

다양한 기하학적 형상을 갖는 층간 분리된 복합신소재 적층구조의 동적 불안정성

이상열¹ · 장석윤²

중부대학교 토목공학과 전임강사¹, 서울시립대학교 토목공학과 명예교수²

Dynamic Instability of Delaminated Composite Structures with Various Geometrical Shapes

Lee, Sang-Youl¹ · Chang, Suk-Yoon²

¹Full-time Lecturer, Department of Civil Engineering, Joongbu University

²Emeritus professor, Department of Civil Engineering, University of Seoul

Abstract : The dynamic instability analysis of delaminated composite structures subjected to in-plane pulsating forces is carried out based on the higher order shell theory of Sanders. In the finite element (FE) formulation, the seven degrees of freedom per each node are used with transformations in order to fit the displacement continuity conditions at the delamination region. The boundaries of the instability regions are determined using the method proposed by Bolotin. The numerical results obtained for skew plates and shells are in good agreement with those reported by other investigators. The new results for delaminated skew plate and shell structures in this study mainly show the effect of the interactions between the radius-length ratio and other various parameters, for example, skew angles, delamination size, the fiber angle of layer and location of delamination in the layer direction. The effect of the magnitude of the periodic in-plane load on the instability regions is also investigated.

Key Words: composite structures, dynamic instability, delamination, high-order shear deformation

1. 서론

다양한 형태로 만들어진 복합신소재 구조는 저중량, 고강도, 그리고 고강성 등의 장점으로 인하여 공학 분야에서의 적용성이 증대되고 있다. 특히 경사형대 혹은 곡률을 갖는 구조형식은 해석상의 난해함에도 불구하고 현대 구조물에서 다양하게 사용되고 있다. 예를 들면, 항공기 날개 구조 또는 교량설계에 있어서도 경사된 판을 해석하는 경우가 빈번하다. 또한 곡률을 갖는 셸 구조는 지붕 구조를 비롯한 곡선부재에서 다양하게 적용되고 있다. 그러나 적층 구조부재에 개구부 등이 존재하거나 개구부 주위에 층간 분리현상이 발생하는 경우 정적 또는 동적거동에 중요한 영향을 미치게 되며 경우에 따라 불안정 상태에

도달할 수 있다. 좌굴과 같은 정적 불안정 해석은 다양한 연구자들에 의해 수행되었으나, 주기 하중을 받는 적층 구조의 동적 불안정에 관한 연구는 아직 미미한 실정이다.

복합신소재 판 혹은 셸구조에 대한 동적 안정성에 대한 해석은 주로 Bolotin의 방법을 적용하여 수행되었다. Srinivasan and Chelepani (1986)은 고전적 판이론(CPT)을 적용하여 복합신소재 적층판의 동적안정성을 연구하였으며, 이는 일차 전단변형 판이론(FSDT)을 적용하여 확장되었다(Bert and Birman, 1987; Balamurugan et al., 1996). Partha and Singha (2006)은 FSDT를 적용하여 경사판으로 확장 해석하였다. 이들의 해석은 Love의 고전셸이론 (Ng et al., 1998) 및 Donnell의 셸이론 (Ng et al., 1999)을 바탕으로 셸구조

주요어: 복합신소재 구조, 동적 불안정성, 층간분리, 교차항 이론

Corresponding author: Lee, Sang-Youl

Department of Civil Engineering, Joongbu University, 101 Daehak-ro, Chungnam 312-702, Korea
Tel: +82-41-750-6678, Fax: +82-41-750-6391, E-mail: leesangyoul@hanmail.net

투고일: 2010년 1월 31일 / 수정일: 2010년 2월 25일 / 게재확정일: 2010년 3월 2일

에 대하여 적용되었다. Sahu and Datta (2002)는 FSDT를 적용하여 개구부를 갖는 복합신소재 적층셀에 대한 동적 불안정 해석을 수행하였다. 그러나 이러한 연구들은 층간분리 손상을 고려하지 않았으며 CPT 혹은 FSDT에 근거한다는 한계성을 갖는다. 1차 전단 변형 판이론은 사각형 판과 같은 일반적인 형태에 대하여 비교적 정확한 진동특성을 보였다 (Reddy, 2004). 그러나 1차 판이론에서 가정되는 전단보정계수는 다양한 기하학적 조건을 갖는 판의 고유진동에 대하여 항상 정확한 결과를 장담할 수 없다. Lee and Wooh (2004)는 경계 조건 등의 변화에 따라 1차 전단 변형 판이론에 의하여 계산된 고유진동수는 정확성이 다소 떨어지는 경우가 발생함을 규명하였으며 고차 전단변형 판이론(HSDT)을 적용하여 박스형태의 복합재료 적층 구조물의 자유진동을 해석하였다. 이 밖에 다양한 고차전단변형 판이론을 적용한 등방성 혹은 비등방성 재료로 구성된 적층 판구조의 동적 해석은 활발하게 이루어지고 있다 (Bhimaraddi and Stevens, 1984; Kant et al., 1990; Lee and Yhim, 2004). Radu and Chattopadhyay (2002)는 HSDT에 근거하여 적층판의 동적 안정성해석을 수행하였으나, 이는 층간분리를 고려하지 않았다.

본 연구는 기존 연구의 한계 및 제한을 개선한 동적 안정 또는 불안정 해석을 수행하고자 한다. 첫째, 다양한 기하학적 형태를 갖는 복합신소재 구조를 해석한다. 주기함수 형태의 면내 하중을 받는 정사각형 판, 각도를 갖는 경사판, 개구부를 갖는 판, 그리고 곡률을 갖는 셸 등으로 나누어 기하학적 형상 변화에 따른 동적 안정성에 미치는 효과를 분석하고자 한다. 두 번째로 층간분리 현상을 고려한다. 층간 분리의 정도에 따라 동적 안정성의 변화를 분석한다. 특히 섬유보강각도 변화에 따른 동적 안정 영역의 변화 경향을 추적하도록 한다. 세 번째로 HSDT를 적용하여 해석의 정확성을 더욱 높이도록 한다. 마지막으로 세 가지 매개변수를 동시에 적용하여 상호영향을 상세 분석하여 동적 거동을 예측하고자 한다.

2. 적층셀에 대한 고차항 이론

본 연구에서 적용한 HSDT는 변형 전 판에서 중립면의 수직관계는 변형 후에도 수직한다는 CPT와 FSDT의 기본 가정과는 달리 변형 후에 중립면의 횡방향 변위는 비선형을 보이게 되며 실구조물과 같이 구조물의 상·하면에 전단 응력이 0으로 나타나게 된다. 본 연구에서는 Fig. 1과 같이 사각 개구부와 곡률을 갖는 셸구조와 경사각을 갖는 판구조에 대하여 적용하였다. Sanders(Sanders, 1963)의 셸 이론을 적용하

여 HSDT에 근간한 등가의 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_1 &= u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda, t) = u_o + \lambda \phi_1 - \zeta_1 \lambda^3 (\phi_1 + w_{0,x} - \frac{u_0}{R_1}) \\ u_2 &= v(\lambda_1, \lambda_2, \lambda, t) = v_o + \lambda \phi_2 - \zeta_1 \lambda^3 (\phi_2 + w_{0,y} - \frac{v_0}{R_2}) \\ u_3 &= w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda, t) = w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, u , v , 그리고 w 는 곡선좌표계에서의 변위, u_0 , v_0 , 그리고 w_0 는 Cartesian 좌표계에서의 중립면 변위를, ϕ_1 과 ϕ_2 는 회전각을, ζ_1 는 고차항 계수를 각각 의미한다.

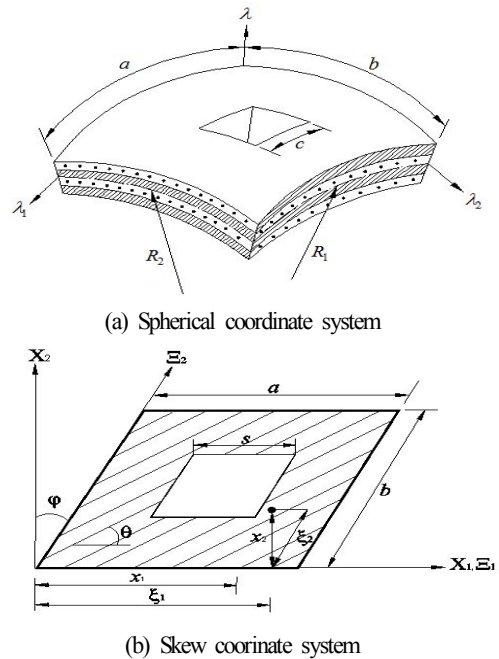


Fig. 1 Spherical and skew coordinate systems of composites

Hamilton의 원리에 의하여 셸의 고차항 이론에 의한 평형방정식은 다음과 같다(Lee and Reddy, 2004).

$$\begin{aligned} N_{1,x} + N_{6,y} + \frac{\bar{Q}_1}{R_1} + \frac{\zeta_2}{R_1} (P_{1,x} + P_{6,y}) &= I_0 \ddot{u}_0 + J_1 \ddot{\phi}_1 - \zeta_1 I_3 \ddot{w}_{0,x} \\ N_{6,x} + N_{2,y} + \frac{\bar{Q}_2}{R_2} + \frac{\zeta_2}{R_1} (P_{6,x} + P_{2,y}) &= I_0 \ddot{v}_0 + J_1 \ddot{\phi}_2 - \zeta_1 I_3 \ddot{w}_{0,y} \\ \bar{Q}_{1,x} + \bar{Q}_{2,y} + (N_{1,xx}^0 + N_{2,xx}^0) + \zeta_1 (P_{1,xx} + P_{2,yy} + 2P_{6,xy}) \\ - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} &= I_0 \ddot{w}_0 + \zeta_1^2 I_6 (\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) + \zeta_1 [I_3 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) \\ &\quad + J_4 (\ddot{\phi}_{1,x} + \ddot{\phi}_{2,y})] \\ \bar{M}_{1,x} + \bar{M}_{6,y} - \bar{Q}_1 &= J_1 \ddot{u}_0 + C_2 \ddot{\phi}_1 - \zeta_1 J_4 \ddot{w}_{0,x} \\ \bar{M}_{6,x} + \bar{M}_{2,y} - \bar{Q}_2 &= J_1 \ddot{v}_0 + C_2 \ddot{\phi}_2 - \zeta_1 J_4 \ddot{w}_{0,y} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, N_1^0 과 N_2^0 은 X와 Y방향으로의 외부하중을 의미한다. 그리고,

$$\bar{M}_k = M_k - \zeta_1 P_k \quad (k=1,2,6), \quad \bar{Q}_k = Q_k - \zeta_2 R_k \quad (k=4,5)$$

$$I_i = \sum_{k=1}^N \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \rho^{(k)}(\lambda)^i d\lambda \quad (i=0,1,2,\dots,6)$$

$$J_i = I_i - \zeta_1 I_{i+2}, \quad C_2 = I_2 - 2\zeta_1 I_4 + \zeta_1^2 I_6, \quad \zeta_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad \zeta_2 = 3\zeta_1$$

여기서, ρ 은 쉘의 밀도를 의미한다. Fig. 1(a)에서 R_1 과 R_2 를 무한대로 놓으면 기하학적으로 직사각형 판 형태가 된다. 다음으로 직각 좌표계 (X_1, X_2, X_3)와 경사 좌표계 (ξ_1, ξ_2, X_3)에 대하여 Fig. 1(b)를 참조하여 식(3)과 같은 관계에 의하여 경사진 판으로 변환할 수 있다. Fig. 1(b)에서 ψ 는 경사각도 θ 는 섬유 보강각도를 각각 의미한다.

$$\xi_1 = x_1 - x_2 \tan \psi, \quad \xi_2 = \frac{1}{\cos \psi} x_2 \quad (3)$$

적층 구조의 변형률 $\{\epsilon^{(0)}, \epsilon^{(1)}, \epsilon^{(3)}, \gamma^{(0)}, \gamma^{(2)}\}$ 와 관계된 단면력들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \\ \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] & 0 & 0 \\ [B] & [D] & [F] & 0 & 0 \\ [E] & [F] & [H] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [A] & [D] \\ 0 & 0 & 0 & [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{\epsilon^{(1)}\} \\ \{\epsilon^{(3)}\} \\ \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서, $\{N\}, \{M\}$, 그리고 $\{Q\}$ 는 면내력, 모멘트, 전단력을, $\{P\}$ 와 $\{R\}$ 은 고차항에 관련된 단면력을 의미한다.

3. 층간분리에 대한 유한요소 정식화

층간 분리를 갖는 적층 구조에 대한 유한요소법을 적용하는 경우 Fig. 2와 같이 세 가지 경우의 요소에 대하여 고려할 수 있다. 즉, (1)층간분리가 발생하지 않는 구역의 요소(Element I) (2)층간 분리의 상부 요소(Element II) (3) 층간분리의 하부 요소(Element III)를 의미한다.

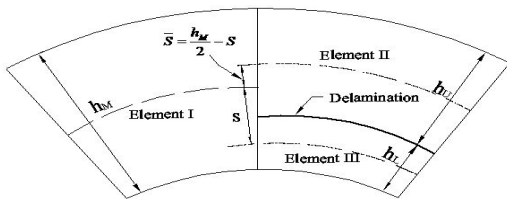
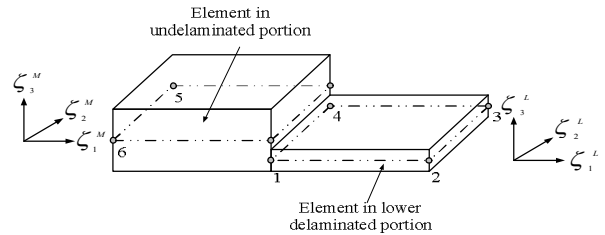
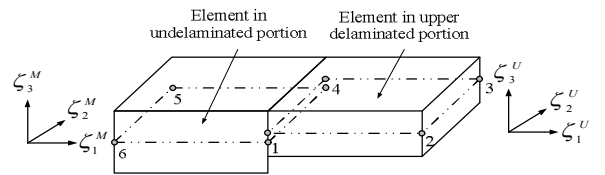


Fig. 2 Finite element at connecting boundaries

고차항이론을 적용한 적층 쉘은 Nonconforming 요소를 사용하는 경우 모두 7개의 자유도를 갖는다. 7개의 일반화된 변위 및 회전각은 식(5)로 나타낼 수 있다 (Park et al.,2008).



(a) Lower element at delamination part



(b) Higher element at delamination part

Fig. 3 Elements at delamination part

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \phi_{\lambda_1} \\ \phi_{\lambda_2} \end{Bmatrix} = \sum_{\zeta=1}^4 \Psi_{\zeta} [I_4] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{\zeta} \\ \tilde{v}_{\zeta} \\ \phi_{\lambda_{1\zeta}} \\ \phi_{\lambda_{2\zeta}} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tilde{w} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \lambda_2} \end{Bmatrix} = \sum_{\zeta=1}^4 \begin{bmatrix} \Gamma_{\zeta} & \Gamma_{\zeta} & \Gamma_{\zeta} \\ \frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_{\zeta} \\ \frac{\partial \tilde{w}_{\zeta}}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial \tilde{w}_{\zeta}}{\partial \lambda_2} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서, $[I_4]$ 는 4×4 크기를 갖는 Identity 행렬, Ψ_{ζ} 는 Lagrangian 보간함수, Γ_{ζ} , $\frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_1}$, 그리고 $\frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \lambda_2}$ 는 Hermite 보간함수, 1차 및 2차 미분을 각각 의미한다. 층간분리가 발생한 경우, 실제 3차원 경계면에서는 층간분리 상하면 요소에 대하여 Fig. 3과 같이 중립축이 불일치하게 된다. 그러나 2차원 요소를 사용하는 경우, 절점 변위는 중립축에서 동일해야 하므로 중립축을 서로 일치시키기 위한 보정이 필요하다. 본 연구에서는 층간 경계면의 상하부 요소의 중립축과 전체중립축을 일치시키는 치환관계를 적용하였다. 예를 들면, 4 절점 요소의 경우 Element III에 대하여 다음과 같은 관계식을 적용하여 Element I의 중립축과 일치시킨다.

$$\tilde{w}_{\beta}^L = \tilde{w}_{\beta}^M$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_{\beta}^L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \tilde{w}_{\beta}^M}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial \tilde{w}_{\beta}^L}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \tilde{w}_{\beta}^M}{\partial \lambda_2}, \quad \beta=1,2,3,4 \quad (6)$$

$$\phi_{\lambda_1\beta}^L = \phi_{\lambda_1\beta}^M, \quad \phi_{\lambda_2\beta}^L = \phi_{\lambda_2\beta}^M$$

여기서, 윗첨자 L과 M은 층간경계의 하부 요소와 전체 요소의 중립축을 각각 의미한다. 층간분리영역 하부요소의 변위 u^L 에 대하여 식(2)와 식(6)으로부터 다음과 같은 전체 중립축에서의 변위 관계식으로 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\beta^M &= \tilde{u}_\beta + \lambda_M \phi_{\lambda_1\beta}^M - \frac{4}{3(h_M)^2} \lambda_M^3 \left(\phi_{\lambda_1\beta}^M + \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} - \frac{\tilde{u}_\beta}{R_1} \right) \\ &= \tilde{u}_\beta - \frac{h_M}{2} \phi_{\lambda_1\beta}^M - \frac{4}{3(h_M)^2} \left(-\frac{h_M}{2} \right)^3 \left(\phi_{\lambda_1\beta}^M + \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} - \frac{\tilde{u}_\beta}{R_1} \right) \\ &= \tilde{u}_\beta - \frac{h_M}{2} \phi_{\lambda_1\beta}^M + \frac{h_M}{6} \phi_{\lambda_1\beta}^M + \frac{h_M}{6} \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} - \frac{h_M}{6} \frac{\tilde{u}_\beta}{R_1} \\ &= \left(1 - \frac{h_M}{6R_1} \right) \tilde{u}_\beta - \frac{h_M}{3} \phi_{\lambda_1\beta}^M + \frac{h_M}{6} \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\beta^L &= \tilde{u}_\beta + \lambda_L \phi_{\lambda_1\beta}^L - \frac{4}{3(h_L)^2} \lambda_L^3 \left(\phi_{\lambda_1\beta}^L + \frac{\partial \tilde{w}_\beta^L}{\partial \lambda_1} - \frac{\tilde{u}_\beta}{R_1} \right) \\ &= \tilde{u}_\beta - \frac{h_L}{2} \phi_{\lambda_1\beta}^L - \frac{4}{3(h_L)^2} \left(-\frac{h_L}{2} \right)^3 \left(\phi_{\lambda_1\beta}^L + \frac{\partial \tilde{w}_\beta^L}{\partial \lambda_1} - \frac{\tilde{u}_\beta}{R_1} \right) \\ &= \tilde{u}_\beta - \frac{h_L}{2} \phi_{\lambda_1\beta}^L + \frac{h_L}{6} \phi_{\lambda_1\beta}^L + \frac{h_L}{6} \frac{\partial \tilde{w}_\beta^L}{\partial \lambda_1} - \frac{h_L}{6} \frac{\tilde{u}_\beta}{R_1} \\ &= \left(1 - \frac{h_L}{6R_1} \right) \tilde{u}_\beta - \frac{h_L}{3} \phi_{\lambda_1\beta}^L + \frac{h_L}{6} \frac{\partial \tilde{w}_\beta^L}{\partial \lambda_1} \end{aligned} \quad (8)$$

식(6)의 관계로부터 \tilde{u}_β^L 는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\beta^L &= \frac{\kappa_M^L}{\kappa_M} \tilde{u}_\beta^M + \frac{h_M}{3\kappa_M} \phi_{\lambda_1\beta}^M - \frac{h_L}{3} \phi_{\lambda_1\beta}^L - \frac{h_M}{6\kappa_M} \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} + \frac{h_L}{6} \frac{\partial \tilde{w}_\beta^L}{\partial \lambda_1} \\ &= \frac{\kappa_M^L}{\kappa_M} \tilde{u}_\beta^M + \frac{1}{3} \left(\frac{h_M}{\kappa_M} - h_L \right) \phi_{\lambda_1\beta}^M - \frac{1}{6} \left(\frac{h_M}{\kappa_M} - h_L \right) \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} \\ &= \hat{g}_u^L \tilde{u}_\beta^M - \frac{1}{6} \hat{d}_u^L \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} + \frac{1}{3} \hat{d}_u^L \phi_{\lambda_1\beta}^M \quad (\beta=1,2,3,4), \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\hat{g}_u^L = \frac{\kappa_M^L}{\kappa_M}, \quad \kappa_M^L = 1 - \frac{h_M}{6R_1}, \quad \kappa_L^L = 1 - \frac{h_L}{6R_1}, \quad \text{and} \quad \hat{d}_u^L = \frac{h_M}{\kappa_M^L} - h_L.$$

나머지 각 변위에 대하여 동일한 방법으로 식을 유도하여 정리하면 다음과 같은 층간분리 영역 하부 요소와 층간분리가 발생하지 않은 영역의 중립축과의 관계식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_\beta^L \\ \tilde{v}_\beta^L \\ \tilde{w}_\beta^L \\ \frac{\partial \tilde{w}_\beta^L}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial \tilde{w}_\beta^L}{\partial \lambda_2} \\ \phi_{\lambda_1\beta}^L \\ \phi_{\lambda_2\beta}^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{g}_u^L & 0 & 0 & -\frac{\hat{d}_u^L}{6} & 0 & \frac{\hat{d}_u^L}{3} & 0 \\ 0 & \hat{g}_v^L & 0 & 0 & -\frac{\hat{d}_v^L}{6} & 0 & \frac{\hat{d}_v^L}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_\beta^M \\ \tilde{v}_\beta^M \\ \tilde{w}_\beta^M \\ \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial \tilde{w}_\beta^M}{\partial \lambda_2} \\ \phi_{\lambda_1\beta}^M \\ \phi_{\lambda_2\beta}^M \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$\hat{g}_v^L = \frac{\kappa_M^L}{\kappa_M}, \quad \kappa_M^L = 1 - \frac{h_M}{6R_2}, \quad \kappa_L^L = 1 - \frac{h_L}{6R_2}, \quad \text{and} \quad \hat{d}_v^L = \frac{h_M}{\kappa_M^L} - h_L.$$

식(10)을 간단한 식으로 요약하면 다음과 같다.

$$\{\delta_\beta\}^L = [\Omega]^U \{\delta_\beta\}^M, \quad \beta=1,2,3,4 \quad (11)$$

층간분리 영역의 상부 요소에 대해서도 동일한 방법으로 관계식을 유도할 수 있다. Fig. 4와 같이 층간분리 영역에서 각 경계면과 모서리에 따라 방향이 달라지므로 변위를 일치시켜야 하는 절점 번호가 다르게 된다. 예를 들면, Fig. 4에서 E-2에 대하여 변환식을 나타내면 식(12)와 같다. Fig. 4의 E-1~8에 대하여 변환관계 [C]를 정리하면 Table 1과 같다.

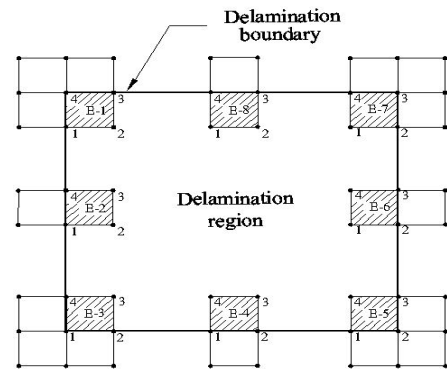


Fig. 4 Connecting boundaries at different locations of a delamination region.

$$\{\Delta\}^{U \text{ or } L} = [C] \{\tilde{\Delta}\}^{U \text{ or } L}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega \end{bmatrix} \quad (12)$$

층간분리 상하 요소에 대하여 2차원 중립축으로 변환된 요소강성매트릭스 $[\tilde{K}]_e$, 요소기하매트릭스 $[\tilde{G}]_e$, 그리고 요소질량매트릭스 $[\tilde{M}]_e$ 는 대각선 변환매트릭스 [C]를 각 경계면에 대하여 곱하여 구성할 수 있다.

Table 1. Diagonal terms in [C] matrix, and nodes for the eight different connecting boundaries

경계면	[C]	변환절점번호
E-1	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	1,3,4
E-2	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	1,4
E-3	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	1,2,4
E-4	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	1,2
E-5	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	1,2,3
E-6	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	2,3
E-7	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	2,3,4
E-8	$[\Omega, I, \Omega, \Omega]$	3,4

4. 동적 불안정 영역

셸의 동적안정성 해석은 다음과 같은 정적하중과 주기함수형태의 동적하중이 조합된 면내 하중 $q(t)$ 에 대하여 수행된다.

$$q(t) = \alpha_0 N_{cr} + \alpha_1 N_{cr} \cos \omega t = N_s + N_d \cos \omega t \quad (13)$$

여기서, N_{cr} 은 정적좌굴하중을, α_0 와 α_1 는 정적 및 동적 매개변수를, ω 는 하중 $q(t)$ 의 동적 부분의 고유진동수를 각각 의미한다. 식(13)을 고유치 문제 형태에 대입하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{\beta=1}^5 \sum_{j=1}^{n_\beta} (\tilde{M}_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta + [\tilde{K}_{ij}^{\alpha\beta} - (N_s + N_d \cos \omega t) \tilde{M}_{ij}^{\alpha\beta}] \Delta_j^\beta) = 0 \quad i = 1, 2 \dots n_\alpha \quad (14)$$

여기서, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ 이고, Nonconforming 요소에 대하여 $n_1 = n_2 = n_4 = n_5 = 4$, 그리고 $n_3 = 12$ 를, Δ_j^β 는 절점당 변위를 각각 의미한다.

식(14)는 Mathieu-Hill 형태의 방정식으로 정의하며, 이는 주기적 면내하중을 받는 셸에 대한 비선형 안정 혹은 불안정성을 나타낸다. 불안정에 대한 영역은 주기 T 와 $2T$ 를 갖는 주기해를 사용하여 산정하게 된다 (Bolotin, 1964). 일반적으로 주기 $2T$ 를 갖는 주불안정 영역(Primary instability regions)의 경계는 주기 T 를 갖는 영역보다 실용적으로 더 중요한 의미를 갖는다 (Bolotin, 1964; Sahu and Datta, 2002). 주기해는 다음과 같은 Fourier 함수를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$\Delta(t) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} [a_i \sin \frac{i\omega t}{2} + b_i \cos \frac{i\omega t}{2}] \quad (15)$$

식(15)의 급수 첫 번째 항을 고려하여 식(14)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$[K_{ij} - \alpha_0 N_{cr} M_{ij} \pm 0.5 \alpha_1 N_{cr} G_{ij} - 0.25 \omega^2 M_{ij}] \{\Delta\} = 0 \quad (16)$$

윗 식에 대하여 Non-trivial 조건은 다음과 같다.

$$\det \begin{bmatrix} K_{ij} - 0.25 \omega^2 M_{ij} - 0.5 G_{ij} & 0 \\ 0 & K_{ij} - 0.25 \omega^2 M_{ij} + 0.5 G_{ij} \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

식(17)은 일반화된 고유치문제 형태로 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\det \left[\begin{pmatrix} K_{ij} - 0.5 G_{ij} & 0 \\ 0 & K_{ij} + 0.5 G_{ij} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0.25 M_{ij} & 0 \\ 0 & 0.25 M_{ij} \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (18)$$

식(18)에서 (+)와 (-)부호는 동적 불안정 영역에 대한 경계부분을 의미한다. 고유치 ω 는 α_1 과 α_0 에 대하여 안정과 불안정 사이의 경계 진동수이다 (Lam and Ng, 1997).

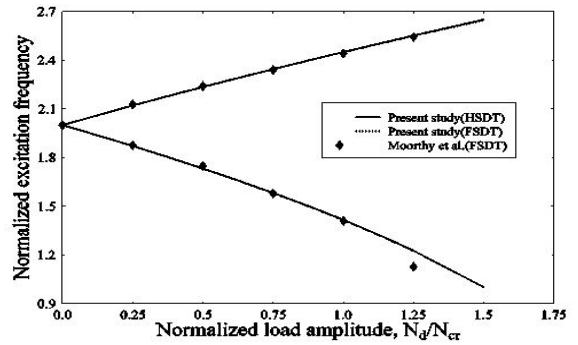


Fig. 5 Comparison of the principal instability region of square cross-ply composite plate with Moorthy et al. ($a/h = 25$, $N_s = 0$).

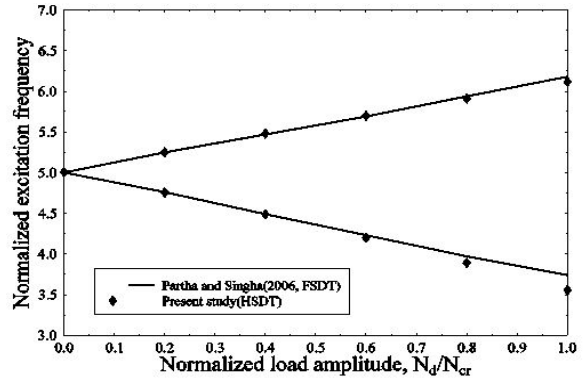


Fig. 6 Comparison of the principal instability region of skew cross-ply composite plate with Partha and Singha ($a/h = 100$, $N_s = 0$).

5. 수치 예제

5.1 기존 연구결과와의 비교

Figs. 5~6은 단순지지 cross-ply 정사각형 및 경사 적층판의 동적 불안정 영역을 비교한 것이다. 사용한 재료 물성은 $E_1 = 40E_2$, $G_{12} = 0.6E_2$, $G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.6E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 1.0$ 이다. FSDT에 대하여 기존 연구결과와 잘 일치하는 것으로 나타났으나, HSDT를 적용한 결과는 N_d/N_{cr} 이 증가함에 따라 다소 차이를 보였다. 이는 HSDT의 고차항 효과에 의한 것

으로 판단된다. 일반적으로 FSDT를 적용하는 것이 편리할 수 있으나 경우에 따라 HSDT를 적용해야 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있다. 예를 들면 경계조건의 변화 또는 비대칭 적층형태의 경우 FSDT에 의한 결과는 HSDT에 비해 비교적 큰 오차를 보이는 것으로 알려져 있다(Lee and Wooh, 2004). 따라서, 해석 결과의 정확성을 높이기 위하여 본 수치 예제에서는 HSDT에 기반한 동적 불안정 영역해석을 수행하기로 한다.

5.2 경사판의 기하학적 형상에 따른 분석

HSDT를 적용하여 경사 각도를 갖는 적층구조의 다양한 형상 변화에 따른 동적 불안정성 분석을 수행하였다. Fig. 7은 적층판의 경사각도 및 섬유보강각도 변화에 따른 동적 불안정 영역을 무차원화하여 도시한 것이다. Fig. 7과 같이 경사각도 변화는 동적 안정성 영역에 영향을 주고 있으나, [45/-45/-45/45] 형식을 갖는 적층판의 경우는 경사 각도변화에도 불구하고 불안정 영역의 위치와 폭에 큰 변화를 보이지 않아 설계상 바람직한 것으로 나타났다.

Fig. 8은 복합신소재 적층판의 경사 각도 및 중앙 개구부 크기 변화에 따른 동적 불안정 영역을 비교 도시한 것이다. 작은 크기의 개구부를 갖는 경우에는 비교적 작은 크기의 작용 하중에 대한 고유진동수에서 불안정 영역 시점을 관찰할 수 있다. 이는 개구부로 인한 강성저하가 단면 소실로 인한 질량 감소 효과보다 더욱 동적 불안정 영역에 증대한 영향을 미치기 때문으로 분석할 수 있다. 반면, 개구부가 큰 경우에는 경사 각도에 관계없이 동적 불안정 영역은 큰 고유진동수에서 출발한다. 이와 같이 개구부의 크기와 경사각도 변화는 섬유보강 각도 등과 함께 복잡한 상호관계에 의하여 예측하기 힘든 동적 거동 특성을 보임에 유의해야 한다.

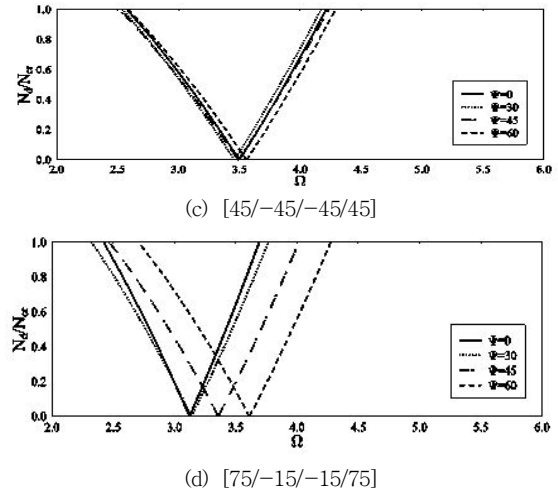
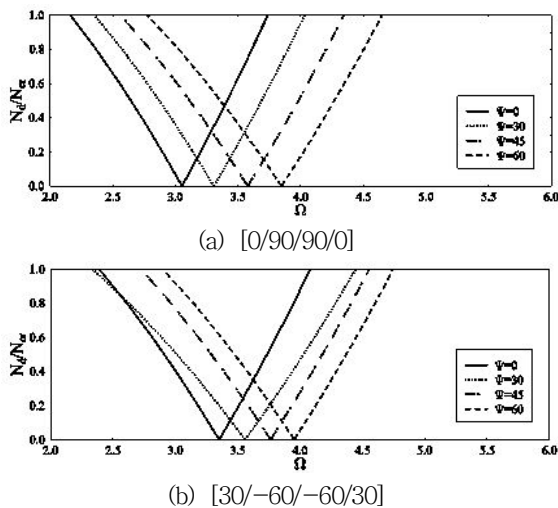


Fig. 7 Principal instability regions for unsymmetric laminated skew plates with various layup sequences and skew angles ($\Omega = \omega^2/\pi^2 h \sqrt{\rho/E_2}$, $N_s = 0$, $a/h=10$, No cutout).

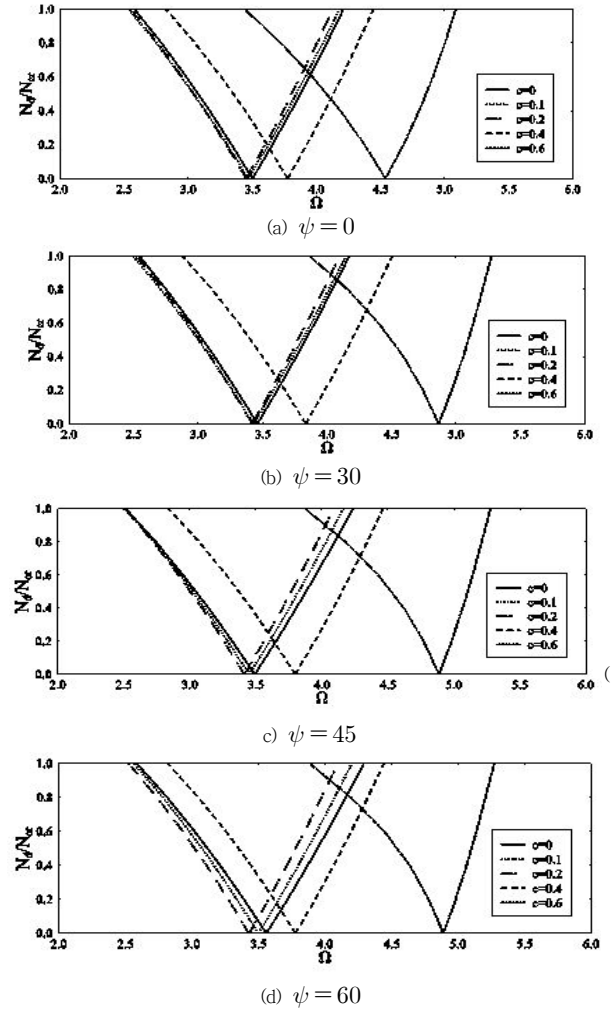
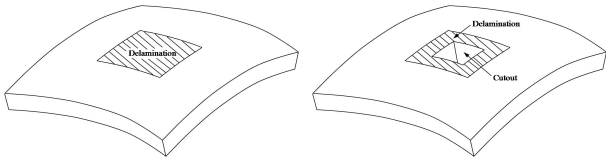
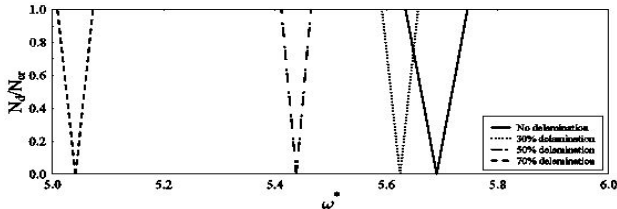


Fig. 8 Principal instability regions for unsymmetric laminated skew plates with various cutout sizes and skew angles ($\Omega = \omega^2/\pi^2 h \sqrt{\rho/E_2}$, $N_s = 0$, $a/h=10$, [45/-45/-45/45]).

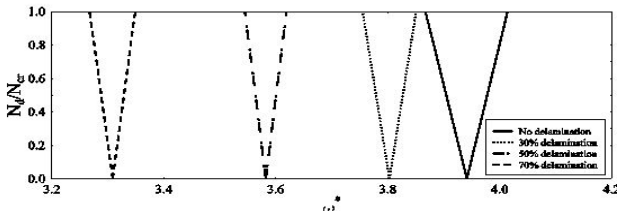


(a) Central delamination (b) Delamination around cutout

Fig. 9 Delamination model of a composite shell



(a) R=2.0

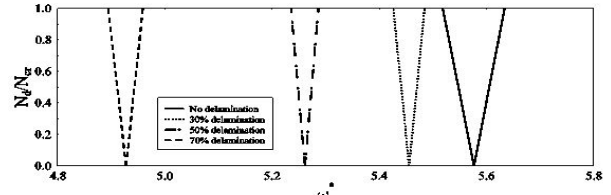


(b) R=5.0

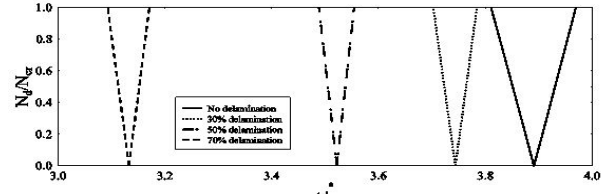
Fig. 10 Principal instability regions for symmetric laminated shells with various delamination sizes and radius-length ratios ($\omega^* = \omega a^2 / \pi^2 h \sqrt{\rho/E_2}$, $N_s = 0$, $a/h=10$, $[45/-45/-45/45]$, No cutout).

5.3 층간분리를 갖는 적층 쉘

Fig. 9는 쉘의 층간분리 모델을 보여준다. Fig. 10은 개구부를 갖지 않는 적층 쉘에 대하여 곡률 및 층간 분리 크기 변화에 따른 동적 불안정 영역을 보여준다. Fig. 10과 같이 층간분리 크기와 쉘의 곡률은 동적 불안정 영역에 큰 영향을 준다. Fig. 11과 같이 개구부 주위 층간분리가 발생하는 경우에 대해서도 유사한 결과를 보였다. 특히 곡률이 커지고 층간 분리 면적이 넓어지는 경우 불안정 영역의 폭도 증가하므로 유의해야 한다. Fig. 12는 20개로 적층된 두께 방향에 대하여 층간분리 위치변화에 따른 동적 불안정 영역 변화를 보여준다. 중립면에서부터 상하면으로 층간분리가 이동함에 따라 불안정 영역의 폭은 일정하게 증가함을 관찰할 수 있다. 또한 중립면 근처에서 발생한 층간분리는 불안정 영역의 폭에만 주로 영향을 주는 것으로 나타났다. 이는 두께방향으로의 강성은 매우 크기 때문에 동적 불안정 영역의 시작점은 층간분리 위치 변화에 큰 영향을 주지 않는 것으로 설명할 수 있다.



(a) R=2.0



(b) R=5.0

Fig. 11 Principal instability regions for symmetric laminated shells with various delamination sizes around cutout and radius-length ratios ($N_s = 0$, $a/h=10$, $[45/-45/-45/45]$, $c/b=0.1$, $R=2.0$).

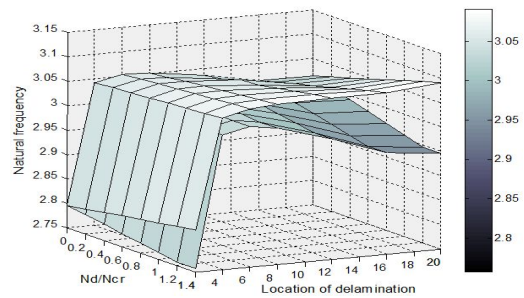


Fig. 12 Principal instability regions for symmetric laminated shells with various delamination locations ($N_s = 0$, $a/h=10$, $[0/90/90/0]_{5s}$, $c/b=0.1$, 30% delamination).

6. 결론

본 연구에서는 HSDT에 근간한 층간 분리를 갖는 복합신소재 적층 구조의 기하학적 형상 변화에 따른 동적 불안정 영역 해석을 수행하였다. HSDT에 대하여 층간분리 경계면에서의 2차원 요소의 중립면에서의 절점 변위를 일치시키는 관계식을 유도하였으며, 기존 연구결과와 비교 검증하였다. 경사 적층판의 개구부 크기 증가는 질량 감소보다 강성저하에 큰 영향을 미치게 되어 동적 불안정 영역의 출발점에 큰 영향을 주는 반면, 불안정 영역의 폭에 미치는 영향은 상대적으로 미미하다. 또한 경사각도변화에도 크게 민감하지 않았으나, 쉘의 경우 곡률 변화는 불안정 영역의 시작점 및 폭에 대하여 비교적 큰 영향을 미친다. 또한, 층간분리 면적 및 두께방향으로의 위치변화에 따라 동적 특성 변화에 민감하므로 유의해야 한다. 본 연구의 해석 결과는 다양한 매개변수에 대한

복합 신소재 적층 구조의 동적 불안정성에 대한 영향을 정확히 규명하는데 도움이 될 것으로 판단된다. 그러나 본 연구에서 제시한 결과는 대표적인 몇 가지 수치 해석 예이므로 더욱 상세한 분석은 각각의 개별 해석 모델에 따라 이루어져야 할 것이다.

References

- Balamurugan, M., Ganapathi, M., and Varadan, T. K. (1996). "Nonlinear dynamic instability of laminated composite plates using finite element method." *Comput. Struct.*, Vol. 60, No. 1, pp. 125-130.
- Bert, C. W. and Birman, V. (1987). "Dynamic instability of shear deformable antisymmetric angle-ply plates." *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 23, No. 7, pp. 1053-1061.
- Bhimaraddi, A. and Stevens, L. K. (1984). "A high order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates." *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 195-198.
- Bolotin, V. V. (1964). *The dynamic stability of elastic systems*, San Francisco, CA: Holden-Day.
- Kant, T., Varaiya, J. H., and Arora, C. P. (1990). "Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes." *Comp. Struct.*, Vol. 36, No. 3, pp. 401-420.
- Lam, K. Y. and Ng, T. Y. (1997). "Dynamic stability of cylindrical shells subjected to conservative periodic axial loads using different shell theories." *J. Sound Vib.*, Vol. 207, pp. 497-520.
- Lee, S. J. and Reddy, J. N. (2004). "Vibration suppression of laminated shell structures investigated using higher order shear deformation theory." *Smart Mat. Struc.*, Vol. 13, pp. 1176-1194.
- Lee, S. Y. and Wooh, S. C. (2004). "Finite element vibration analysis of composite box structures using the high order plate theory." *J. Sound Vib.*, Vol. 277, pp. 801-814.
- Lee, S. Y. and Yhim, S. S. (2004). "Dynamic analysis of composite plates subjected to multi-moving loads based on a third order theory." *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 41, pp. 4457-4472.
- Moorthy, J., Reddy J. N., and Plaut, R. H. (1990). "Parametric instability of laminated composite plates with transverse shear deformation." *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 26, pp. 801-811.
- Ng, T. Y., Lam, K. Y., and Reddy, J. N. (1998). "Dynamic stability of cross-ply laminated composite cylindrical shells." *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 40, No. 8, pp. 805-823.
- Ng, T. Y., Lam, K. Y., and Reddy, J. N. (1999). "Dynamic stability of cylindrical panels with transverse shear effects." *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 36, pp. 3483-3496.
- Park, T., and Lee, S. Y., and Voyiadjis, G. Z. (2009). "Finite element vibration analysis of composite skew laminates containing delaminations around quadrilateral cutouts." *Comp. Part B: Eng.*, Vol. 40, pp. 225-236.
- Patha, D., and Shigha, M. K. (2006). "Dynamic stability analysis of composite skew plates subjected to periodic in-plane load." *Thin-walled Struct.*, Vol. 44, pp. 937-942.
- Radu, A. G., and Chattopadhyay, A. (2002). "Dynamic stability analysis of composite plates including delaminations using a higher order theory and transformation matrix approach." *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 39, pp. 1949-1965.
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press, New York, pp. 25-35.
- Sahu, S. K. and Datta, P. K. (2002). "Dynamic stability of curved panels with cutouts." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 4, pp. 683-696.
- Sanders, J. L. Jr. (1963). "Nonlinear theories for thin shells Q." *Appl. Math.*, Vol. 21, pp. 21-36.
- Srinivasan, R. S. and Chelepani, P. (1986). "Dynamic stability of rectangular laminated composite plates." *Comput. Struct.*, Vol. 24, No. 2, pp. 233-238.