_0^T$$

식 (22)에 식 (23)을 대입한 후 정리하면 다음 식과 같다.

$$- \cos \theta_1 \frac{A_1}{A_0^T} + \sin \theta_2 \frac{A_2}{A_0^T} + \cos \theta_3 \frac{A_3}{A_0^T} \quad (24a)$$

$$+ \sin \theta_4 \frac{A_4}{A_0^T} = \sin \theta_0^T$$

$$- \sin \theta_1 \frac{A_1}{A_0^T} + \cos \theta_2 \frac{A_2}{A_0^T} + \sin \theta_3 \frac{A_3}{A_0^T} \quad (24b)$$

$$+ \cos \theta_4 \frac{A_4}{A_0^T} = \cos \theta_0^T$$

$$\begin{aligned}
& - k_1 (\lambda^a + 2G^a) \cos 2\theta_2 \frac{A_1}{A_0^T} - k_2 G^a \sin 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0^T} \\
& + k_3 (\lambda^b + 2G^b) \cos 2\theta_4 \frac{A_3}{A_0^T} - k_4 G^b \sin 2\theta_4 \frac{A_4}{A_0^T} \\
& = - k_0^T G^a \sin 2\theta_0^T
\end{aligned} \tag{24c}$$

$$\begin{aligned}
& - k_1 G^a \sin 2\theta_1 \frac{A_1}{A_0^T} + k_2 G^a \cos 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0^T} \\
& - k_3 G^b \sin 2\theta_3 \frac{A_3}{A_0^T} - k_4 G^b \cos 2\theta_4 \frac{A_4}{A_0^T} \\
& = - k_0^T G^a \cos 2\theta_0^T
\end{aligned} \tag{24d}$$

식 (24)를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_T \mathbf{x}_T = \mathbf{b}_T \tag{25a}$$

$$\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} M_{11}^T & M_{12}^T & M_{13}^T & M_{14}^T \\ M_{21}^T & M_{22}^T & M_{23}^T & M_{24}^T \\ M_{31}^T & M_{32}^T & M_{33}^T & M_{34}^T \\ M_{41}^T & M_{42}^T & M_{43}^T & M_{44}^T \end{pmatrix} \tag{25b}$$

$$M_{11}^T = -\cos\theta_1, \quad M_{12}^T = -\sin\theta_2, \quad M_{13}^T = -\cos\theta_3,$$

$$M_{14}^T = \sin\theta_4, \quad M_{21}^T = -\sin\theta_1, \quad M_{22}^T = \cos\theta_2,$$

$$M_{23}^T = \sin\theta_3, \quad M_{24}^T = \cos\theta_4,$$

$$M_{31}^T = -\frac{c_T^a}{c_L^a} (\lambda^a + 2G^a) \cos 2\theta_2, \quad M_{32}^T = -G^a \sin 2\theta_2,$$

$$M_{33}^T = \frac{c_T^b}{c_L^b} (\lambda^b + 2G^b) \cos 2\theta_4,$$

$$M_{34}^T = -\frac{c_T^a}{c_T^b} G^b \sin 2\theta_4, \quad M_{41}^T = -\frac{c_T^a}{c_L^a} G^a \sin 2\theta_1,$$

$$M_{42}^T = G^a \cos 2\theta_2, \quad M_{43}^T = -\frac{c_T^a}{c_L^b} G^b \sin 2\theta_3,$$

$$M_{44}^T = -\frac{c_T^a}{c_T^b} G^b \cos 2\theta_4$$

$$\mathbf{x}_T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0^T \\ A_2 \\ A_0^T \\ A_3 \\ A_0^T \\ A_4 \\ A_0^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_T = \begin{pmatrix} \sin\theta_0^T \\ \cos\theta_0^T \\ -G^a \sin 2\theta_0^T \\ -G^a \cos 2\theta_0^T \end{pmatrix} \tag{25c,d}$$

식 (25)의 해  $\mathbf{x}_T$ 를 다음과 같이 구하면 입사 횡파에 대한 파동 변위의 반사율과 투과율이 얻어진다.

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{M}_T^{-1} \mathbf{b}_T \tag{26}$$

입사 횡파의 파동 세기  $I_0^T$ 가 다음 식과 같이 된다.

$$I_0^T = \frac{1}{2} \rho^a c_T^a \omega^2 (A_0^T)^2 \cos^2 \theta_0^T \tag{27}$$

반사파와 투과파의 파동 세기는 식 (16)~(19)와 같다. 식 (26)과 (16)~(19)로부터 입사 횡파에 대한 파동 에너지의 반사율과 투과율은 다음 식과 같이 구해진다.

$$\frac{I_1}{I_0^T} = \frac{c_L^a \cos\theta_1}{c_T^a \cos\theta_0^T} \left( \frac{A_1}{A_0^T} \right)^2 \tag{28a}$$

$$\frac{I_2}{I_0^T} = \left( \frac{A_2}{A_0^T} \right)^2 \tag{28b}$$

$$\frac{I_3}{I_0^T} = \frac{\rho^b c_L^b \cos\theta_3}{\rho^a c_T^a \cos\theta_0^T} \left( \frac{A_3}{A_0^T} \right)^2 \tag{28c}$$

$$\frac{I_4}{I_0^T} = \frac{\rho^b c_T^b \cos\theta_4}{\rho^a c_T^a \cos\theta_0^T} \left( \frac{A_4}{A_0^T} \right)^2 \tag{28d}$$

### 3. 파동 에너지 투과율 계산

2절에서 유도된 식에 물성치를 대입하여 투과파의 굴절각과 에너지 투과율을 계산한다. 관 벽의 재질은 스테인리스 강으로 하고 웨지의 재질은 에폭시 또는 플라스틱으로 하며, 이들의 물성치를 Table 1에 기재하였다.

#### 3.1 입사 종파의 투과 횡파

Fig. 1의 송신부에서처럼 웨지에서 종파가 전파하

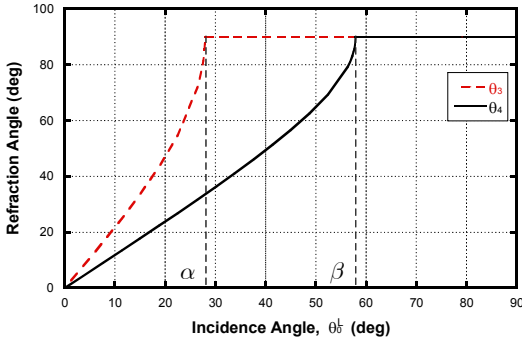
Table 1 Material properties

|       | Material properties | $\rho$<br>(m <sup>3</sup> /kg) | $c_T$<br>(m/s) | $c_L$<br>(m/s) |
|-------|---------------------|--------------------------------|----------------|----------------|
| Wedge | Epoxy               | 1540                           | 1450           | 2780           |
|       | Plastic 1           | 1340                           | 945            | 2079           |
|       | Plastic 2           | 1320                           | 1070           | 2612           |
| Wall  | STS 304             | 7800                           | 3281           | 5936           |

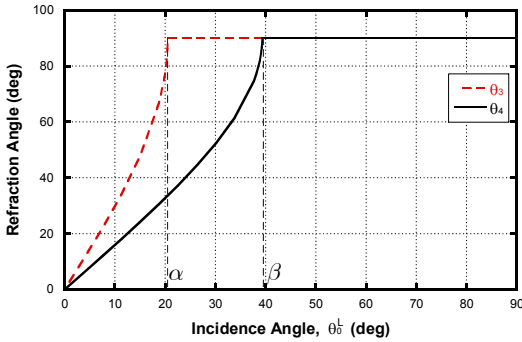
다가 경계면을 지나 관 벽으로 투과 할 때, 입사각  $\theta_0^L$ 에 따른 투과 종파의 굴절각  $\theta_3$ 와 투과 횡파의 굴절각  $\theta_4$ 를 식 (11b)로부터 계산하여 Fig. 3에 나타내었다. 입사각  $\theta_0^L$ 이  $0^\circ$ 부터  $\alpha$ 까지 일 때는 투과 파에 종파와 횡파가 함께 존재하며, 종파의 굴절각  $\theta_3$ 가 횡파의 굴절각  $\theta_4$ 보다 크다. 입사각  $\theta_0^L$ 이  $\alpha$ 부터  $\beta$ 까지 일 때는 투과파에 횡파만 존재한다. 입사

파는 종파인데 투과파는 횡파이므로 이를 모드 전환(mode conversion)<sup>(3)</sup>이라 한다. 입사각  $\theta_0^L$ 이  $\beta$ 보다 클 때에는 투과파가 존재하지 않는다.

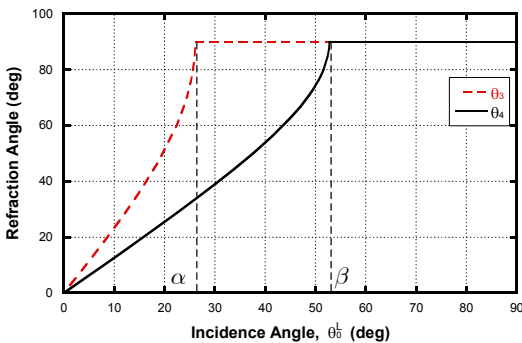
초음파 유속 센서에 있어서 유속 측정의 정확도 확보를 위해서는 관 속 유체에서 초음파 전파 방향이 유체 유동 방향 (또는 그 역 방향)으로 향할수록 유리하다. 따라서 입사각  $\theta_0^L$ 이 클수록 좋으므로, 입



(a) Epoxy

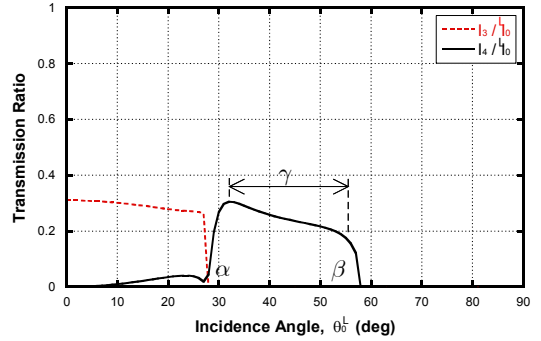


(b) Plastic 1

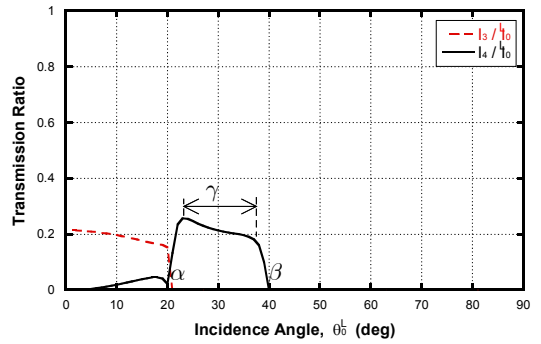


(c) Plastic 2

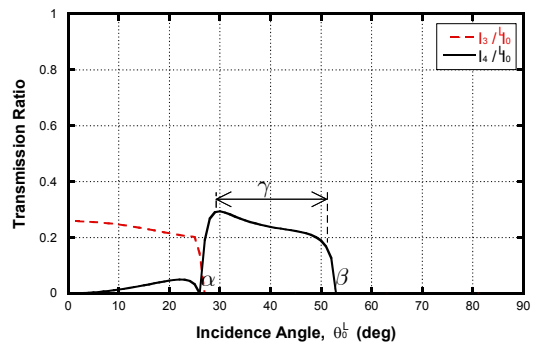
Fig. 3 Refraction angles for incident longitudinal waves from the wedge to the pipe wall



(a) Epoxy



(b) Plastic 1



(c) Plastic 2

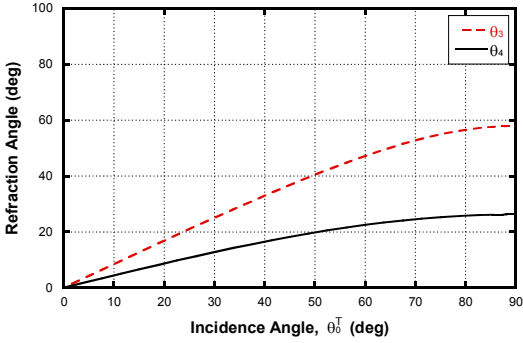
Fig. 4 Energy transmission ratio of incident longitudinal waves from the wedge to the pipe wall

사각을  $\beta$ 에 가깝게 선정하되 투과파 에너지가 충분히 확보되는 입사각을 선택하는 게 좋다. 입사각  $\theta_0^T$ 에 따른 투과파의 에너지 투과율을 식 (20c)와 (20d)로부터 계산하여 Fig. 4에 나타내었다. 이 그래프로부터 입사각  $\gamma$ 를 선택한다.

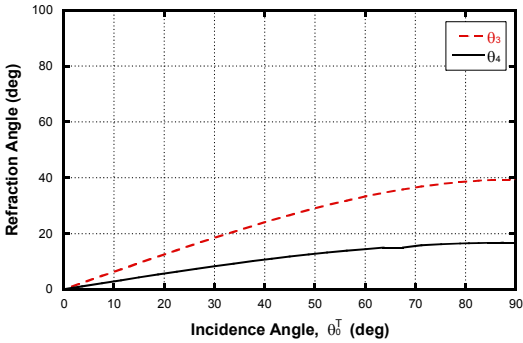
### 3.2 입사 횡파의 투과 종파

Fig. 1의 수신부에서처럼 관 벽에서 횡파가 전파

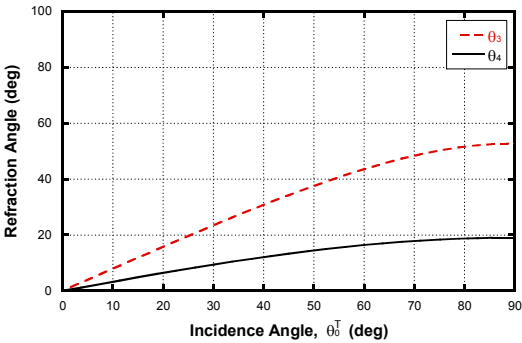
하다가 경계면을 지나 웨지로 투과 할 때, 입사각  $\theta_0^T$ 에 따른 투과 종파의 굴절각  $\theta_3$ 와 투과 횡파의 굴절각  $\theta_4$ 를 식 (23b)로부터 계산하여 Fig. 5에 나타내었다. 입사각에 관계없이 종파와 횡파가 모두 투과파에 존재하며, 투과 종파의 굴절각이 투과 횡파의 굴절각 보다 크다. 입사각  $\theta_0^T$ 가 증가하면, 투과 종파의 굴절각  $\theta_3$ 와 투과 횡파의 굴절각  $\theta_4$ 가 증가한다.



(a) Epoxy

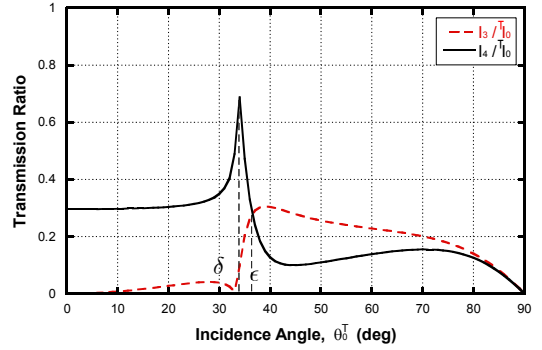


(b) Plastic 1

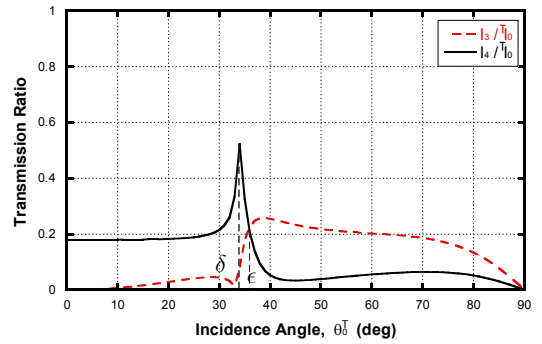


(c) Plastic 2

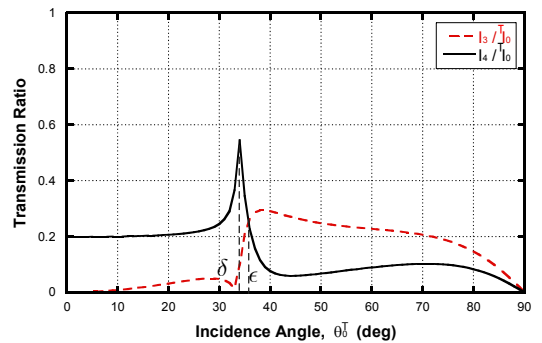
Fig. 5 Refraction angles for incident transverse waves from the pipe wall to the wedge



(a) Epoxy



(b) Plastic 1



(c) Plastic 2

Fig. 6 Energy transmission ratio of incident transverse waves from the pipe wall to the wedge



입사각  $\theta_0^T$ 에 따른 투과파의 에너지 투과율은 식 (28c)와 (28d)로부터 계산하여 Fig. 6에 나타내었다. 입사각  $\theta_0^T$ 에 따른 투과파의 에너지 투과율은  $0^\circ$ 부터  $\delta$ 까지 일 때는 횡파의 에너지 투과율이 더 크며,  $\delta$ 에서 최대가 된다. 이후 종파의 에너지 투과율은 증가하고, 횡파의 에너지 투과율이 감소하다가  $\epsilon$ 에서부터 투과 종파의 에너지 투과율이 투과 횡파의 에너지 투과율보다 커진다.

#### 4. 실험

3절에서 입사파에 대한 반사파와 투과파의 에너지 투과율 크기와 굴절각을 확인하였다. 이론 해석 결과의 타당성을 검증하기 위하여, 탄성파의 입사각에 따른 투과파의 에너지 투과율을 측정한다.

##### 4.1 실험 장치 및 방법

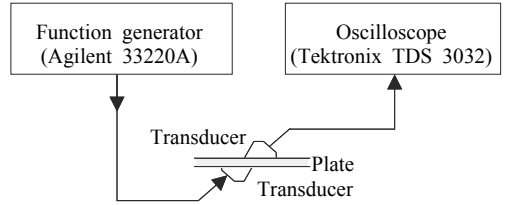
실험 장치는 Fig. 7에 보인 바와 같이 함수발생기 (Agilent, 33220A)와 오실로스코프(Tektronix, TDS 3032)로 구성된다. 중심주파수 1 MHz인 정현파 신호가 생성되어 송신용 트랜스듀서로 보내어지고, 웨지에 종파 형태의 탄성파가 전파한다. 웨지에서의 종파가 평판에 전달되어 횡파로 투과하고, 수신부 쪽 웨지로 전달되어 종파와 횡파로 투과한다. 그 중 종파가 트랜스듀서에서 수신된다.

웨지는 종파 전파속도가 2000~3000 m/s인 재질 중 고온에서도 사용이 가능하며, 구입이 쉬운 플라스틱을 선택하여 유속 측정의 정확도 확보와 투과파 에너지를 충분히 확보하기 위해 입사각이 세 가지인 웨지를 제작하여 실험에 사용하였다.

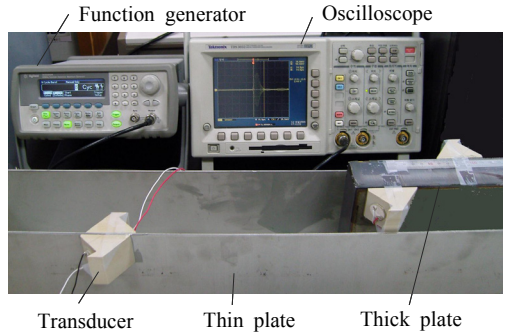
두가지 두께의 스테인리스 판을 대상으로 실험을 행하였다. 하나는 두께가 2.9 mm이고, 다른 하나는 두께가 41.0 mm이다. 두께가 2.9 mm인 판에서는 거리  $d$ 가 0부터 8 mm까지 1 mm 간격으로 측정하였으며, 두께가 41.0 mm인 판에서는 굴절거리를 계산하여 해당 지점에서 세 가지 웨지에 대해서 각각 10회씩 측정하였다. 실험에서 사용된 재질의 물성은 Table 1에 정리되어 있으며, Snell의 법칙에 따른 횡파 굴절각을 통해 계산된 판 내의 전파거리  $d$ 는 Fig. 8와 같다. 판 내의 전파거리  $d$ 를 평판의 두께와 굴절각을 이용하여 계산하면 Table 2와 같다.

Fig. 9는 실험에서 측정된 송수신신호이다. (a)는

함수발생기에서 발생된 8cycle의 송신신호이고, (b)는 탄성파가 판에서 투과한 후 검출된 신호이다.



(a) Block diagram



(b) Photograph

Fig. 7 Experimental apparatus

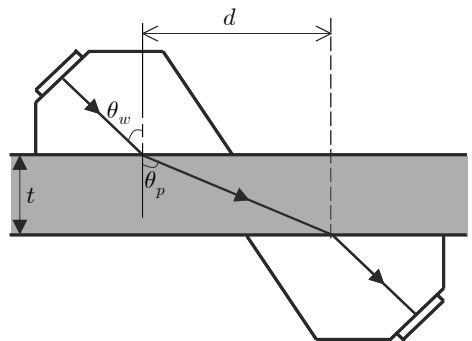


Fig. 8 Schematic diagram for calculating the propagation distance

Table 2 Refraction angle and propagation distance in the plate depending on the incidence angle

| Incidence angle, $\theta_w$ | Refraction angle, $\theta_p$ ( $^\circ$ ) | Propagation distance in the plate, $d$ (mm) |                              |
|-----------------------------|---|---|------------------------------|
|                             |   | Thin plate ( $t = 2.9$ mm)                  | Thick plate ( $t = 41.0$ mm) |
| $\Theta - 2^\circ$          | 59.0                                      | 4.82  | 68.3                         |
| $\Theta$                    | 62.7                                      | 5.61  | 79.5                         |
| $\Theta + 2^\circ$          | 66.7                                      | 6.73  | 95.3                         |

4.2 실험결과

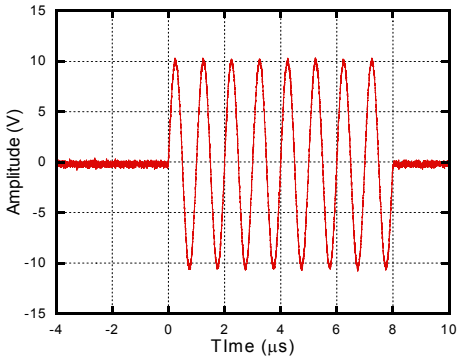
얇은 판에서 실험을 10회 반복하여 얻은 결과를 각도에 따라 입출력비로 Fig. 10에 나타내었다. 입출력비는 수신신호의 크기와 송신신호의 크기의 비이다. 입사각  $\theta=2^\circ$ 에서는  $d=5\text{ mm}$ ,  $\theta$ 에서는  $d=5\text{ mm}$ ,  $\theta+2^\circ$ 에서는  $d=6\text{ mm}$ 에서 가장 큰 신호가 수신되었다. 이는 앞에서 계산된 전파거리의 값과 유사하다. Fig. 11은 위의 결과를 바탕으로 각도별로 가장 큰 입출력비가 나타나는 값을 표시한 것이다. 입사각이  $\theta=2^\circ$ 인 웨지에서 가장 작은 입출력비가 나타났고,  $\theta+2^\circ$ 인 웨지에서 가장 큰 입출력비가 나타났다.

두꺼운 판에서 실험을 10회 반복하여 얻은 결과를 각도별로 가장 큰 입출력비가 나타나는 값을 Fig. 12에 표시하였다. 입사각이 증가할수록 에너지 투과율이 작아지는 경향이 나타났다.

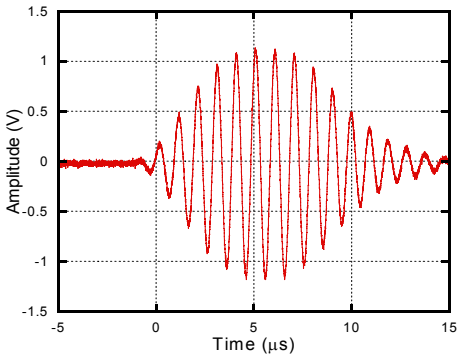
얇은 판과 두꺼운 판에서의 에너지 투과율은 Fig. 13에서와 같이 0.025~0.12로 수치 해석의 결과로

얻어진 0.2보다 작았다. 이는 탄성파가 투과할 때, 커플란트를 통해 판에 투과하는 경계면과 판 내에서 에너지가 감쇠하였기 때문으로 추정된다.

이 실험에서 사용된 STS 304 판 내에서 파장은 3.2 mm이다. 이 때, 파장보다 두꺼운 판의 경우는

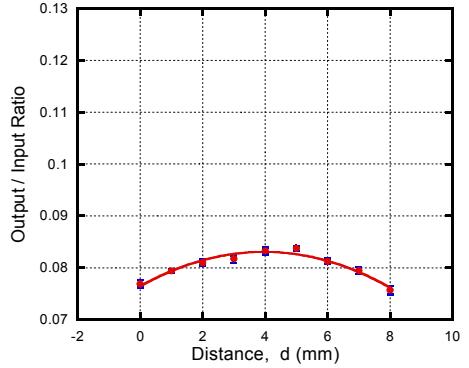


(a) Transmitted signal

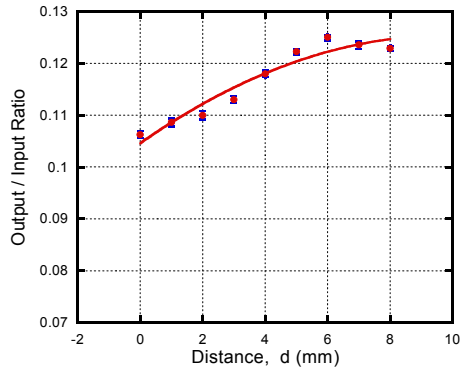


(b) Received signal

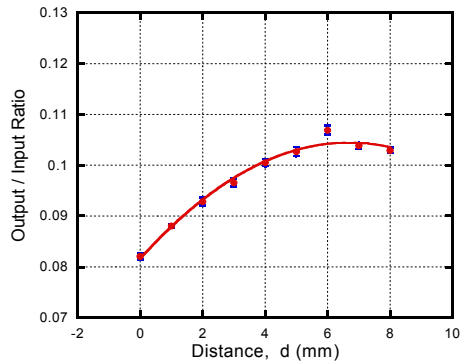
Fig. 9 Transmitted and received signal in a plate



(a)  $\theta=2^\circ$  wedge



(b)  $\theta$  wedge



(c)  $\theta+2^\circ$  wedge

Fig. 10 Ratio of the output voltage of the receiving transducer to the input voltage of the transmitting transducer in a thin plate

실험 결과가 수치해석의 결과와 같이 입사각이 증가함에 따라 에너지 투과율이 감소하는 경향을 확인하였다. 그러나 파장과 비슷하게 얇은 판에서는

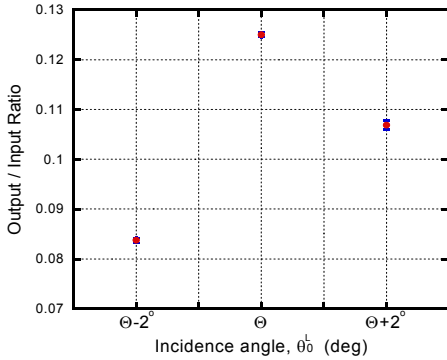


Fig. 11 Output/input ratio of the signal magnitude in a thin plate

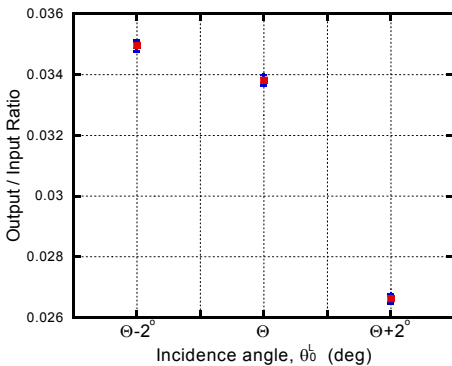


Fig. 12 Output/input ratio of the signal magnitude in a thick plate

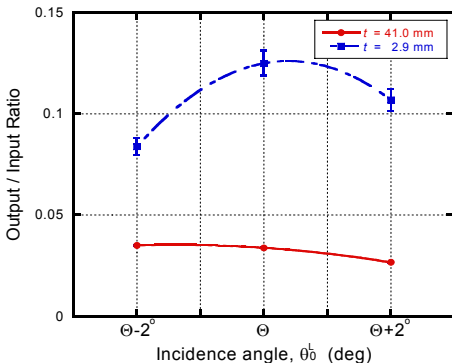


Fig. 13 Comparison of the output/input ratio for thin and thick plates

수치해석 결과와 다르게  $\theta - 2^\circ$ 에서의 에너지 투과율이 작게 나타났다. 이는 웨지로부터 발생된 탄성파가 파장과 비슷한 두께를 가지는 얇은 평판에서 투과할 때에는 Lamb파가 발생하기 때문에<sup>(7,8)</sup> 파동 에너지가 분산되는 것이라고 추정된다. 그리고 이러한 얇은 평판에서는 Lamb파에 의해서 생성된 종파와 횡파가 투과하는 것을 확인하였다<sup>(9,10)</sup>. 그러므로 파장과 비슷한 두께의 판에서는 Lamb파의 영향으로 탄성파의 에너지 투과율이 수치해석 결과와 다른 것으로 판단된다.

### 5. 결론

입사 종파의 투과파와 입사 횡파의 투과파를 대상으로 파동 에너지 투과율을 유도하였다. 그 과정은 반사파와 투과파의 변위 식을 기반으로 하여, 파동 입자의 진동속도와 응력의 곱으로 이루어 졌다.

외벽 부착식 초음파 유속 센서에 관한 수치 계산을 통해서, 초음파 송신 센서에서 종파로 관 벽을 향해 입사한 파동이 특정한 입사각 범위에서는 횡파로만 관벽으로 투과하는 모드전환 현상을 확인하였다. 또한 수신부에서는 관벽에서 횡파가 종파로도 투과하여 수신 센서에서 감지될 수 있음을 확인하였다.

입사 종파의 에너지 투과율을 측정하는 실험을 하였다. 이론적 해석 결과를 정량적으로 비교할 수 없는 실험이었지만, 입사각에 따른 투과율의 영향을 비교할 수 있었다. 벽의 두께가 파장보다 훨씬 두꺼운 판에서는 입사각이 증가함에 따라 파동 투과율이 감소하는 경향이 나타났고, 이론적으로 계산한 결과의 경향과 일치하였다. 벽의 두께가 파장과 비슷하게 얇은 판에서는 특정 입사각에서 파동 투과율이 최대가 되는 결과가 나타났는데, 입사각이 작은 쪽에서 이론적 계산 결과와 다른 경향이 나타난 이유는 Lamb파 발생으로 인해 파동 에너지가 분산되었기 때문인 것으로 추정되었다.

이 논문에서 유도된 투과파 해석 결과는, 모드 전환을 활용하면서 파동 에너지 투과율을 최대화하는 초음파 유속 센서 설계에 사용될 수 있다.

### 후 기

연구 초기에 이정구 군이 참여하였고, 저자들은

그의 기여를 감사히 여깁니다.

### 참 고 문 헌

- (1) Kim, J. O., 2000, "Ultrasonic Sensors and Actuators," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 10, No. 5, pp. 723~728.
- (2) Lynnworth, L. C., 1989, "Ultrasonic Measurements for Process Control," Academic Press, New York, Chapter 4.
- (3) Achenbach, J. D., 1975, "Wave Propagation in Elastic Solids," North-Holland, Amsterdam, Chapter 5.
- (4) Rose, J. L., 1999, "Ultrasonic Waves in Solid Media," Cambridge University Press, Cambridge, Chapter 5.
- (5) Kuhn, G. J., Lutsch, A., 1964, "Elastic Wave Mode Conversion at a Solid-solid Boundary with Transverse Slip," The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 33, No. 7, pp. 949~954.
- (6) Lester, L. S., 1998, "Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation," Plenum, New York, Chapter 6.
- (7) Song, S. J., Jung, M. H., Kim, Y. H. and Kwon, S. D., 2001, "Observation of Backward Radiated Ultrasound from the Thin Plate," Proceedings of KSNT Spring Conference, pp. 340~345.
- (8) Liu, L., Bhattacharya, K., 2009, "Wave Propagation in a Sandwich Structure," International Journal of Solid and Structures, Vol. 46, pp. 3290~3300.
- (9) Lu, H., Wang, Z. and Han, Y., 1994, "The Ultrasonic NDT Technique Utilizing the Longitudinal or Transverse Waves Induced by Lamb Wave in Thin Plates," Proceedings of Instrumentation and Measurement Technology Conference, pp. 1195~1197.
- (10) Greve, D. W., Zheng, P., Oppenheim, I. J., 2008, "The Transition from Lamb Waves to Longitudinal Waves in Plates," Smart Materials and Structures, Vol. 17, No. 3, 035029.