韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 3호, 2010. 9. 731-744

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 3, Sep. 2010. 731-744

# 역사적 고찰을 통한 이차곡선[1]의 지도방안

장 미 라 (전남중학교)
강 순 자 (전남대학교)

현행 교과서에서는 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등의 이차곡선이 원뿔을 잘랐을 때 나타나는 단면 곡선이라고 통합적으로 소개하면서도 실제로는 각각 2차식으로 표현된다는 점 외에 그 곡선들 사이의 어떤 연관성도 언급되어 있지 않다. '이차곡선'이라는 단원명에서 알 수 있듯이 기하학적 작도에 의해 도입된 원뿔곡선이 이차방정식으로 표현되고 이 방정식을 통해 초점, 꼭짓점, 준선 등을 찾는 기계적 활동만이 주를 이루고 있다.

본 논문에서는 원뿔곡선의 발견 이후부터 현재에 이르는 역사적 발달 과정 속에서 이루어진 다양한 논의를 통하여 이차곡선의 본질을 분석하고 이를 바탕으로 이차곡선의 교수·학습 방법 개선을 위한 시사점을 얻고자 한다.

## I. 서 론

오늘날 학교수학에서는 흔히 개념과 방법이 분리되어 다루어지는 경우가 있다. 그러한 경우 본질적인 수학적 개념은 방법으로서의 대수적인 도구에 묻혀버리고 절차적인 지식만이 남게 된다. 실제 학생들은 주어진 문제의 의미를 정확히 알기 전에 기계적으로 방정식을 세우고 풀어 답을 내는 일에 익숙해 있지만 정작 사용된 수학적 개념과 원리가 무엇인지, 만들어낸 식과 얻어낸 답이 어떤 의미를 갖는지에 대해서는 별로 관심을 두지 않는 경우가 많다.

현행 교과서에서는 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등의 이차곡선이 원뿔을 잘랐을 때 나타나는 단면 곡선이라고 통합적으로 소개하면서도 실제로는 각각 2차식으로 표현된다는 점 외에 그 곡선들 사이의 어떤 연관성도 언급되어 있지 않다. '이차곡선'이라는 단원명에서 알 수 있듯이 기하학적 작도에 의해 도입된 원뿔곡선이 이차방정식으로 표현되고 이 방정식을 통해 촛점, 꼭짓점, 준선을 찾는 등의 기계적 활동만이 주를 이루고 있다. 따라서 학생들은 이차방정식의 대수적 조작에는 능숙하지만 그 방정식이 어떻게 해서 원뿔을 잘랐을 때 나타나는 타원의 방정식인지, 포물선의 방정식인지, 쌍곡선

---

* 접수일(2010년 8월 10일), 심사(수정)일(2010년 9월 7일), 게재확정일자(2010년 9월 13일)
* ZDM 분류 : D14
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 이차곡선, 원뿔곡선, 타원, 쌍곡선, 포물선

1) 본 논문에서는 원뿔의 단면을 나타내는 경우에는 원뿔곡선으로 이차방정식을 나타내는 경우에는 이차곡선이라는 용어를 사용한다.

의 방정식인지를 알지 못하며 어떤 관심도 보일 기회를 갖지 못한다. 심지어 학생들은 쌍곡선을 포물선이 두 개 그려져 있는 정도로 이해하고 있으며 두 곡선 사이의 차이점을 명확히 인식하지 못하는 등의 오개념을 갖게 된다.

지금까지의 이차곡선에 대한 관심은 주로 이차곡선 지도에 있어서 기하학적 의미가 소홀히 되고 있다는 비판과 함께 이차곡선을 작도하는 방법과 기학학적 관점에서 이차곡선을 어떻게 지도할 것인지에 대한 많은 논문들이 주류를 이루고 있다. 또한 수학교육에서 실생활과의 관련성 및 유용성의 강조로 이차곡선이 실생활의 어느 곳에 나타나고 활용되는지에 관한 논문 또한 현재 이차곡선에 대한 연구의 주류 중 하나이다. 특히, 홍성관 · 박철호(2007)는 이차곡선의 교수 · 학습 상황에서 학생들은 단순히 대수적인 접근과 해석기하적인 접근만 시도하므로 그 본질의 기학학적 의미를 파악하지 못하며 기계적인 계산에 의해 문제를 풀어 나가려 하기 때문에 여러 가지 오개념을 갖게 된다고 지적하고 있다.

원뿔의 단면으로서의 3차원 곡선을 어떻게 평면 위에 옮겨놓을 수 있을까? 초점과 준선에 의해 작도된 이차곡선 그리고 이차방정식으로 표현되는 곡선의 그래프가 원뿔을 자른 단면의 곡선과 같은 곡선일까? 같은 곡선이라면 원뿔의 단면으로서의 곡선에서 초점과 준선은 어떻게 찾아야 할까? 이러한 이차곡선들을 통합적으로 표현하는 또 다른 방법은 없을까? 수학자들은 이차곡선의 역사적 발달 과정을 들여다보면서 끊임없이 이러한 질문을 하고 이 질문에 대한 답을 얻으려 노력해 왔다.

우정호(2004)에 의하면 교수학적 분석은 학교수학을 열어 교육적으로 의미 있는 지식으로 파악하는 것이다. 즉, 학교수학의 지식의 본질을 이해하고 그에 기초하여 현실을 평가함으로써 문제점을 인식하고 개선방안을 모색하는데 중요한 역할을 한다. 특히, 수학의 역사에 기초해 수학적 지식의 본질을 고찰함으로써 닫힌 지식을 열어 의미가 풍부한 열린 지식으로 변환하는 것은 교육적으로 의미 있는 일일 것이다.

본 논문에서는 원뿔곡선의 발견 이후부터 현재에 이르는 역사적 발달 과정 속에서 이루어진 다양한 논의를 통하여 이차곡선의 본질을 분석하고 이를 바탕으로 이차곡선의 교수 · 학습 방법 개선을 위한 시사점을 얻고자 한다.

## II. 이차곡선의 역사적 고찰

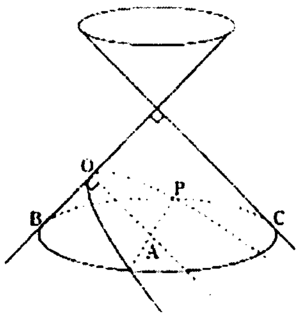
유클리드와 아르키메데스, 아폴로니우스에게 원뿔곡선은 구성적이고 연역적인 기하에 의해 분석되고 잘 정의된 하나의 기하학적 대상이었다. 이러한 기하학적 대상의 특성이 연구되고 이 특성에 따라 원뿔곡선이 관계로써 설명되었으며 드디어 해석기하의 발달과 함께 대수적 방정식으로 표현되면서 원뿔곡선은 이차곡선이라는 하나의 카테고리 속에서 통합적으로 다룰 수 있게 되었다.

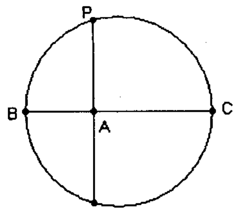
### 1. 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선

메나에크무스(Menaechmus, 기원전 35~325년)는 그리스 수학의 3대 난문제인 주어진 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 원적문제, 임의의 각을 3등분하는 선분을 작도하는 각의 삼등분 문제, 주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도하는 배적문제의 해법을 연구하는 과정에서 나타나는 곡선의 작도를 시도하였으나 이러한 곡선의 작도는 자와 컴퍼스만으로는 작도할 수 없어 고민하다 원뿔을 절단하여 원뿔곡선을 발견했다.

그는 세 종류의 원뿔, 즉, 원뿔의 꼭지각의 크기가 직각보다 작은 직원뿔, 직각인 직원뿔, 직각보다 큰 직원뿔의 각 모선(母線,generating line)에 수직인 평면으로 원뿔을 잘랐을 때 나타나는 단면의 곡선을 생각했다. 현대의 원뿔곡선의 구성방법과 달리 그는 한 원뿔의 꼭지각을 변화시켜가며 타원, 포물선, 쌍곡선과 같은 원뿔곡선들을 만들어 냈다. 그리고 메나에크무스는 곡선을 만드는 방법에 착안해서 이것들을 각각 '예각 원뿔의 절단면', '직각 원뿔의 절단면', '둔각 원뿔의 절단면'이라 명명하였다. 그러나 하나의 원뿔을 이용하여 곡선을 만들었기 때문에 쌍곡선도 지금과 같이 곡선 2개로 이루어지지 않고 1개의 곡선으로만 존재하는 것으로 알았다[남호영외(2005)].

특히, 그가 원뿔곡선에 대하여 제시한 기하학적 특성은 현대의 대수적 표현과 흡사하다. 이는 이차곡선의 지도 방안 개선에 한 실마리를 제공하고 있다고 할 수 있다. 꼭지각의 크기가 직각인 직원뿔을 한 모선에 수직인 평면으로 잘라 얻은 곡선의 꼭짓점을 O라 하자. 또 이 단면 위에서 그 곡선의 대칭축 위에 있는 한 점 A를 지나고 곡선의 축에 수직인 직선을 그어 포물선과 만나는 점을 P라 한다. 이 때 P는 A를 지나고 이 직원뿔의 축에 수직인 평면으로 이 직원뿔을 자른 단면인 원 위에 있다. 지금 A를 지나는 이 지름을 BC라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BA} \cdot \overline{AC}$ 이다.




그런데 $\overline{BA} : \overline{OA}$ 는 일정하므로 $k$를 상수로 하여 $\overline{BA} = k \cdot \overline{OA}$ 로 놓을 수 있다.

따라서 이 식은 $\overline{AP}^2 = (k \cdot \overline{OA}) \cdot \overline{AC} = (k \cdot \overline{AC}) \cdot \overline{OA}$ 로 쓸 수 있다.

그런데 $k$와 $\overline{AC}$ 는 모두 일정하기 때문에 $k \cdot \overline{AC}$ 를 $l$로 놓으면 포물선의 방정식은 $\overline{AP}^2 = l \cdot \overline{OA}$ 로 된다. 좌표계가 도입되기 이전의 이러한 관계적 표현은 포물선의 꼭짓점을 원점,

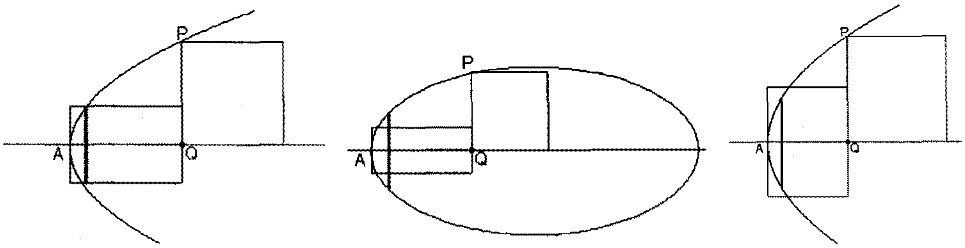
대칭축을 $x$축으로 할 때 포물선의 방정식은 $y^2 = lx$라는 포물선에 대한 현대의 대수적 표현과 일맥상통한 것이다. 이러한 접근은 원뿔의 단면과 이차 방정식과의 관련성을 명백히 해 주는 접근 방법이라 할 수 있다[조윤동(1998)].

메나에크무스의 뒤를 이어 이차곡선의 연구에 공헌한 사람 중의 하나가 아폴로니우스(Apollonius of Perga, 기원전 262?~190?)이다. 아폴로니우스는 원뿔을 모선에 수직인 평면으로 자르지 않고, 절단면의 기울기를 변화시키는 것만으로도 하나의 원뿔에서 세 종류의 원뿔곡선을 모두 얻을 수 있음을 보였다. 이것은 세 종류의 곡선을 서로 자연스럽게 연결시킨 중요한 첫 걸음이었다. 아폴로니우스는 원뿔이 반드시 직원뿔일 필요 없이 기운 원뿔에서도 마찬가지로 만들어지는 것을 보였다. 아폴로니우스는 원뿔을 "어떤 정점을 항상 지나는 무한의 길이를 갖는 직선이 그 점과 동일 평면상에 있지 않은 원의 원둘레 위의 각 점을 지나서 움직일 때, 그 직선의 자취는 이중원뿔이 된다."라고 정의하였다. 축이 한 직선 위에 있으면서 꼭짓점을 맞댄 똑같은 두 원뿔의 절단면의 곡선은 현대의 관점에 부합한 원뿔곡선의 기하학적 정의였다. 이 새로운 정의에 따라 쌍곡선은 오늘날과 같은 두 갈래 곡선이 되었다. 이 곡선을 기하학자들은 한 쌍곡선의 '두 갈래 '라고 하지 않고, '두 개의 쌍곡선'이라고 하였는데, 어느 쪽이든 원뿔곡선의 쌍대성을 인식하고 있던 것이다[양영오 · 조윤동(2000)].

아폴로니우스는 메나에크무스와 비슷한 방법으로 하나의 원뿔을 여러 가지 평면으로 자르면서 이 평면에 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면이 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 따라 위와 같은 방식으로 나타내어 $y^2 = lx - kx^2$, $y^2 = lx$, $y^2 = lx + kx^2$임을 보였다. 이때, $k$는 일정한 상수이다. 여기서 아폴로니우스는 $y^2 < lx$, $y^2 = lx$ ,$y^2 > lx$ 인 것에 주목하여 이것들을 각각 모자라다(ellipsis), 일치하다(parabole), 남다(hyperbole)라고 하였고, 그 후 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)이라는 이름으로 부르게 된 것이다. 이와 같은 '작다, 크다, 같다'의 명확한 의미를 정확히 분석하자면 다음과 같다.

포물선을 나타내는 식 $y^2 = lx$가 의미하는 것은 포물선 위의 임의의 점을 잡았을 때, $y$좌표를 한 변의 길이로 하는 정사각형의 넓이는 $x$좌표와 $l$을 가로, 세로로 하는 직사각형의 넓이와 같다는 특징을 발견할 수 있다. 이차곡선을 정사각형과 연결시키는 고전적 작도의 기본 아이디어는 피타고라스의 직사각형 면적의 응용방법에 있다.

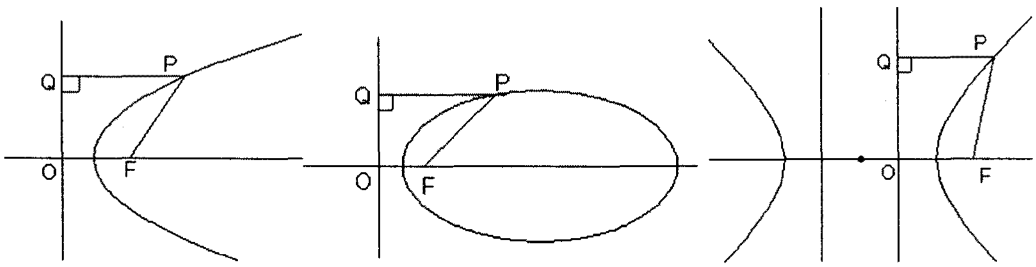
아래 그림에서 보듯이 곡선 위의 점 P에 대하여 넓이가 $\overline{PQ}^2$인 정사각형과 넓이가 같고 한 변이 $\overline{AQ}$ 인 직사각형(어두운 부분)의 세로가 이러한 원뿔곡선의 폭과 '같다'는 뜻에서 포물선(parabola)이라 이름 붙인 것이다. 마찬가지로 타원, 쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대해서는 넓이가 $\overline{PQ}^2$인 정사각형과 넓이가 같고 한 변이 $\overline{AQ}$ 인 직사각형(어두운 부분) 세로는 원뿔곡선의 폭보다 '짧다' 혹은 '길다'는 원뿔 곡선의 성질로부터 ellipse, parabola, hyperbola라는 용어가 만들어진 것이다. 이것은 세 원뿔곡선을 하나의 개념으로 연결시킨 최초의 시도였다[남호영외(2005)]. 특히, 이러한 원뿔곡선의 특성은 교수 학습 관점에서 볼 때 원뿔 곡선들 간의 관련성을 이해할 수 있는 좋은 기하학적 특성이다.



<아폴로니우스의 포물선, 타원, 쌍곡선>

## 2. 원뿔의 기하학적 특성에 의한 원뿔곡선 표현

원뿔곡선의 개념을 하나로 통일시키려는 노력은 파푸스(pappus of alexandria, B.C. 290~350)에 의해서도 이루어졌다. 아래 그림과 같이 파푸스는 F를 초점, P를 곡선 위의 임의의 점이라 하고 Q를 P에서 준선에 그은 수선이라 하면 세 가지 형태의 곡선 어느 것이나 모두 $\overline{PQ}$에 대한 $\overline{PF}$의 비(곧, $\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}}$)가 각각 일정하다는 사실을 발견하였다. 즉, 비 $\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}}$의 값 e는 현대적 의미의 이심률이며 $e<1$이면 타원, $e=1$이면 포물선, $e>1$이면 쌍곡선, $e=0$이면 원임을 알아낸 것이다[조윤동(1998)].



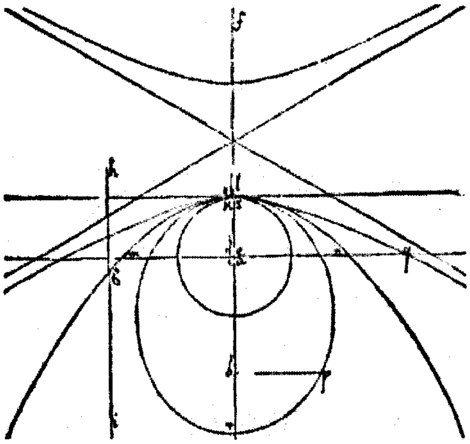
$e=1$ $0<e<1$ $e>1$

<파푸스의 이심률을 활용한 이차곡선의 분류>

위 사실에서 볼 때 파푸스는 이미 원뿔곡선이 초점과 준선에 의해 작도될 수 있다는 중요한 사실을 알고 있었던 것 같다. 그러나 그러한 초점과 준선이 원뿔의 단면으로서의 기하학적 곡선으로부터 어떻게 찾아졌는지, 원뿔의 단면으로서의 곡선이 초점과 준선에 의해 작도된 곡선과 일치하는지에 대한 명확한 설명은 없다. 다만 3차원적 곡선이 아닌 이차원 곡선으로서의 원뿔곡선을 다루고 있다는 점에서 파푸스의 연구는 한층 진보된 것이라 할 수 있다.

광학, 포물면 거울의 특성을 연구하기 위해 원뿔곡선에 관심을 가졌던 케플러Kepler(1571~1630)는

아폴로니우스가 원뿔곡선을 타원, 포물선, 쌍곡선의 서로 다른 세 가지 유형으로 나눈 것과는 달리 초점을 사용하여 원뿔곡선은 한 쌍의 직선으로부터 원까지의 5가지 곡선 형태가 연속적으로 생긴다고 보았다. 즉, 그는 "원뿔곡선은 교차하는 두 곡선에서 시작되고 그 교점에서 두 초점이 생긴다. 한 초점이 다른 초점으로부터 멀어짐에 따라 점차로 무수히 많은 쌍곡선이 나타난다. 그리고 하나의 초점이 무한히 멀어졌을 때는 두 개의 쌍곡선이 아니라 포물선이 된다. 이 움직이는 초점이 무한원[2]을 통과하여 반대 방향에서 다시 접근해 올 때는 무수히 많은 타원이 나타난다. 그래서 마지막 두 초점이 일치하면 원이 된다."라고 설명하였다. 그는 포물선은 무한에 초점을 가진 타원이라고 말했는데 정의되지 않은 점이 초점이라는 것은 무엇을 의미하는지에 대한 설명은 명확하지 않았다. 평면상의 점들은 입체사영에 의해 구면 위의 점에 대응하다는 의미에서 볼 때 구면의 북극점은 무한 점에 대응한다. 이것은 평면의 한 점 컴팩트화이다. 평면의 곡선은 구면 위의 곡선에 대응한다. 따라서 한 초점이 구면의 북극에 있는 타원은 평면의 포물선에 대응한다. 이런 의미에서 포물선은 무한에 초점을 가진 타원이라는 말을 이해해야 할 것이다. 케플러의 이와 같은 생각은 원뿔곡선들이 밀접하게 연결되어있으며 초점의 위치변화에 따라 자연스럽게 서로의 모양으로 변화되어간다는 것을 잘 보여주고 있다. 이러한 케플러의 관점을 동적 기하도구를 이용하여 실현한 자료는 원뿔곡선들 간의 연속적인 변화를 보여줌으로써 서로의 밀접한 관련성을 이해하는 데 도움이 될 것이다.



< Kepler의 초점의 위치변화에 따른 원뿔곡선의 변화 >

또 Kepler는 원뿔곡선과 넓이를 계산하는 방법을 이용하여 행성의 운동에 관한 법칙을 발견하기도 하였다[김용운 · 김용국(1988)].

2) 포물선이 두 개의 초점을 가지며 그 하나는 무한원에 있다는 아이디어는 Kepler에서 나온 것이다. 이러한 개념은 1세기 후에 Desargues에 의해 확장된다[23].

### 3. 원뿔곡선의 대수적 표현

데카르트(Descartes, 1536~1650)는 많은 곡선으로부터 대수 방정식을 도출하였다. 그러나 그는 방정식을 가지고 좌표에 점들을 찍어서 곡선을 만들지는 않았다. 곡선을 그리는 기하학적 방법이 주어지고, 곡선을 그리는 도구에 포함된 기하학적 행동을 분석하고, 좌표에 의해 곡선의 방정식을 알아내는 과정으로 연구하였다[Dennis.D(1995)]. 그는 대수적 식으로 방정식을 분류하였으나 기하학적 행동을 분석해서 얻어지지 않은 방정식은 중요하지 않다고 생각했다. 데카르트는 파푸스의 자취문제를 연구하여 원점을 지나는 원뿔곡선의 일반적인 방정식 $y^2 = ax - bxy + cx - dx^2$을 이끌어내었다. 데카르트는 이 방정식이 직선, 포물선, 타원 또는 쌍곡선이 되기 위한 계수의 조건을 지적함으로써 원뿔곡선의 특성을 어느 정도 이해하고 있었음을 알 수 있었다.

Wallis(1616~1703)는 데카르트가 시작한 원뿔곡선의 산술화를 완성하였다. 그는 평면좌표를 사용하여 아폴로니우스 때부터 원뿔곡선의 잘 알려진 성질로부터 세 개의 표준형 $p^2 = ld$, $e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}$, $h^2 = ld + \frac{ld^2}{t}$을 이끌어냈다. 여기서 $e, p, h$는 각 원점에 위치하는 꼭짓점에서 측정한 가로좌표 $d$ 에 대응하는 포물선, 타원, 쌍곡선의 세로좌표이다. 또 $l$과 $t$는 각각 동경과 '지름' 또는 축이다. 이후 그는 이 세 개의 방정식을 원뿔곡선의 독립적인 정리로 사용하였는데 이것으로 원뿔곡선은 원뿔을 이용한 정의에서 벗어났다. 이로 인해 오늘날 원뿔곡선을 평면 좌표계에서 그 좌푯값이 두 변수의 이차방정식을 만족하는 점의 자취로 정의하게 되면서 이차곡선이라 부르게 되었다[양영오 · 조윤동(2000)].

1579년 Guidobaldo del Monte(1545~1607)는 타원을 두 점으로부터의 거리 합이 일정한 점들의 자취로 정의하였다. Van Schooten(1615~1660)은 1657년에 데카르트에 의한 기하학(Geometria a Renato Descartes)에서 초점과 준선방법을 사용하여 포물선 그리기를 시도하였다. Boyer는 또한 원뿔곡선이 초점과 준선에 의해 결정된다는 것을 알아내었다. 이로 인해 원뿔곡선이 대수적으로 표현되면서 그 내용과 본질이 이차 곡선으로 바뀌게 되었다. 이후에 해석기하가 미분적분학으로 발전하면서 이차곡선은 곡선과 방정식을 서로 관련지어 연구되었다.

### 4. 원뿔의 단면으로서의 곡선과 평면곡선으로서의 원뿔곡선의 연결

Dandelin(1794~1847) 이전 원뿔곡선에 대한 연구는 3차원적 접근과 2차원적 접근이 분리된 채 연구 및 발달되어왔다. Dandelin은 원뿔의 단면에서 초점과 준선을 찾고 이 초점과 준선에 의해 원뿔곡선을 작도함으로써 원뿔곡선에 대한 2차원적 접근과 3차원적 접근을 연결하려고 시도하였다. 그 결과 1822년 Dandelin의 구를 발견하고 이것을 이용하여 그동안 2차원적 접근과 3차원적 접근의 연결고리인 두 정리를 명확하게 증명하였다. 즉, 원뿔곡선의 초점을 원뿔의 단면모양과 관련지은 연구

결과를 발표하게 된 것이다. 다음은 Dandelin이 Dandelin의 구를 정의하고 이를 이용하여 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선의 초점, 준선을 찾고 이들 사이의 기하학적 관계를 증명함으로써 원뿔곡선의 3차원적 접근에서 이차곡선의 이차원적 접근에 이르게 하는 결과를 보여주고 있다.

**i) 포물선의 증명**

모선과 평행하게 잘라낸 평면 β와 원뿔에 접하는 구를 하나 그리고, 원 C를 품는 평면 α와 평면 β와의 교선을 $l$이라 하고 포물선 위의 임의의 점 P에서 평면 α와 교선 $l$에 내린 수선의 발을 각각 R, H라 하자. 또 평면 β와 구의 접점을 F라 하자.

선분 RC와 원 C가 만나는 점을 Q라 하면 직선 PQ는 구의 접선이다.

구의 접선의 길이는 모두 같으므로 $PF = PQ$ …①

원뿔의 축과 직선 PR은 평행하므로

$\angle QPR = \angle HPR$(∵축과 모선 PQ, PH가 이루는 각)

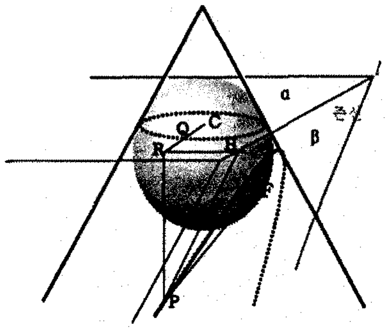
$\angle QPR = \angle HPR$, 직선 PR은 공통,

$\angle QRP = \angle HRP$(직각)

$\triangle HRP \equiv \triangle QRP$

∴ PQ = PH …②

①,②에서 PF=PH




따라서, 평면 β로 잘라서 생기는 곡선은 F를 초점, 직선 $l$을 준선으로 하는 포물선이다.

**ii) 타원의 증명**

모선보다 기울기가 작게 잘라낸 평면 β와 원뿔에 접하는 두 개의 구를 생각하자.

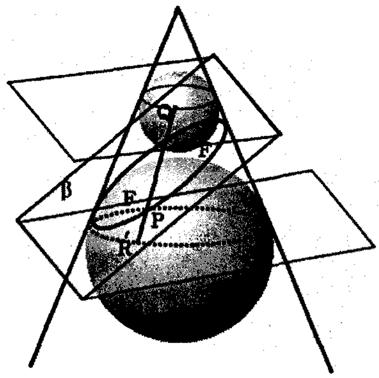
평면 β와 원뿔이 만나서 생기는 곡선위의 임의의 점을 P, 평면 β와 두 구의 교점을 각각 $F$, $F'$, 점 P와 원뿔의 꼭짓점을 지나는 직선의 연장선과 두 구의 교점을 각각 Q, R이라 하면 구의 접선의 길이는 모두 같으므로

$PQ = PF$ …① $PR = PF'$ …②

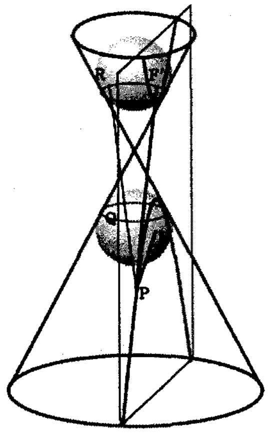
①,②에서

$PF + PF' = PQ + PR = QR$(일정)

따라서 평면 β와 원뿔이 만나서 생기는 곡선은 두 초점이 $F$, $F'$인 타원이다.



**iii) 쌍곡선의 증명**




모선보다 기울기가 크게 잘라낸 평면 β와 원뿔에 접하는 두 개의 구를 생각하자. 평면 β와 원뿔이 만나서 생기는 곡선위의 임의의 점을 P, 평면 β와 두 구의 교점을 각각 $F$, $F'$, 점 P와 원뿔의 꼭짓점을 지나는 직선의 연장선과 두 구의 교점을 각각 Q, R이라 하면

구의 접선의 길이는 모두 같으므로

$PQ = PF$ …① , $PR = PF'$ …②

①,②에서 $PF' - PF = PR - PQ = QR$(일정)

따라서 평면 β과 원뿔이 만나서 생기는 곡선은 두 초점이 $F$, $F'$인 쌍곡선이다.

# Ⅲ. 역사적 관점에서 분석을 통한 이차곡선의 지도방안

아폴로니우스 시대 이래로, 원뿔곡선은 원뿔의 단면으로서의 기하학적 성질에 의해 표현되고, 좀 더 깊이 이해하게 됨에 따라 대체로 관계에 의해서 표현되어지면서 점차 원뿔의 모양이나 단면의 모양으로부터 독립해 나갔다. 그와 함께 3차원적 접근에서 2차원적 접근으로 관점이 옮겨지게 되었다. 17세기에는 해석기하학의 발달과 함께 계산에 기초하여 2차원적 접근이 진행되었고 방정식을 통해 원뿔곡선을 대수적으로 표현함으로써 정점에 이르게 되었다. 이러한 기하학적 대상에서 출발하여 이차방정식을 만족하는 점의 자취로서의 원뿔곡선이 형식화되는 오랜 과정을 통해 완성된 대수적 표현을 얻게 됨으로써 기학학적 개념의 곡선보다는 이차방정식을 통한 이차곡선의 이해가 이차곡선의 교수·학습의 주된 초점이 되었다.

톰(Thom, 1973)은 "대수는 구문론(syntax)[3]에서는 풍부하지만 의미론(meaning)에서는 약하다. 그러나 기하는 그것의 역이 성립한다."라고 말했다. 대수적 조작에 길들여지다 보면 그 수학적 개념이 가질 수 있는 풍부한 의미를 놓칠 수 있다는 것이다[김부윤외(1996)].

홍성관·박철호(2007)는 이차곡선의 교수학습 상황에서 학생들은 단순히 대수적인 접근과 해석기하적인 접근만 시도하므로 그 본질적인 기학학적 의미를 파악하지 못하며 기계적인 계산만 수행하여 문제를 풀어 나가려 하기 때문에 여러 가지 오개념을 가지게 된다고 지적하고 있다. 지금까지의 이차곡선에 대한 관심은 주로 이차곡선의 지도에 있어서 기하학적 의미가 소홀히 되고 있다는 비판과 함께 이차곡선을 작도하는 방법과 기학학적 관점에서 이차곡선을 어떻게 지도할 것인지에 대한 많은 논문들이 주류를 이루고 있다[황우형·차순규(2002), 정성두(2000), 박기영·강순자(2004)]. 또한 수학교육에서 실생활과의 관련성 및 유용성의 강조로 이차곡선이 실생활의 어느 곳에 나타나고 활용되는지에 관한 논문 또한 현재 이차곡선에 대한 연구의 주류 중 하나이다[김종록(2008), 안태길(2005), 홍

3) 두산백과사전 : 단어가 결합하여 형성되는 구(句)·절(節)·문장의 구조나 기능을 연구하는 문법

정민(2005), 오철(2004)].

그러나 이외에도 간과할 수 없는 것은 원뿔곡선의 3차원적 접근과 2차원적 접근의 의미 있는 연결이다. 원뿔곡선을 좌표를 도입하여 이차식으로 나타냄으로써 원뿔곡선을 통일적으로 다루게 되었으나 대부분의 수학자들은 수세기동안 3차원적 접근과 2차원적 접근을 의미 있게 연결하지 못하였다. 이것은 현재 이차곡선의 교수·학습과정에서도 나타나고 있다. 이차곡선의 도입단계에서 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선이 소개되고 이어 초점과 준선에 의한 이차곡선의 기하학적 작도로부터 두 변수의 이차방정식이 유도되고 이 후에는 주어진 이차방정식으로부터 초점과 준선, 접선을 찾는 기계적 활동만이 주를 이루고 있다. 그러나 조금 관심을 가지고 들여다보면 원뿔의 단면으로서의 3차원 곡선과 평면 위에 초점과 준선을 이용해 작도된 곡선 사이의 논리적 비약을 알 수 있다. 이러한 논리적 비약을 메우기 위한 방안으로 다음과 같은 것들을 제언하고자 한다.

### 1. 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선의 평면 곡선으로의 전환 과정 이해

우리는 이차곡선의 역사적 발달과정에서 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선의 평면 곡선으로의 전환 방법에 대한 아이디어를 얻을 수 있으며 이를 이차곡선의 교수·학습에 활용할 수 있다. 그 방법은 다음과 같다.

첫째, 메나에크무스와 아폴로니우스가 원뿔의 단면의 기하학적 특성을 파악하여 현대적 의미의 포물선의 이차식 $y^2 = lx$를 이끌어 낸 방법의 활용이다. 이는 초점과 준선에 관계없는 원뿔의 기하학적 성질의 표현이다. 이 표현의 유도는 고등학교 학생들의 학습 수준 내에서 이해하고 해결할 수 있는 것으로 3차원 곡선의 이차원적 표현이라 할 수 있으며 이차곡선의 의미를 잘 이해하는데 도움을 줄 것이다.

둘째, 원뿔의 단면으로서의 원뿔 곡선에서 초점과 준선을 찾고 이 초점과 준선을 이용하여 평면 곡선을 작도하는 방법의 제시이다. 1822년 Dandelin이 Dandelin의 구를 발견하고 3차원에서 초점과 원뿔곡선의 관계에 관한 연구 결과를 얻음으로써 원뿔곡선에 대한 3차원적 접근과 2차원적 접근이 자연스럽게 연결되었다. 그 후 Boyer에 의해 원뿔곡선이 초점과 준선에 의해 완전히 결정된다는 사실이 밝혀졌다. 이러한 역사적 사실에 기초하여 Dandelin의 구를 소개하고, 원뿔의 단면과 이 구들이 만나는 접점이 초점이며 원뿔을 자르는 평면과 Dandelin의 구의 한 단면의 교선이 준선임을 아는 것, 그리고 이 때 원뿔곡선 위의 점들은 이러한 초점, 준선과 특정한 기하학적 관계를 맺고 있다는 사실을 아는 것은 원뿔곡선에 대한 수학적 지식을 더욱 심오하고 풍부하게 할 것이다. 교사의 이러한 교수학적 내용지식은 단순히 원뿔곡선을 언급만하고 원뿔곡선과 이차곡선이 모양이 같다는 것 외에 어떤 관련성도 보여주지 못하며 초점과 준선에 의해 결정된 이차곡선의 완성된 지식에만 관심을 두고 있는 현행 교과서의 이차곡선 단원에 대한 문제점을 인식하고 이를 보완하기 위한 한 방안을 마련하는 계기가 될 것이다.

### 2. 이차곡선들 간의 관련성 인식

데카르트와 월리스에 의해 원뿔곡선은 대수적 표현을 갖게 되면서 원뿔곡선을 다루고 조작하는 것이 한층 쉬워졌다. 그러나 학교수학에서는 이차곡선들이 초점과 준선에 의해 정의되고 이차식으로 표현되면서 이차곡선들 간의 연결성은 거의 언급되어 있지 않다. 각각 다른 정의를 가지고 단편적으로 다루고 있는 것이 현실이다. 역사적으로 각각의 곡선들을 통합하려는 많은 시도가 이루어졌으며 파푸스는 현대적 개념의 이심률을 이용하여 이차곡선들을 하나의 식으로 통합하였다. 또, 케플러의 초점 이동을 이용한 이차곡선들의 연속적인 변화는 원뿔곡선들 간의 깊은 관련성을 보여주고 있다. 이러한 결과를 이차곡선의 교수·학습에서 활용함으로써 이차곡선들 간의 관련성을 인식할 수 있게 될 것이다.

### 3. 이차곡선의 기하학적 특성이해를 위한 다양한 기하학적 작도방법의 활용

역사적으로 볼 때 이차곡선에 관한 연구는 주어진 대수 방정식을 가지고 그래프를 그리는 과정보다는 기하학적 도형으로서의 곡선을 작도하고 이를 대수적 방정식으로 표현하는 과정으로 발달해 왔다. 그러나 현재 이차곡선의 학습활동은 곡선의 기하학적 작도보다는 대수방정식에 의한 이차곡선의 개형을 그려보는 활동에 한정되어 있다. 그러나 이차곡선의 기하작도를 강조한다 할지라도 단순히 이차곡선을 그려내는 방법에만 초점을 맞추고 그 작도 결과로 나타난 도형이 타원, 포물선, 쌍곡선 모양이 된다는 사실만을 강조하는 경우가 대부분이다. 그러나 이차곡선의 도입 부분에서 기하 작도 방법은 이차곡선들 간의 연결성을 보여주는 작도방법을 택하는 것이 좋으며 이 작도를 통하여 이차곡선의 본질적인 성질들을 들여다보고 찾아낼 수 있도록 안내해야 한다는 사실을 간과해서는 안 된다.

## Ⅳ. 결 론

현행 교과서에서 원뿔곡선은 이차곡선이라는 단원명으로 데카르트 이후 좌표평면 도입에 따른 이차곡선의 방정식만을 단편적으로 다루고 있음을 알 수 있다. 18세기에 심슨(Simpson)이 대수적 접근 방법에 대해 비판을 가한 적이 있었고 19세기에는 유클리드 기하를 선호하는 사람들로부터 비슷한 비판이 있었다. 마찬가지로 이차곡선의 대수적 표현의 강조는 기하적 특성의 탐구를 소홀히 하게 만들 수 있다. 특히 교과서에서는 학생들의 수준을 맞추기 위해 내용의 약화 및 축소로 이차곡선의 기하학적인 의미를 크게 다루지 않고 있는 게 사실이며 이로 인하여 이차곡선이 갖는 풍부한 의미를 간과하고 더 나아가 이차곡선에 대한 오개념을 가지게 만들 수 있다. 이차곡선의 역사 발달과정의 이해와 함께 이루어지는 이차곡선의 학습은 닫힌 지식으로서의 수학적 개념을 생동감 있고 의미가

풍부한 지식으로 되살아나게 하리라 생각한다. 따라서 이차 곡선의 역사적 발달과정의 분석을 기초로 원뿔곡선과 이차곡선이라는 용어에서 드러나는 의미를 분리하지 않고 연결시켜 이차곡선의 의미를 풍부하게 되살려내는 것을 이차곡선의 교수·학습방안으로 하여 다음과 같이 제안한다.

첫째, 원뿔의 단면으로서의 원뿔곡선의 평면 곡선으로의 전환 과정을 이해함으로써 원뿔곡선에서 이차곡선으로의 논리적 비약을 메우게 한다.

둘째, 이차곡선의 통합적 표현을 이해함으로써 이차곡선이 서로 무관한 것이 아니라 공통된 특성에 의하여 밀접하게 연결되어 있음을 인식하게 한다.

셋째, 이차곡선의 기하학적 특성을 이해하는데 다양한 기하학적 작도방법을 활용하되 단순히 곡선의 모양만을 확인하는 것이 아닌 작도과정을 통해 이차곡선의 기하학적 성질을 발견하고 이해할 수 있게 한다.

## 참고문헌


김부윤 외 (1996). 수학교육과정론, 보성각

김용운·김용국 (1988). 수학사 대전, 서울: 우성문화사

김종록 (2008). 이심률을 활용한 이차곡선 프로그램 학습 연구, 경북대학교 교육대학원 석사학위 논문

남호영 외 2인 (2001). 원뿔에서 태어난 이차곡선, 수학사랑

박기영·강순자 (2004). GSP를 이용한 이차곡선의 여러 가지 작도법 및 지도방안, 제6회 수학 페스티벌, 수학사랑

안상희 (2006). 이차곡선의 효율적인 학습지도, 경성대학교 교육대학원 석사학위논문

안태길 (2005). 구성주의 활동에 의한 이차곡선 지도에 관한 연구, 신라대학교 교육대학원 석사학위논문

이종희 (2002). 원뿔곡선 이론의 발달, Historia Hathematica **15(1)**, 69-82.

오철 (2004). 문제해결력 신장을 위한 원뿔곡선 연구 - 고등학교 교과상의 이차곡선을 중심으로, 제주대학교 교육대학원 석사학위논문

우정호 외 (2003). 고등학교 수학Ⅱ, (주)대한교과서

조윤동 (1998). The Geometry's Sketchpad(GSP)를 이용한 이차함수의 그래프와 이차곡선의 지도, 서강대학교 석사학위논문

정성두 (2000). GSP를 활용한 고등학교 이차곡선의 지도에 관한 연구, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문

최용준 외 (2003). 고등학교 수학Ⅱ, (주)대한교과서

홍성관·박철호 (2006). 고등학교 이차곡선에 대한 교과서 분석과 그 대안, 수학교육논총 **29**,

341-362.

홍성관 · 박철호 (2007). 이차곡선 학습에서 고등학생들의 오개념 분석, 학교수학 **9(1)**, 119-139. 대한수학교육학회

홍정민 (2005). 역사적 소재를 활용한 타원의 교수 · 학습 자료에 관한 연구, 건국대학교 교육대학원 석사학위논문

황우형 · 차순규 (2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(3)**, 341-360.

Carl B. Boyer, UTA C.Merzbach, 양영오 · 조윤동 옮김 (2000). 수학의 역사(상), 서울: 경문사.

Carl B. Boyer, UTA C.Merzbach, 양영오 · 조윤동 옮김 (2000). 수학의 역사(하), 서울: 경문사.

Dennis, D. (1995). *Historical Perspectives for the Reform of Mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and Their Roll in the Transition to an Algebraic Description of Functions*, Ph.D. Dissertation, Cornell University.

Eves, H., 이우영 · 신항균 옮김 (1995). 수학사, 서울: 경문사

Eves, H., 허민 외 옮김 (1994). 수학의 위대한 순간들, 서울: 경문사

Richard Courant, Herbert Robbins, 박평우 외 2인(2003). 수학이란 무엇인가?, 서울: 경문사

# How To Teach The Quadratic Curves Through Historical Overview

**Jang, Mi Ra**
Jeonnam Middle School, Chipyung-dong 58, Seogu, Gwangju City 502-703, Korea
E-mail : lakatos@lycos.co.kr

**Kang, Soon Ja**
Department of Mathematics Education Chonnam National University 300 Yong-Bong Dong, Gwang-Ju City 500-757, Korea
E-mail : kangsj@chonnam.ac.kr

Nowadays in school mathematics, the skill and method for solving problems are often emphasized in preference to the theoretical principles of mathematics. Students pay attention to how to make an equation mechanically before even understanding the meaning of the given problem. Furthermore they do not get to really know about the principle or theorem that were used to solve the problem, or the meaning of the answer that they have obtained.

In contemporary textbooks the conic section such as circle, ellipse, parabola and hyperbola are introduced as the cross section of a cone. But they do not mention how conic section are connected with the quadratic equation or how these curves are related mutually. Students learn the quadratic equations of the conic sections introduced geometrically and are used to manipulating it algebraically through finding a focal point, vertex, and directrix of the cross section of a cone. But they are not familiar with relating these equations with the cross section of a cone.

In this paper, we try to understand the quadratic curves better through the analysis of the discussion made in the process of the discovery and eventual development of the conic section and then seek for way to improve the teaching and learning methods of quadratic curves.

* ZDM Classification : D14
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : quadratic curves, conic section, ellipse, parabola, hyperbola