

## 복합적층판 이론에 의한 철근콘크리트 슬래브교의 해석

한봉구<sup>1</sup> · 김덕현<sup>2</sup>

서울산업대학교 건설공학부 교수<sup>1</sup>, 서울산업대학교 건설공학부 겸임교수<sup>2</sup>

### Analysis of Reinforced Concrete Slab Bridges by the Composite Laminates Theory

Han, Bong-Koo<sup>1</sup> · Kim, Duck-Hyun<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Seoul National University of Science & Technology, Professor, Corresponding author

<sup>2</sup>Seoul National University of Science & Technology, Adjunct Professor

**Abstract:** In this paper, A reinforced concrete slab bridges is analyzed by the composite laminates theory. Both the geometry and the material of the cross section of the reinforced concrete slab bridge are considered symmetrical with respect to the mid-surface so that the bending extension coupling stiffness,  $B_{ij} = 0$ , and  $D_{16} = D_{26} = 0$ . Each longitudinal and transverse steel layer is regarded as a lamina, and material constants of each lamina is calculated by the use of rule of mixture. This slab with simple support is under uniformly distributed vertical and axial loads. In this paper, the finite difference method and specially orthotropic laminates theory are used for analysis. The result of specially orthotropic laminates theory analysis is modified to obtain the solution of the beam analysis. The result of this paper can be used for reinforced concrete slab analysis by the engineers with undergraduate study in near future.

**Key Words:** Finite difference method, specially orthotropic laminates theory, slab bridges, beam analysis

#### 1. 서 론

오늘날까지 토목, 건축 분야의 건설공사에는 주로 콘크리트 및 강재 등이 구조용 재료로 사용되어져 왔다. 그러나 최근 산업이 발전함에 따라 구조물이 대형화되고, 중량과 부식, 내구성 문제 및 경과 년수의 증가로 인한 유지 보수가 중요한 문제로 대두됨에 따라 신소재인 복합재료를 건설에 응용하기 위한 노력들이 활발하게 진행되어 왔다. 복합적층판은 이방성이므로 휨-인장, 인장-전단 및 휨-비틀림의 연계효과 발생으로 고전이론에 비해 너무 어렵다는 단점이 있으므로 일반 기술자들이 건설분야에 응용하기에는 많은 어려움이 있었다. 이러한 문제점들은 토목구조물처럼 단면이 커질 경우 특별직교이방성 이론으로 해석이 가능하다는 결과가 제시됨에 따라 해석에 따

른 어려움이 점차 해결되어 왔다(Kim, 1993). 그러나 대부분의 토목구조물은 그 경계조건의 복잡함을 갖고 있으며, 이러한 구조물에 관한 정확한 해를 구한다는 것은 상당한 어려움이 있다. 이러한 문제를 공학적으로 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있는 방법 중 하나가 유한차분법이다(Kim, 1995). 토목구조물의 대부분은 판 구조요소로 되어 있으며 이들 중 많은 부분이 여러 소재를 합성한 복합구조로 구성되어 있다. 대표적인 구조물이 철근콘크리트 슬래브이다. 철근콘크리트 슬래브도 복합적층판 이론으로 정확한 해를 구할 수 있다. 그 중 복철근으로 배근된 철근콘크리트 슬래브는 각각의 층이 대칭으로 구성되어  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]_r$  형태의 특별직교이방성 판과 동일하게 거동된다. 본 논문에서는 양단 단순 타단 자유 지지된 복철근콘크리트 슬래브에 프리스트레스를 도입한 경우 복합적층판 이론에 의한 해석결과(Kim, 2001, Han,

**주요어:** 유한차분법, 특별직교이방성적층판이론, 슬래브교, 보해석

**Corresponding author:** Han, Bong-Koo

Department of Civil Engineering, Seoul National University of Science & Technology, Professor, 172 Gongneung-dong, Nowon-gu, Seoul 139-743, Korea.

Tel: +82-2-970-6577, Fax: +82-2-948-0043, E-mail: bkhan@seoultech.ac.kr

투고일: 2010년 1월 2일 / 수정일: 2010년 2월 3일 / 게재확정일: 2010년 2월 21일

2001)와 단순지지 된 슬래브교를 복합적층판이론과 판 이론에 의한 해석 결과(Stephen, 1989)와 비교하여 본 논문의 해석 방법의 타당성을 밝힌다.

## 2. 본 문

### 2.1 슬래브교의 강성 계산

일반적인 구조부재의 강성(stiffnesses)은 다음과 같은 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)
 \end{aligned} \tag{1}$$

위의 강성 항 중에서 특별직교이방성 판의 경우는  $B_{ij}=0$ , ( )16, ( )26항이 0 이므로 휨강성의 항인  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}=D_{21}$ , 그리고  $D_{66}$  만이 존재하게 된다. 여기에서, 조합된 휨-연계강성  $D_{11}$  값을 찾아 보 이론에 적용하고 적층판 이론의 강성의 값은 전체의 휨-연계 강성 값을 사용한다.

### 2.2 복합적층판 이론에 의한 해석

등분포수직하중과 축방향 등분포하중을 동시에 받는 특별직교이방성 복합적층판의 평형방정식은 다음 식(2)와 같다(Kim, 1995, 2001).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\
 - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q(x, y)
 \end{aligned} \tag{2}$$

이 때 단면력과 처짐과의 관계는 다음 식(3), 식(4), 식(5)와 같다.

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4}$$

$$M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{5}$$

식(5)을 식(2)에 대입하여 정리하면 다음 식(6) 이 된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\
 - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q(x, y)
 \end{aligned} \tag{6}$$

식(6)에서 유한차분법을 이용하여 처짐과 모멘트의 값을 산출 할 수 있다.

### 2.3 보 이론에 의한 해석

보 이론에 의하여 슬래브교를 해석하기 위한 자유 물체도는 Fig. 1 과 같다.

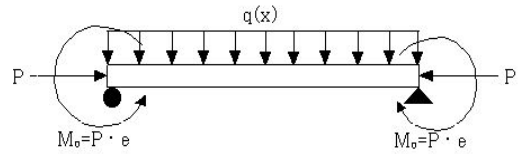


Fig. 1 Free Body Diagram of Slab Bridge

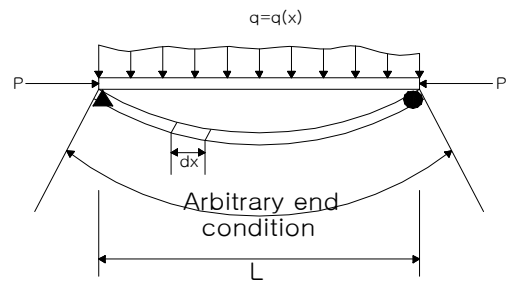


Fig. 2 Deflection Shape of Slab Bridge

Fig. 2는 축방향력이 있고 등분포하중을 받는 슬래브교의 처짐 상태를 나타낸다. 사용될 복합적층판 이론은 철근콘크리트 슬래브교를 단위 폭의 보로 고려한 것이다. 미소구간  $dx$  를 확대하여  $dx$  에 작용중인 상태를 나타내면 Fig. 3 과 같은 상태가 된다.

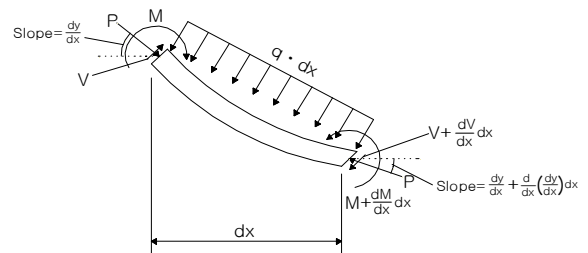


Fig. 3 Differential Segment of the Distance dx

위의 Fig. 3에서

$$\frac{dV}{dx} - P \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -q$$

라는 평형방정식이 성립한다(Kim, 1970, 1989, 1995, 2001).

$$\text{이때 } v = \frac{dM}{dx} \text{ 이므로 } \frac{d^2M}{dx^2} - P \frac{d^2y}{dx^2} = -q$$

여기서  $M = -EI \frac{d^2y}{dx^2}$  이므로

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = q \tag{7}$$

식(7)에서 처짐 방정식을 다음과 같이 산출한다.

경계조건 :

- 1) 경계조건  $x = 0, M = -P \cdot e$
- 2) 경계조건  $x = 0, y = 0$
- 3) 경계조건  $x = l, M = -P \cdot e$
- 4) 경계조건  $x = l, y = 0$

위의 경계조건에 의해서 아래의 처짐방정식과 모멘트 방정식이 산출된다.

$$y = \frac{e(1 - \cosh kl)}{2 \sinh kl} \sinh kx + \frac{e}{2} \cosh kx + \frac{e(\cos kl - 1)}{2 \sin kl} \sin kx - \frac{e}{2} \cos kx + \frac{1}{D} \left( \frac{1}{24} qx^4 - \frac{1}{12} q lx^3 + \frac{1}{24} q l^3 x \right) \tag{8}$$

$$M = -D_{11} y'' = -\frac{Pe(1 - \cosh kl)}{2 \sinh kl} \sinh kx - \frac{Pe}{2} \cosh kx + \frac{Pe(\cos kl - 1)}{2 \sin kl} \sin kx - \frac{Pe}{2} \cos kx - \left( \frac{1}{2} qx^2 - \frac{1}{2} q lx \right) \tag{9}$$

여기서, D 는 복합재료의 적층판에서 구한 D11 값이다.

### 3. 수치해석

#### 3.1 슬래브교의 휨강성

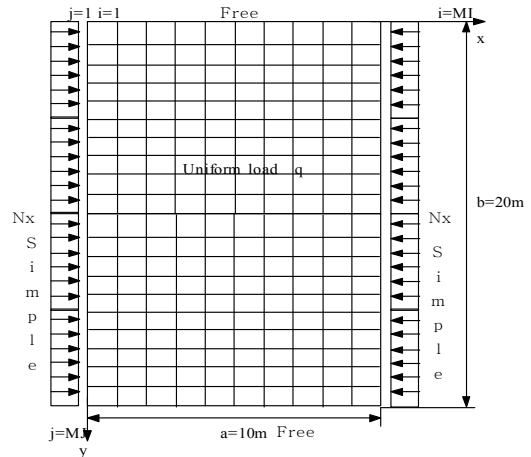
본 연구의 대상 슬래브교의 휨강성을 계산한 결과 Table 1 과 같다.

**Table 1. Flexural Rigidity of Slab Bridge**

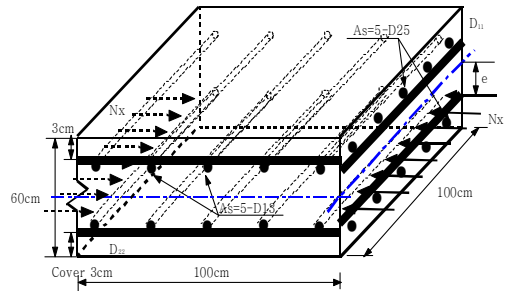
휨강성 (Nm)	
D <sub>11</sub>	483,909,280.00
D <sub>12</sub>	78,999,832.00
D <sub>22</sub>	443,173,824.00
D <sub>66</sub>	177,517,632.00

#### 3.2 슬래브교의 모델링

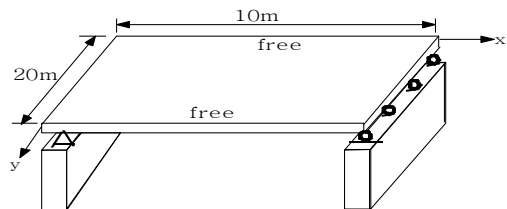
본 연구의 대상 슬래브교를 Fig. 4, Fig. 5 그리고 Fig. 6과 같이 모델링하였다.



**Fig. 4 Modeling of Slab Bridge**



**Fig. 5 Cross Section of Slab Bridge**



**Fig. 6 Boundary Condition of Slab Bridge**

본 연구에서는 mesh의 크기를 1.0 m로 하고 슬래브 중심으로부터 편심거리가 0.2 m 일 때를 고찰하였

으며, 편심거리가 0.05m, 0.1m인 경우에 대해서도 고찰하였다.

- . 수직방향 하중조건 :
- . 자중 :  $0.6m \times 25kN/m^3 = 15 kN/m^2$
- . 전체하중 :  $15 + 12.5 = 27.5 kN/m^2$

축방향 하중을 100 kN, 200 kN, 400 kN, 700 kN, 1000 kN으로 증가시키면서 판의 축방향 하중별 단면력과 처짐에 대한 해석을 수행하였다.

#### 4. 분석 및 고찰

판의 자중과 등분포 수직하중을 고려하고 편심은 0.2 m, 0.1 m, 0.05 m 로 하여 축방향 하중을 100 kN, 200 kN, 400 kN, 700 kN, 1000 kN으로 변화를 주고, 단위 폭을 가진 보의 처짐과 모멘트 값을 계산하였다.

##### 4.1 특별직교이방성 복합적층판 이론에 의한 해석

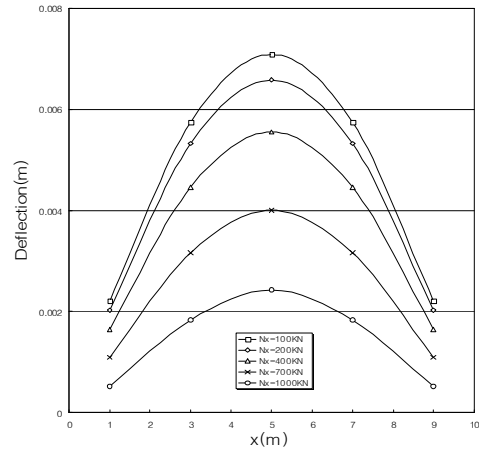
Table 2는 x 방향이 단순지지 되고 y 방향이 자유단인 경계조건을 갖는 경우(SF)의  $x=1m, 3m, 5m, 7m, 9m$ 에서의 100 kN, 200 kN, 400 kN, 700 kN, 1000 kN의 축하중을 변화시킬 때의 처짐을 나타낸 것이다.

**Table 2. Deflection with Increase of Axial Load (m) (e=0.2m)**

(Nx) x(m)	100kN	200kN	400kN	700kN	1000kN
1m	0.00220	0.00202	0.00165	0.00109	0.0005
3m	0.00575	0.00532	0.00446	0.00315	0.0018
5m	0.00708	0.00657	0.00555	0.00400	0.0024
7m	0.00575	0.00532	0.00446	0.00315	0.0018
9m	0.00220	0.00202	0.00165	0.00109	0.0005

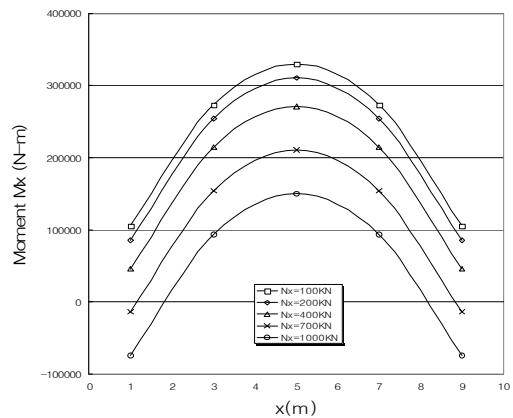
동일한 축하중을 가했을 경우 중앙부에서 5m에 가장 크게 처짐이 발생하는 것을 알 수 있으며 축하중을 증가시키면서 처짐이 감소되는 경향을 나타내었다.

Fig. 7 은 경간 방향의 거리에 따른 처짐을 그래프로 나타내었다.



**Fig. 7 Deflection Distribution (e=0.2m)**

Fig. 8 은 경간 방향의 거리에 따른 모멘트를 그래프로 나타낸 것이다.



**Fig. 8 Mx Distribution (e=0.2m)**

##### 4.2 보 이론에 의한 해석

Table 5 는 특별직교이방성의 경우와 같이 x 방향이 단순지지되고 y 방향이 자유단인 경계조건을 갖는 단순보의  $x=1m, 3m, 5m, 7m, 9m$ 에서 축하중을 100kN, 200kN, 400kN, 700kN, 1000kN의 축 하중을 변화시킬 때의 처짐을 나타낸 것이다.

**Table 5. Deflection with Increase of Axial Load (m) (e=0.2m)**

(Nx) x(m)	100kN	200kN	400kN	700kN	1000kN
1m	0.00215	0.00196	0.00159	0.00103	0.0004791
3m	0.00562	0.00519	0.00432	0.00302	0.0017189
5m	0.00693	0.00642	0.00538	0.00383	0.0022848
7m	0.00562	0.00519	0.00432	0.00302	0.0017189
9m	0.00215	0.00196	0.00159	0.00103	0.0004791

Fig. 9 는 경간 방향의 거리에 따른 처짐을 하중의 변화에 따라 나타내었다.

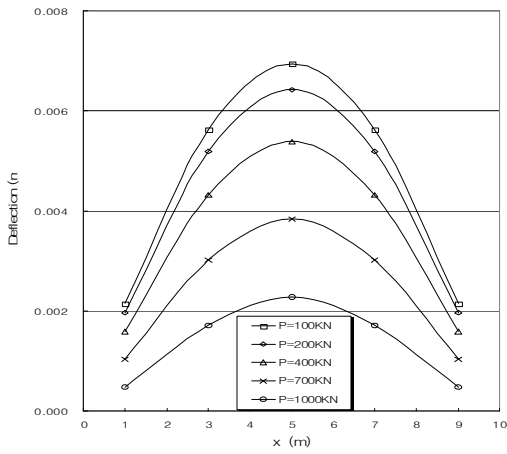


Fig. 9 Deflection Distribution (e=0.2m)

Table 5 는 축방향력 증가에 따른 슬래브 중심선 상 지점으로부터 위치별 모멘트 값을 나타내었다. Fig. 10은 경간 방향의 거리에 따른 모멘트를 그래프로 나타내었다.

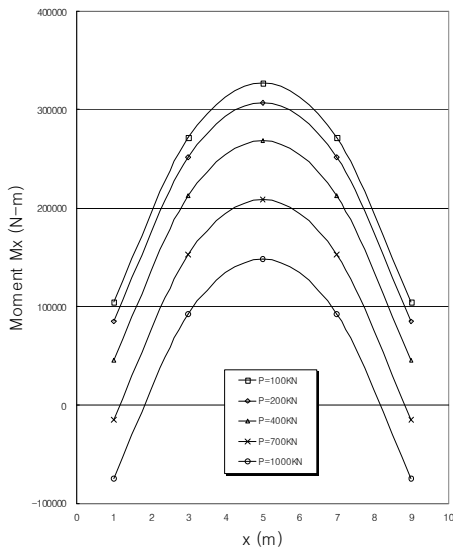


Fig. 10 Mx Distribution (e=0.2m)

4.3 편심 e=0.05m, e=0.1m인 경우의 고찰

위 방법의 신뢰성을 검증하기 위해 편심(e)을 바꾸어 해석한 결과이다. 해석의 절차는 편심 e=0.2 m 인 경우와 마찬가지로이다.

Table 7. Deflection with Increase of Axial Load (m) (e=0.05m)

(N,x)	100kN	200kN	400kN	700kN	1000kN
x(m) 1m	0.002293	0.002246	0.002153	0.002014	0.001874
x(m) 3m	0.005952	0.005843	0.005626	0.005300	0.004975
x(m) 5m	0.007324	0.007195	0.006930	0.006549	0.006161
x(m) 7m	0.005952	0.005843	0.005626	0.005300	0.004975
x(m) 9m	0.002293	0.002246	0.002153	0.002014	0.001874

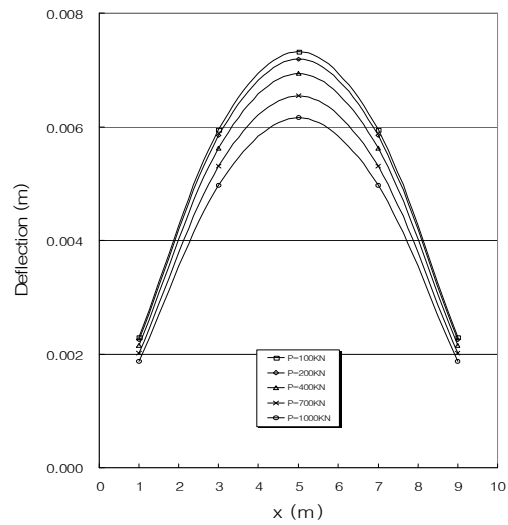


Fig. 11 Deflection Distribution (e=0.05m)

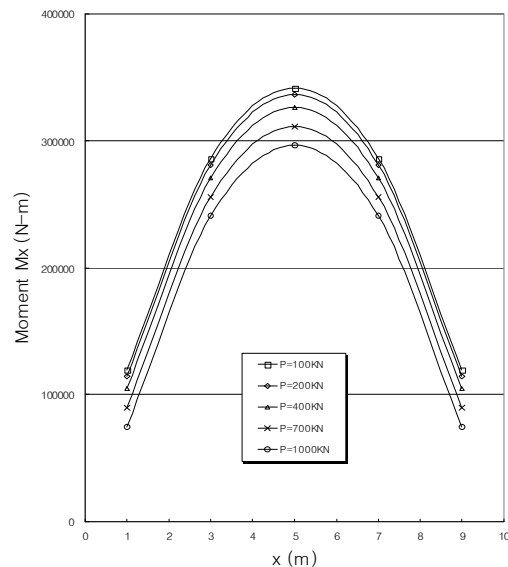
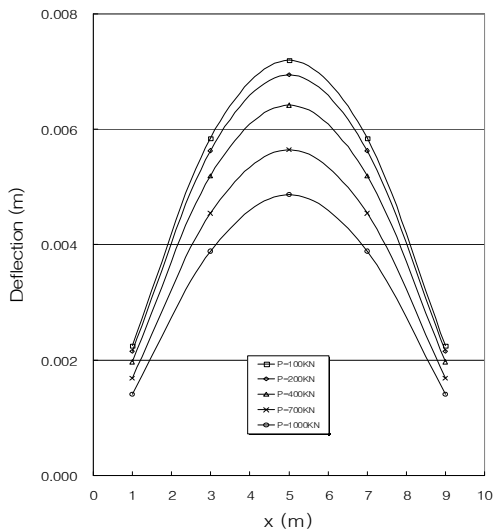


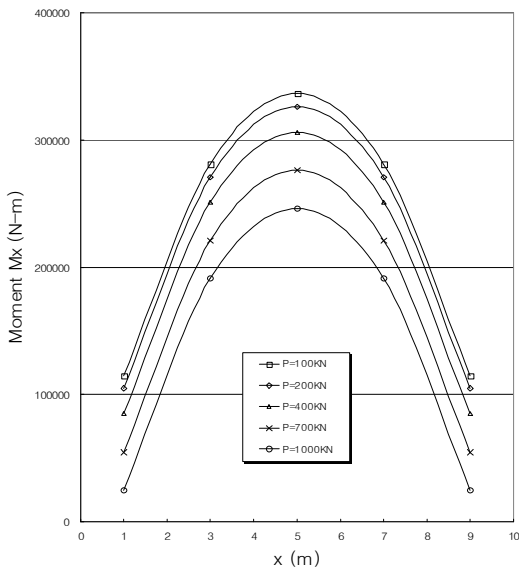
Fig. 12 Mx Distribution (e=0.05m)

**Table 9. Deflection with Increase of Axial Load (m) (e=0.1m)**

(Nx)	100kN	200kN	400kN	700kN	1000kN
x(m)					
1m	0.002246	0.002153	0.001967	0.001688	0.001409
3m	0.00584	0.005626	0.005192	0.004541	0.003889
5m	0.007195	0.006936	0.006420	0.005644	0.004869
7m	0.005843	0.005626	0.005192	0.004541	0.003889
9m	0.002246	0.002153	0.001967	0.001688	0.001409



**Fig. 13 Deflection Distribution (e=0.1m)**



**Fig. 14 Mx Distribution (e=0.1m)**

**4.4 결과 분석 및 고찰**

본 논문에서는 정확도를 검증하기 위해 양단 단순·타단자유 지지 된 경우 복합적층판 이론에 의한 처짐과 보 이론에 의한 처짐을 비교한 결과 중앙점 5m에서의 처짐은 축방향력 100kN에서 1.937%의 차이를 나타냈으며, 1,000kN에서의 차이는 3.749%로 거의 정확함을 알 수 있다. 축하중 증가에 따른 슬래브 중앙에서의 모멘트는 축하중 100 kN에서 1.065%의 차이를 나타내었으며, 1,000 kN에서는 2.408%의 차이를 나타내었다.

양단 단순·타단 자유 지지의 경계 조건하에서 복합적층판 이론에 의한 해석과 보 이론에 의한 해석 결과 처짐과 모멘트에서 큰 차이를 보이지 않았다. 같은 조건의 모멘트의 차이는 가장 큰 오차가 2.408% , 처짐에서도 3.749%의 오차만이 발생됨을 알 수 있다.

이러한 일련의 결과로부터 철근콘크리트 슬래브교를 복합적층판 이론에 의해서 해석하여도 무방함을 입증할 수 있었다. 따라서, 본 논문에 적용된 경계조건에 의한 해석방법은 철근콘크리트 슬래브교에 대한 보다 정확한 해석이 가능함을 제시할 수 있었다.

**5. 결론**

본 논문에서는 철근콘크리트 슬래브교를 복합적층판 이론에 의한 해석방법을 연구하였다. 경계조건은 양단 단순·타단 자유단의 형태로 단위폭을 가진 보에 대해 고려하였으며, 복합적층판 이론과 보 이론에 의한 처짐과 모멘트를 계산하여 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 철근콘크리트 슬래브교를 복합적층판 이론을 응용하여 해석하는 방법을 제시하였다.
- (2) 복합적층판 이론에 의한 해석과 보 이론에 의한 해석을 비교한 결과 본 해석 방법의 정확성을 입증할 수 있었다.
- (3) 축하중의 증가에 따른 처짐과 모멘트의 차이가 매우 적으므로 본 해석방법의 정확성을 입증할 수 있었다.
- (4) 본 논문에서 제시한 축방향 압축력과 단부모멘트, 그리고 등분포 수직하중을 받는 슬래브교에 대한 복합적층판 이론에 의한 해석방법을 제시하였으며, 이를 이용하여 기존의 철근콘크리트 슬래브교의 유지

및 보수, 보강 분야에도 응용될 수 있다.

Rectangular Plate.” *AIAA J.*, Vol. 8, No. 1 pp. 28-33.

## References

- Ashton, J. E. (1970). “Anisotropic Plate Analysis-Boundary Condition.” *J. Comp. Mat.*, Vol. 4, pp. 162-171.
- Goldberg, J. E. and Kim, D. H. (1967). The Effect of Neglecting the Radial Moment Term in Analyzing a Sectorial Plate by Means of Finite Differences, *Proceedings of the Seventh International Symposium on Space Technology and Sciences*, Tokyo, Japan.
- Han, B. K. and Kim, D. H. (2001). “Analysis of Steel Bridges by Means of Specially Orthotropic Plate Theory.” *Journal of KSSC*, Vol. 13, No. 1, pp. 61-69.
- Kim, D. H. (1974). A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Members, *Proceedings, International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites*, Seoul, Korea.
- Kim, D. H. (1993). Simple Method of Analysis for Preliminary Design of Certain Composite Laminated Primary Structures for Civil Construction II, *Journal of Materials Processing Technology*, 55, Elsevier, London.
- Kim, D. H. (1995). *Composite Structure for Civil and Architectural Engineering*, E & FN Spon, 1st edition, London.
- Kim, D. H., Han, B. K., Lee, J. H., Hong, C. W. (1999). “Simple Methods of Vibration Analysis of Three Span Continuous Reinforced Concrete Bridge with Elastic Intermediate Supports.” *Proceeding of the Advances in Structural Engineering and Mechanics*, Seoul, Vol. 2, pp. 1279-1284.
- Kim, D. H., Won, C. M. and Lee, J. H. (2001). “Analysis of Post-tensioned Bridge by Specially Orthotropic Laminate Theory (I) - Reinforced Concrete Slab Bridge.” *Proceeding of the Korea Society of Composite Materials*, pp. 135-139.
- Pagano, N. J. (1970). “Exact Solution for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates.” *J. Comp. Mat.*, Vol. 4, No. 1, pp. 20-34.
- Stephen, P., Timoshenko., and S. Woinowsky-Krieger (1989). *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, McGraw-Hill Book Co.
- Whitney, J. M. and Leissa, A. W. (1970). “Analysis of a Simply Supported Laminated Anisotropic