韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 3호, 2010. 9. 691-708

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 3, Sep. 2010. 691-708

유클리드의 자료론(The Data)에 기초한 중학교 기하영역의 '자료(datum)' 분석 연구

서 보 억 (대구가톨릭대학교)

본 연구는 유클리드의 자료론(The Data)에 제시된 명제 94개의 가장 핵심적인 구성 원리에 기초하여 중학교 기하영역에서 '자료론'의 '자료(datum)'에 부합된 문제를 중학교 교과서를 중심으로 분석하고 이를 기초로 하여 자료(datum) 개발을 목적으로 한다. 이러한 연구 목적을 위해 다음과 같은 연구를 진행한다. 첫째, 자료론의 명제들은 '자료(datum)'라고 불리는 독특한 구조를 형성하고 있다. 이러한 구조에 대해 구체적으로 고찰한다. 둘째, 현재 중학교 교과서에서 다루어지는 기하 내용영역에서 자료로 분류할 수 있는 학습 자료를 분석하고 탐색한다. 셋째, 중학교 기하교육에 적용 가능한 전형적인 자료(datum)의 형태를 가지는 자료 개발하고 탐구한다. 이러한 연구 결과를 통해 학교현장에서 수학교육이 더 풍성해 질 것과 수학교육과정의 개정 및 교수-학습 개선에 의미 있는 시사점을 제공하리라 기대된다.

I. 서 론

고대 그리스의 수학자 Euclid는 원론(The Elements)이라는 명작을 우리에게 남겼다. 지금까지도 원론의 내용이 중등학교 수학교육 내용의 상당한 부분을 차지할 만큼 그 중요성은 재론의 여지가 없다. 하지만 Euclid의 저작은 원론만 있는 것이 아니다. 그는 원론과 더불어 여러 저작을 남겼는데 그 중의 하나가 자료론(The Data)이다. Boyer 등(1991)에 의하면 자료론은 '원론의 처음 여섯 권의 자매편으로 교과서를 보충하는 편람과 같은 것'으로 기하학 문제를 분석하고 문제해결을 위한 증명을 발견하기 위한 안내서 역할을 한다고 밝혔다. 또한 Eves(1990)는 자료(datum)는 작도나 증명 해결을 위한 해석에서 매우 유용하며 자료론은 이러한 문제해결의 목적으로 저술되었다고 언급하였다.

수학교육의 중요한 현안은 학습자가 훌륭한 문제해결자가 되는 것이다. 제4차 교육과정 이후 학교 수학교육의 한 축은 문제해결력 신장에 초점을 맞추고 있다. 실제로 제4차 교육과정에서는 처음으로 문제해결력을 언급하였고, 제5차 및 제6차 교육과정에서는 문제해결력 개발과 문제해결력의 신장을 강조하는 수학교육을 기본방향으로 설정하였다. 제7차 교육과정에서는 21세기 정보화 사회에 효과적으로 대처하기 위한 수학적 힘(Mathematical Power)을 강조하고 있는데 수학적 힘의 핵심에는 수학

* 접수일(2010년 7월 30일), 심사(수정)일(2010년 8월 14일), 게재확정일자(2010년 9월 13일)
* ZDM 분류 : D13
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 자료, 자료론, 기하교육, 교수-학습자료

적 지식을 사용하여 문제를 구성하고 해결하는 문제해결력에 있음을 표명하고 있다(교육부, 1999). 2007개정 교육과정의 경우 7차 교육과정의 기본방향을 그대로 유지하면서 개정되었으므로 여전히 학교수학에서 문제해결력은 가장 중요한 목표 중의 하나라고 볼 수 있다(교육인적자원부, 2007).

수학교육의 중요한 목표인 문제해결력의 신장을 위해서는 수학 문제에 대한 다각적인 이해가 필수적이다. 이러한 수학문제에 대한 연구를 분석하면 크게 세 가지 측면에서 접근하고 있다. 첫째, 수학문제에 대한 해결과정에 대한 분석 연구가 진행되었고(조두경・박만구, 2008), 둘째, 수학 문제해결의 전략과 방법에 대한 연구가 있었으며(염상섭, 2009), 셋째, 수학 문제의 구조에 대한 체계적인 분석 연구 등이 진행되었다(한인기, 2001; 2009).

특별히 수학문제의 구조에 대한 연구에서는 문제의 구조를 외적 구조와 내적 구조로 구분하여 제시하였는데, 본 연구에서 연구의 기초로 삼은 자료론은 외적 구조 측면에서 매우 특별한 의미를 지니고 있다. 따라서 본 연구에서는 첫째, 문제의 외적인 구조 측면에서 Euclid의 자료론이 가지는 수학적인 의미의 이해 및 자료(datum)의 개념을 고찰하고, 둘째, 중학교 기하영역에서 자료(datum)의 형식을 지니는 내용이 무엇인지 살펴보고, 기하내용이 자료(datum)로 구성되어질 때 나타나는 일반적인 형식 체계를 설정하며, 셋째, 앞의 분석결과를 구체화화한 자료(datum)에 기초한 사례를 원과 삼각형의 내용을 기초로 하여 제시하는 것을 연구의 목적으로 설정하였다. 이러한 연구를 통해 얻은 중학교 기하영역에 대한 분석 결과는 기하 학습에 대한 새로운 방향성을 탐색하고, 개발된 자료(datum)는 현장 수학수업을 위한 교수-학습자료 개발에 긍정적인 시사점을 제공할 것으로 기대된다.

II. '자료론'에서 '자료(datum)'의 구조

1. Euclid의 자료론

Heath(1981)는 자료론에 대해 '평면기하학 내용을 다루고 있고, 유클리드 원론 I권에서 VI권까지의 내용과 깊은 관련이 있다'라고 밝혔고, 또한 Pappus가 제시한 분석의 보물(Treasury of Analysis)에 포함되기에 충분할 만큼 중요한 책이라고 하였다. 실제로 Pappus가 제시한 분석의 보물이라는 책 목록 중에 첫 번째 언급된 책이 바로 자료론이다.

최근에 출판된 자료론에 대한 문헌은 크게 두 가지가 있다(서보억 외, 2008). 그 중 한 권은 영어 번역본이고, 다른 하나는 영어로 된 자료론에 대한 해설서이다. Taisbak(2003)의 번역서를 보면, 자료론은 Euclid의 원론과 유사하게 맨 앞 부분에는 정의 15개가 제시되어져 있고, 이러한 정의는 <표 1>과 같이 세분화할 수 있다. 정의는 크기, 비, 다각형, 위치가 주어진 것, 원, 주어진 것보다 더 큰(작은) 것, 직선과 방향에 대한 것이 있다. 정의를 제시한 다음에는 총 94개의 명제가 순차적으로 제시되어져 있는데, 크기와 비에 대한 내용, 위치・거리・방향・평행에 대한 내용, 다각형에 대한 내용, 원추곡선에 대한 내용으로 구성되어 있다. 자료론의 핵심은 바로 94개의 명제이고, 서보억 등(2008)

이 제시한 내용을 바탕으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, '크기와 비'와 관련된 명제 중 '명제1'~'명제9'에서는 대부분 주어진 비의 합 즉, 현대적 의미로 대수적인 덧셈과 관련이 있고, '명제10'~'명제24'에서는 주어진 비의 변형에 대해 다루고 있다.

둘째, '위치, 거리, 방향, 평행'과 관련된 '명제25'~'명제38'에서는 주어진 직선의 위치나 점의 위치 및 두 평행선 사이의 길이의 비나 각의 크기 등에 대한 내용을 제시하고 있다.

셋째, '명제39'~'명제85'까지는 다각형 특히, 삼각형의 닮음, 삼각형의 넓이, 다각형의 넓이, 다각형의 각의 크기를 주요 내용으로 다루고 있다.

넷째, '명제86'~'명제94'에서는 원추곡선과 관련된 내용을 다루고 있다.

<표 1> 자료론의 내용 구성

구분	분류	내 용	구분	분류	내 용
정의	1~4	크기, 비, 다각형, 위치가 주어진 것	명제	1~24	크기와 비
	5~8	원		25~38	위치, 거리, 방향, 평행
	9~12	주어진 것보다 더 큰(작은) 것		39~85	다각형
	13~15	직선과 방향		86~94	원추곡선

2. 자료(datum)의 개념과 수학적 의미

자료론에 있는 자료(datum)의 수학적 의미와 구조는 94개의 명제를 통해 이해할 수 있다. 94개의 명제들은 동일한 구조와 형태를 지니고 있다. 즉, 명제는 '만약에 ~ 이라면(가정), ~ 이 된다(결론)'의 구조를 취하고 있고, 가정을 충족시키면 결과를 얻을 수 있다는 구조이다. 여기서 주목할 것은 가정에 들어갈 수학적 대상의 개수이다. 자료론에서는 항상 2개[가끔 3개]의 수학적 대상(대상 A, B라 하자)이 가정에 들어 있고, 결론에는 항상 1개의 수학적 대상(대상 C라 하자)이 있다. 따라서 가정에 제시된 2개[혹은 3개]의 조건만으로, 결론에 있는 1개의 결론을 유도할 수 있다는 의미이다. 이처럼 자료론의 대다수의 명제는 이러한 구조로 구성되어져 있고, 이러한 명제의 형식 체계를 구성하는 수학적 대상 A, B, C의 집합을 '자료(datum)'라 한다. 자료(datum)가 되기 위해서는 세 개의 수학적 대상 중 임의의 어떤 두 개만 알고 있더라도, 이로부터 나머지 하나를 항상 구할 수 있어야 함을 의미한다. 이것이 유클리드의 자료론에서 자료(datum)가 가지는 가장 중요한 구조적인 특징이다. 예를 들면, 다음에 제시될 '명제86'에서는 평행사변형의 넓이(대상A), 각각의 변이 만드는 두 정사각형의 넓이의 비(대상B), 평행사변형의 두 변의 길이(대상C)가 자료(datum)이다. 이 세 개의 수학적 대상 중 임의의 두 개의 대상만 알고 있으면, 나머지 하나는 항상 구할 수 있다는 의미에서 자료(datum)라고 부른다. 따라서 자료론에 제시된 명제는 모두 세 개(혹은 네 개)의 서로 다른 수학적인 대상이 주어지고, 이 세 개(혹은 네 개)중에 임의의 두 개의 수학적 대상(혹은 세 대상)만 알면 나머지는 한 수학적 대상은 반드시 구할 수 있다는 점에서 중요한 의미를 가진다.

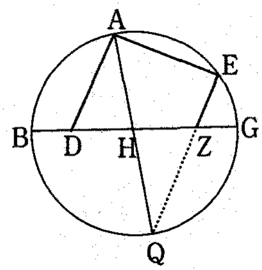
[명제86][1] 한 각의 크기가 주어진, 평행사변형의 넓이를 알고 있고, 평행사변형의 각각의 변을 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 비를 알고 있으면, 평행사변형의 두 변의 길이를 구할 수 있다.■

3. 자료론에 제시된 한 가지 명제를 통한 자료(datum)의 이해

자료론의 마지막 명제인 '명제94'를 통해 자료론에 제시된 자료(datum)에 대해 명제의 내용, 명제의 의미, 명제의 증명 순서로 고찰한다.

[명제94]의 내용

원의 지름 위에 한 점 D가 있고, 이 점에서 원에 그은 직선이 원과 만나는 점 A에서 수직으로 새로운 직선을 그어 원과의 교점 E를 찾고, 이 교점에서 처음 주어진 점에서 그은 직선에 평행인 직선을 그어 원과의 교점을 Q라 하면, 점 Z의 위치를 구할 수 있고, 선분 AD, 선분 EZ를 두 변으로 하는 직사각형의 넓이도 구할 수 있다.



<그림 1>

[명제94]의 의미

'명제94' 의 의미를 살펴보자. 지름이 BG인 원이 있고, 이 지름 위에 임의의 한 점 D가 결정되어 있으면, 이 점 D로부터 임의의 직선 AD를 결정할 수 있다. 이때, 각 DAE가 수직이도록 직선을 결정할 수 있고, 이 직선이 원과의 교점을 E라 하면, 점 E에서 직선 AD에 평행인 직선도 결정할 수 있다. 그러면, 점 E를 지나고 직선 AD에 평행인 직선이 지름 BG와의 교점 Z를 구할 수 있고, 선분 AD와 선분 EZ에 의해 만들어지는 직사각형의 넓이도 구할 수 있다.

[명제94]의 증명

주어진 지름 위의 점 D에서 임의의 직선 AD를 긋고, 점 A에서 수직인 직선을 내려 원과의 교점을 E라고 하면 점 E도 작도가능한 점이 된다. 점 E에서 직선 AD에 평행인 선분을 작도할 수 있으므로, 지름과의 교점 Z, 원과의 교점을 Q도 작도가능한 점이다. 선분 AQ를 그으면 AQ는 원의 지름이고 지름과의 교점 H는 원의 중심이 된다. 따라서 점 H와 선분 DH도 작도가능한 선분이 된다. 선분 AD는 선분 EQ와 평행이고, 선분 QH는 선분 HA와 같으므로 선분 DH는 선분 HZ와 같고 선분 AD는 선분 ZQ도 같아진다. 따라서 선분 DH도 작도가능한 선분이고, 선분 ZH도 작도가능한 선분이다. 선분 HZ, 선분 HD 모두 작도가능하다. 명제92에 의해서 선분 EZ와 선분 ZQ에 의한 직사각형을 작도할 수 있고, 선분 QZ와 선분 DA는 같기 때문에 선분 AD와 선분 EZ에 의한 직사각형도 작도가능한 것이다. 따라서 작도가능한 직사각형의 넓이는 구할 수 있다.■

1) 현대적 의미로 변환하는 과정에서 의미가 다소 변형됨. Taisbak(2003) 213쪽 참고.

III. 기하영역에서 자료(datum)에 대한 분석

Euclid의 자료론에 대한 기본적인 이해를 바탕으로 자료론에 제시된 명제들의 공통적인 속성인 자료(datum)가 지니는 의미를 살펴보았다. 자료(datum)라는 것은 문제의 외적인 구조의 한 유형이기 때문에 모든 수학적 개념이나 문제 상황에서 나타나는 특성이 아니며, 특정한 수학적 개념이나 문제에서만 나타나는 외적 구조의 속성이다. 따라서 본 절에서는 자료(datum)과 같은 외적인 구조를 가지는 수학적 내용에는 어떤 것이 있는지 중학교 기하내용을 중심으로 고찰하고 이를 통해 자료(datum)에 대한 수학교육적 의미를 분석하고자 한다.

분석의 효율성을 높이기 위해 자료(datum)에 대한 분류가 필요하다. 대상 A, 대상 B, 대상 C가 자료(datum)를 이루고 있다면, 세 대상이 자료를 이룬다는 의미에서 D(A, B, C)라고 쓰기로 하자. 또한, D(A, B, C)가 구체적인 문제로 제시될 때에는 3가지 서로 다른 유형이 있다. 첫째, 대상 A, 대상 B가 주어졌을 때 대상 C를 구하는 유형이다. 둘째, 대상 A, 대상 C가 주어졌을 때 대상 B를 구하는 유형이다. 셋째, 대상 C, 대상 B가 주어졌을 때 대상 A를 구하는 유형이다(<그림2>참조).

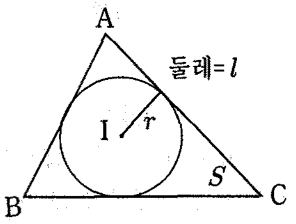
주어진 것	구할 것	주어진 것	구할 것	주어진 것	구할 것
대상 A 대상 B	→ 대상 C	대상 A 대상 C	→ 대상 B	대상 C 대상 B	→ 대상 A
유형1 : FD		유형2 : DD		유형3 : RD	

<그림 2> 자료(datum)의 분류

첫째 유형은 특정 자료(datum)상황에서 학생들에게 가장 친숙하고, 보편적인 문제 상황일 때로 가정한다. 따라서 이 유형은 대상 A, 대상 B, 대상 C가 자료(datum)를 이룰 때의 정형자료(FD, formal datum)로 명명하기로 하고, FD(AB, C)로 나타낸다. 둘째 유형은 특정 자료(datum)상황에서 학생들에게 다소 익숙하지 않지만, 어느 정도는 보편적인 문제 상황일 때로 가정한다. 따라서 이 유형은 대상 A, 대상 B, 대상 C가 자료(datum)를 이룰 때의 순행자료(DD, direct datum)로 명명하기로 하고, DD(AC, B)로 나타낸다. 셋째 유형은 특정 자료(datum)상황에서 학생들에게 가장 익숙하지 않고, 다소 생소한 문제 상황일 때로 가정한다. 따라서 이 유형은 대상 A, 대상 B, 대상 C가 자료(datum)를 이룰 때의 역행자료(RD, reverse datum)로 명명하기로 하고, RD(CB, A)로 나타낸다. 다음 문제를 통해 이에 대해 구체적으로 이해하도록 하자.

[문제1] 삼각형 ABC의 둘레가 40이고, 넓이가 60일 때, 이 삼각형에 내접하는 내접원의 반지름의 길이를 구하시오.

[자료1(datum1)] '문제1'에서 자료에 해당하는 것은 삼각형의 둘레 l, 삼각형의 넓이 S, 내접원의 반지름 r이다. 왜냐하면, 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라 하면 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$ 이다. 따라서, $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$를 얻을 수 있고, $S=\frac{1}{2}rl$ 이다. 이는 S와 l, r이 서로 자료(datum)임을 보여 준다. 즉, $\mathrm{D}_1(l,S,r)$을 얻을 수 있다.



<그림 3>

앞에서 제시한 [문제1]에 대한 자료에서 가장 보편적인 문제 유형은 둘레와 반지름을 제시하고 넓이를 구하는 문제이고, 그 다음은 둘레와 넓이를 통해 내접원의 반지름을 구하는 문제이며, 가장 익숙하지 않은 형태는 반지름과 넓이를 주고 둘레를 구하는 문제이다. 즉, $\mathrm{FD}_1(lr,\ S)$, $\mathrm{DD}_1(lS,\ r)$, $\mathrm{RD}_1(Sr,\ l)$이 된다.

1. 중학교 전체 내용 영역에서의 자료(datum)

유클리드의 원론을 기하학에 대한 수학 책으로 오해하는 것과 같이 자료론도 기하 내용만 담고 있다고 생각하는 것은 오해다. 단지 접근 방식이 기하학적인 방법으로 취하고 있다는 것이지 내용이 기하인 것은 아니다. 실제로 중학교 교과서에서 자료(datum)는 광범위하게 분포하고 있는 것으로 나타났다. 7차 교육과정 및 2007 개정교육과정 교과서(황석근 외, 2007; 유희찬 외, 2010)에 제시된 개념을 고찰하고, 문제를 풀어 본 결과, 자료(datum)와 동일한 구조를 가진 수학 문제 혹은 내용의 수는 <표 2>와 같다. 자료(datum)에 해당하는 학습 내용은 중학교 전체 내용 영역에 걸쳐 분포하고 있으며 특히 기하영역에서 가장 많은 수의 자료(datum)가 존재한다.

<표 2> 중학교 교과서 내에서 자료(datum)와 동일한 구조를 가진 수학 내용의 개수

영역	수와 연산	문자와 식	기하	함수	확률과 통계	합계
자료(datum)	4	4	22	2	6	38

하지만 단순히 자료(datum)의 형태를 지니는 수학적인 내용의 개수만으로 어느 정도의 수학적인 내용이 학교 수학에서 다루어지는지 짐작할 수 없다. 자료(datum) 형태를 지니는 수학내용의 분량을 대략이나마 가늠하기 위해 중학생을 대상으로 하는 국가 단위의 시험을 분석해 보았다. 한국교육과정평가원 주관으로 해마다 중학교 3학년을 대상으로 중학교 1학년부터 중학교 3학년 1학기 내용을 시험범위로 하여 시험 문항이 출제되고 있다. 출제된 문항 중에서 자료(datum)와 동일한 구조를 가지는 문항들을 분석해 보았다. 분석 대상 문항은 한국교육과정평가원에서 결과보고서(한국교육과정평가원, 2004;2005;2006;2007;2008;2009)를 발간한 2003학년도부터 2008학년도까지의 시험 문항이다.[1] 그

결과는 다음 <표 3>과 같다.

<표 3> 국가수준학업성취도 평가 문항에서 자료(datum) 구조를 가지는 문항의 수

학년도	문항수	내용영역별 자료(datum) 구조의 문항 수					
		소계	수와 연산	문자와 식	기하	함수	확률과 통계
2003	30 (100%)	8 (26.7%)	1	1	3	2	1
2004	30 (100%)	4 (13.3%)	·	·	2	·	2
2005	30 (100%)	3 (10.0%)	·	1	1	·	1
2006	30 (100%)	7 (23.3%)	·	2	3	·	2
2007	30 (100%)	3 (10.0%)	1	·	2	·	·
2008	30 (100%)	7 (23.3%)	·	3	2	1	1
총계	180 (100%)	32 (17.8%)	2	7	13	3	7

지난 6년간의 출제 문항의 수로 볼 때, 전체 내용영역에서 자료(datum)의 구조를 가지는 문항이 있었으며 특히 기하영역에서는 매년 다양한 유형의 문항들이 출제되고 있었다. 전체적으로는 17.8% 정도의 문항이 자료(datum) 형태의 문항이었다.

2. 기하영역에서의 자료(datum)

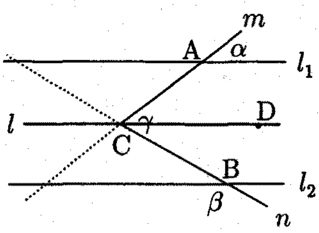
여기에서는 중학교 기하내용영역에서 자료(datum)를 이루는 학습 내용에 대해 살펴보기로 한다. 중학교 교과서에 나오는 어떤 내용이 자료(datum)를 이루는지 네 가지 형식(type)으로 나누어 각각의 사례를 제시하고, 제시된 수학 내용이 왜 자료가 되는지 고찰한다. 또한, 네 가지 범주로 제시된 자료(datum)에 대한 분류가 어떻게 구성되고, 어떠한 구조를 가지는지 구체적으로 분석한다.

[자료2] 임의의 두 평행선 l_1, l_2가 있고, 두 평행선을 지나는 두 직선 m, n 이 있을 때, 직선 m과 직선 l_1이 이루는 각을 α, 직선 n과 직선 l_2가 이루는 각을 β, 직선 m과 직선 n이 이루는 각을 γ라 하면 $\mathrm{D}_2(\alpha,\beta,\gamma)$ 이다.[2]

---

1) 국가수준학업성취도평가 문항은 선다형과 서답형이 있는데, 서답형은 여러 개의 하위문항이 있기 때문에 선다형만 분석함.
2) 두 직선이 이루는 각은 2개가 존재하지만 어떤 각을 선택하더라도 같은 결과를 나타냄.

(증명) 두 직선 m, n의 교점 C를 지나고 직선 l_1에 평행인 직선을 l이라고 하자. 각 ACD의 크기는 α, 각 BCD의 크기는 $180-\beta$ 이다. 따라서 $\gamma=\alpha+180-\beta$ 이므로 $\beta+\gamma-\alpha=180$을 얻을 수 있다. 따라서 $D_2(\alpha,\beta,\gamma)$이다.■



<그림 4>

(분류) 이 자료의 경우 어떤 두 가지 대상을 주어진 것으로 하더라도 매우 익숙한 형태의 유형이기는 하지만 교과서의 전개순서를 고려하여 다음과 같이 분류할 수 있다. $FD_2(\alpha\beta,\gamma)$, $DD_2(\alpha\gamma,\beta)$, $RD_2(\beta\gamma,\alpha)$이다. 이때 대상 α와 대상 β의 순서적인 구분은 의미가 없기 때문에 $DD_2(\alpha\gamma,\beta)$와 $RD_2(\beta\gamma,\alpha)$는 본질적으로 동일하다. 즉, 주어진 두 대상 사이에 대칭적인 구조를 가지고 있다는 것을 의미한다. 또한, $FD_2(\alpha\beta,\gamma)$의 풀이 과정과 $DD_2(\alpha\gamma,\beta)$의 풀이 과정이 동일한 절차를 가지므로 수평적인 관계를 가진다. 따라서 자료2에 의한 분류는 <그림 5>와 같이 도식화 할 수 있다. 아래 도식에서 $\rightleftarrows$는 대상의 선택에 따라 서로 변형 가능하다는 의미를 지닌다.

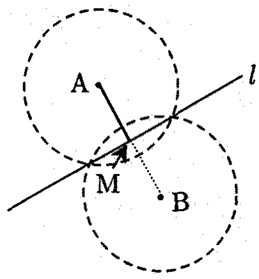
$$\boxed{FD_2(\alpha\beta,\gamma)} \rightleftarrows \boxed{\boxed{DD_2(\alpha\gamma,\beta)} \cong \boxed{RD_2(\beta\gamma,\alpha)}}$$

<그림 5> 형식1

[자료3] 평면 상에 주어진 임의의 한 점을 A, 또 다른 한 점을 B, 이 두 점 사이의 선분의 수직이등분선을 l이라 하면 $D_3(A,B,l)$ 이다.

(증명) 이 자료는 작도 가능성에 대한 내용이다. 두 점 A, B가 주어졌을 때 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 작도가능하다. 또한, 한 점 A(또는 B)와 수직이등분선 l이 주어지면, 한 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발 M을 작도할 수 있고, 선분 AM의 연장 위에 $\overline{AM}=\overline{BM}$인 점 B를 작도할 수 있다. 따라서 $D_3(A,B,l)$이다.■

(분류) 이 자료의 경우 두 점 A, B가 주어진 경우는 매우 정형적인 형태를 띠고 있지만, 한 점과 수직이등분선이 주어지고 다른 한 점을 구하는 경우는 익숙한 형태의 유형은 아니다. 따라서 자료3에 대한 분류는 $FD_3(AB,l)$, $DD_3(Al,B)$, $RD_3(Bl,A)$이다. 이때 대상 A와 대상 B는 [자료2]에서와 같이 대칭적인 구조를 지니고 있기 때문에 구분은 의미가 없고, $DD_3(Al,B)$와 $RD_3(Bl,A)$는 본질적으로 동일하다. 또한, $FD_3(AB,l)$의 작도 과정과 $DD_3(Al,B)$의 작도 과정을 살펴보면, $FD_3(AB,l)$의 작도는 두 점에서 동일한 반지름을 가지는 원의 교점에 의해 결정되기 때문에 단순하지만, $DD_3(Al,B)$의 작도는 수선의 발 M의 작도와 연장선 위에



<그림 6>

선분 AM과 합동인 선분 BM의 작도 등과 같은 한 단계 높은 수학적인 사고활동을 필요로 한다. 즉, $\mathrm{FD}_3(\mathrm{AB},l)$의 작도 과정과 $\mathrm{DD}_3(\mathrm{A}l,\mathrm{B})$의 작도 과정 사이에는 수직적인 관계를 가진다. 따라서 자료3에 의한 분류는 <그림 7>과 같이 도식화할 수 있다.

$$\boxed{\boxed{\mathrm{DD}_3(\mathrm{A}l,\mathrm{B})} \cong \boxed{\mathrm{RD}_3(\mathrm{B}l,\mathrm{A})}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathrm{FD}_3(\mathrm{AB},l)}$$

<그림 7> 형식2

[자료4] 구와 연결 상태가 동일하고 면이 다각형으로 이루어진 입체도형에서 꼭짓점의 개수를 v, 모서리의 개수를 e, 면의 개수를 f라 하면 $\mathrm{D}_4(v,e,f)$ 이다.

(증명) 입체도형에 대한 오일러의 공식에 의해서 $v-e+f=2$인 관계가 성립한다. 따라서, $\mathrm{D}_4(v,e,f)$이다.■

(분류) 이 자료의 경우 구와 동일한 연결 상태를 가지는 입체도형에서 점과 모서리, 면의 개수에 대한 오일러 공식 $v-e+f=2$에 의해서 문제가 해결되어진다. 즉, 어떠한 두 대상이 주어지더라도 매우 정형적인 방법에 의해 문제가 해결되어진다. 따라서 자료4에 대한 분류는 $\mathrm{FD}_4(ve,f)$, $\mathrm{DD}_4(vf,e)$, $\mathrm{RD}_4(ef,v)$이 가능하지만, 대상 A, 대상 B, 대상 C의 순서적인 구분은 의미가 없기 때문에 $\mathrm{FD}_4(ve,f)$와 $\mathrm{DD}_4(vf,e)$, $\mathrm{RD}_4(vf,e)$는 본질적으로 동일하다. 또한, 이들 세 분류의 해결 과정도 동질적인 성격을 지니고 있다. 따라서, 자료4에 의한 분류는 <그림 8>과 같이 도식화할 수 있다. 사실 이러한 경우의 자료는 세 대상 사이의 관계에 대한 일반화된 공식이 보편적으로 알려져 있다는 것을 의미한다.

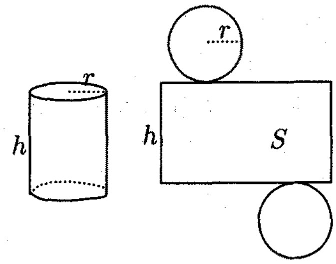
$$\boxed{\boxed{\mathrm{FD}_4(ve,f)} \cong \boxed{\mathrm{DD}_4(vf,e)} \cong \boxed{\mathrm{RD}_4(vf,e)}}$$

<그림 8> 형식3

[자료5] 원기둥의 겉넓이를 S, 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 원기둥의 높이를 h라 하면 $\mathrm{D}_5(r,h,S)$ 이다.

(증명) 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥의 겉넓이를 구하기 위해서는 <그림9>와 같은 전개도가 필요하다. 겉넓이는 두 원과 한 개의 직사각형의 넓이의 합과 같다. 한 원의 넓이는 πr^2, 직사각형의 넓이는 $2\pi rh$이므로, $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)$인 관계가 있다. 따라서, $\mathrm{D}_5(r,h,S)$이다.■

(분류) 이 자료의 경우 풀이 과정과 난이도를 고려하여 다음과 같이 분류할 수 있다. $FD_5(rh,S)$, $DD_5(rS,h)$, $RD_5(hS,r)$이다. 반지름과 높이가 주어졌을 때 겉넓이를 구하는 것은 가장 정형된 교과서형 문제이므로 $FD_5(rh,S)$이고, 겉넓이와 반지름이 주어지고 높이를 구하는 것은 정형화된 패턴은 아니지만 순차적으로 접근하면 일차방정식으로 쉽게 해결할 수 있으므로 $DD_5(rS,h)$이며, 겉넓이와 높이가 주어지고 반지름을 구하는 것은 정형화된 패턴과 비교할 때 가장 난이도가 높고 이차방정식을 풀어야 해결되므로 $RD_5(hS,r)$로 분류할 수 있다. 각각의 세 유형이 각각 독특한 절차가 있고, 그 과정의 난이도에도 차이가 있다. 따라서 자료5에 의한 분류는 <그림 10>과 같이 도식화할 수 있다.



<그림 9>

$$\boxed{RD_5(hS,r)}$$
$$\uparrow\downarrow$$
$$\boxed{DD_5(rS,h)}$$
$$\uparrow\downarrow$$
$$\boxed{FD_5(rh,S)}$$

<그림 10> 형식4

지금까지 3개의 대상을 가지는 자료(datum)에 대한 여러 가지 사례를 중학교 교과서 내용을 중심으로 살펴보았다. 자료(datum)는 주어진 것과 구할 것에 대한 서로 다른 배치에 따라 세 가지 분류가 가능하다. 이러한 분류에 의해 나타난 세 개의 유형들 사이의 관계성과 이들 유형들 사이의 난이도 특성에 따라 네 가지 서로 다른 형식이 있음을 제시하였다. 각각의 형식에 대한 자료의 예시는 [자료6]-(형식1), [자료7]-(형식2), [자료8]-(형식3), [자료9]-(형식4)와 같다.

[자료6] 삼각형 ABC가 주어져 있고, 외심 O가 있다. 각 BOA의 크기를 α, 각 COA의 크기를 β, 각 A의 크기를 γ라 하면, $D_6(\alpha,\beta,\gamma)$ 이다.

[자료7] 직각삼각형 ABC가 주어져 있고, 내심 I가 있다. 빗변이 아닌 한 변을 a, 다른 한 변을 b, 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면, $D_7(a,b,r)$ 이다.

[자료8] 원 O와 원 외부에 있는 한 점 P, 점 P에서 그은 한 접선과 한 할선이 주어져 있다. 접선의 길이를 t, 할선이 원과 만나는 두 점까지의 거리를 각각 a, b라 하면, $D_8(a,b,t)$ 이다.

[자료9] 원뿔의 전개도가 주어져 있다. 이 부채꼴의 중심각의 크기를 a, 모선의 길이를 b, 원기둥

의 부피를 c라 하면, $\mathrm{D}_9(a,b,c)$ 이다.

3. 분석결과에서의 시사점

중학교 전체 내용 영역에서 38개의 자료(datum)가 존재하고, 그 중 22개가 기하 영역에서의 자료(datum)임을 확인하였다. 세 개의 대상을 가지는 자료(datum)는 세 가지 유형으로 분류하였다. 이러한 세 유형은 동일한 형식이나 유사한 풀이 과정을 가지기도 하지만 대부분은 상당히 다른 풀이 과정과 난이도를 가진다. 이러한 차이에 따라 네 가지 형식(type)으로 자료(datum)를 세분화하였다.

앞에서 살펴본 이러한 분석 결과는 한 개의 자료(datum)이지만 서로 다른 유형을 가질 수 있기 때문에 각각의 유형에 대한 교수학적인 배려가 필요함을 시사해 주기에 충분하다. 실제로 국가수준 학업성취도평가 결과는 이러한 점을 더욱 분명하게 설명해 준다.

국가수준학업성취도 평가 2003학년도 중학교 3학년 30번 문항과 2005학년도 중학교 3학년 23번 문항은 평행선의 성질을 이용하는 동일한 자료(datum)이지만 유형이 다른 문항이다. 30번 문항의 경우 44.9%(우수 89%, 보통 55%, 기초29%, 미달 18%)의 정답률을 보였고, 23번 문항의 경우 54.2%(우수 89%, 보통 59%, 기초 35%, 미달 23%)의 정답률을 보였다(한국교육과정평가원, 2003; 2005). 또한, 2003학년도 중학교 3학년 25번 문항과 2004학년도 중학교 3학년 14번 문항은 부채꼴의 넓이 공식을 이용하는 동일한 자료(datum)이지만 유형이 다른 문항이다. 25번 문항의 경우 47.7%(우수 85%, 보통 67%, 기초 29%, 미달 12%)의 정답률을 보였고, 14번 문항의 경우 80.7%(우수 98%, 보통 90%, 기초 71%, 미달 43%)의 정답률을 보였다(한국교육과정평가원, 2003; 2004). 특히 이러한 정답률의 차이는 우수학력의 학생보다는 보통학력 및 기초학력의 학생들에게 더욱 두드러지게 나타났다.

이러한 평가결과의 차이는 교과서에서 다루는 자료(datum)가 한 가지 유형에 집중되어진 것에서 그 원인을 찾을 수 있다. 교과서에서 분석된 38개의 자료(datum) 대부분은 정형자료(FD)이었다. 정형자료, 순행자료, 역행자료는 서로 다른 구조를 가지고 있음에도 불구하고 서로 독립적으로 다루지 않음으로 인해 편중된 학습 결과를 초래한 것이다. 특별히 독자적인 학업능력이 떨어지는 보통학력 이하의 학생들에게서 더욱 분명하게 나타난 것으로 분석된다. 따라서, 자료(datum)의 구조를 가지는 수학 내용에 대한 학습에서 다양한 유형에 대한 교수학적인 배려에 대한 시사점을 얻을 수 있다.

IV. 자료(datum)에 기초한 자료 개발

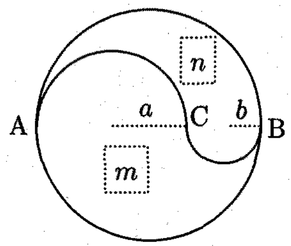
본 절에서는 기존의 자료(datum)로부터 새로운 자료 개발 결과를 제시한다. 앞 절에서 살펴 본 것과 같이 교과서에 다루어지는 자료(datum)의 구조를 가지는 수학 내용 대부분이 한 가지 유형에 치우쳐 있기 때문에 다른 유형에 대한 소개 및 개발은 필수적이다. 실제로 기존 자료(datum)에 따른 유형의 변형은 기존 유형과 전혀 다른 수학적 상황을 유발할 수 있기 때문에 상당히 의미있는 교수-

학습 활동이며, 교수 학습 자료로 유용하게 사용되어질 수 있다. 여기에서는 원을 활용한 자료(datum)의 개발 사례와 삼각형을 활용한 자료의 개발 사례를 중심으로 살펴본다.

1. 원을 활용한 자료(datum)의 사례

원을 활용한 자료의 개발은 수학사의 역사적 배경에 기초하였다. 구적법에 대한 높은 관심은 원을 이용한 다양한 문제들을 탄생시켰으며 오랫동안 수학자의 높은 관심을 받아왔고, 학교교육에서는 중요한 학습내용으로 자리를 잡았다. 수학사에서 유명한 두 가지 구체적인 문제를 바탕으로 자료(datum)의 사례를 살펴보면 아래와 같다.

[자료개발1] <그림 11>과 같이 선분 AB위의 한 점 C가 있다. 선분 AC, 선분 BC를 지름으로 하는 반원과 선분 AB를 지름으로 하는 원에 의해 둘러싸인 두 부분의 넓이의 비를 구하시오.(단, 선분 AC의 길이는 $2a$, 선분 BC의 길이는 $2b$이다.)



<그림 11>

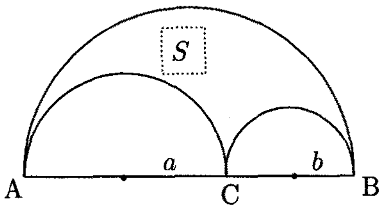
위의 [문제2]는 매우 전형적인 문제이다. 이 문제에서 세 가지 대상을 다음과 같이 설정할 수 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원의 반지름을 a, 선분 BC를 지름으로 하는 원의 반지름을 b, 두 부분의 넓이의 비를 $m:n$이라 하면 a, b, $m:n$은 자료(datum)이다. 따라서 [문제2]를 역행자료(RD)로 변형하면 다음과 같은 문제 자료를 만들 수 있다.

[자료개발1-1] 선분 AB위의 한 점 C가 있다. 선분 AC의 길이는 8, 선분 BC를 지름으로 하는 반원과 선분 AC를 지름으로 하는 원에 의해 둘러싸인 두 부분의 넓이의 비가 $2:3$일 때, 선분 BC를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

(풀이) 이 문제를 일반적인 상황에서 모두 해결되어지는지 보이도록 하자. 주어진 것으로 선분 AC의 길이를 $2a$, 두 부분의 넓이의 비를 $m:n$이라 하고, 선분 BC의 길이를 $2x$로 두자. 따라서 구할 것은 x이다. 아래 부분의 넓이는 $\dfrac{32\pi+8\pi x}{2}$이고, 윗 부분의 넓이는 $\dfrac{2\pi x^2+8\pi x}{2}$이다. 이 두 부분의 넓이의 비를 계산하면 $4:x$를 얻을 있으므로 주어진 것이고, $\dfrac{4}{x}=\dfrac{m}{n}$이 성립한다. 따라서 $x=\dfrac{4n}{m}$을 얻을 수 있다.■

[자료개발2] <그림 12>와 같이 선분 AB위의 한 점 C

가 있다. 선분 AC, 선분 BC, 선분 AB를 지름으로 하는 세 반원에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.(단, 선분 AC의 길이는 $2a$, 선분 BC의 길이는 $2b$, 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자.)



<그림 12>

위의 [문제3]는 Pappus의 '수학집성' 제 4권에 나오는 매우 유명한 문제로 중학교 교과서에 가끔 등장하는 전형적인 문제이다. 이 문제에서 세 가지 대상을 다음과 같이 설정할 수 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원의 반지름을 a, 선분 BC를 지름으로 하는 원의 반지름을 b, 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면, a, b, S는 자료(datum)이다. 따라서 [문제3]을 통해 다음과 같은 문제 자료를 만들 수 있다.

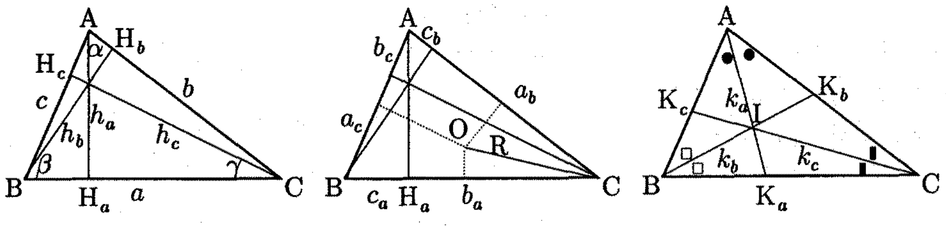
[자료개발2-1] 선분 AB위의 한 점 C가 있다. 선분 BC의 길이를 $2b$, 세 반원으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, 선분 AC를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이 x를 구하시오.

(풀이) 점 C를 지나고 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수직인 직선이 가장 큰 반원과 만나는 점을 D라 하면, 세 반원으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\overline{\mathrm{CD}}^2$이 된다. 따라서 $S=\overline{\mathrm{CD}}^2=2x\times 2b=4bx$인 관계가 성립한다. 따라서 구할 것인 x는 $\dfrac{S}{4b}$로 얻을 수 있다.■

2. 삼각형을 활용한 자료(datum)의 사례

평면도형 중에서 가장 간단한 도형은 삼각형이다. 삼각형의 개념은 초등학교에서 직관적인 수준에서 다루지만, 분석 및 비형식적인 연역 수준으로는 중학교 2학년 및 3학년에서 주로 다루고 있다. 삼각형의 기본적인 구성요소인 각, 변 등을 활용하여 탐구할 수 있는 자료(datum)에 대한 사례를 살펴보면 다음과 같다.

[자료개발3] 삼각형 ABC에서 세 각의 크기를 α, β, γ, 세 변의 길이를 a, b, c, 각 꼭짓점에서 대변에 내린 수선의 길이를 h_a, h_b, h_c, 각 꼭짓점에서 각의 이등분선이 대변과 만나는 점까지의 거리를 k_a, k_b, k_c, 각각의 꼭짓점에서 수선의 발까지의 거리를 c_a, b_a, a_b, c_b, b_c, a_c, 외접원의 반지름의 길이를 R라 할 때 가능한 자료(datum)를 찾으시오.



<그림 13>

(자료10) [문제4]에 제시된 조건에 따라 <그림 13>에 의해서 다양한 자료(datum)가 가능하다.

첫째, 삼각형의 세 각의 크기가 주어지면 $D_{10}(\alpha,\beta,\gamma)$이다.

둘째, 두 쌍의 길이의 비가 세 개 주어지면, $D_{11}(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a})$이다.

셋째, 한 각의 크기, 한 변의 길이, 한 수선의 길이가 주어지면, $D_{12_a}(\alpha,b,h_c)$, $D_{12_b}(\beta,c,h_a)$, $D_{12_c}(\gamma,a,h_b)$, $D_{12_d}(\alpha,c,h_b)$, $D_{12_e}(\beta,a,h_c)$, $D_{12_f}(\gamma,b,h_a)$이다.

넷째, 한 각의 크기, 한 변의 길이, 꼭짓점에서 수선의 발까지의 거리가 주어지면, $D_{13_a}(\alpha,b,b_c)$, $D_{13_b}(\beta,c,c_a)$, $D_{13_c}(\gamma,a,a_b)$, $D_{13_d}(\alpha,c,c_b)$, $D_{13_e}(\beta,a,a_c)$, $D_{13_f}(\gamma,b,b_a)$이다.

다섯째, 두 쌍의 세 수선의 길이의 비가 세 개 주어지면, $D_{14}(\frac{h_a}{h_b},\frac{h_b}{h_c},\frac{h_c}{h_a})$이다.

여섯째, 한 각, 두 변의 길이의 합(차), 두 수선의 길이의 합(차)이 주어지면, $D_{15_a}(\alpha,b\pm c,h_b\pm h_c)$, $D_{15_b}(\beta,c\pm a,h_c\pm h_a)$, $D_{15_c}(\gamma,a\pm b,h_a\pm h_b)$이다.

일곱째, 두 각의 합(차), 외접원의 반지름, 두 꼭짓점에서 한 수선까지의 거리의 합(차)이 주어지면, $D_{16}(\alpha\pm\beta,a_c\pm b_c,\mathrm{R})$이다.

여덟째, 두 각의 차, 다른 한 각의 이등분선의 길이와 그 각에서의 수선의 길이가 주어지면, $D_{17}(\alpha-\beta,k_c,h_c)$이다.

아홉째, 한 각의 이등분선의 길이, 이 각의 이등분선이 대변과 만나는 점에 의해 결정되는 두 선분의 길이의 곱, 이 각을 이루는 두 변의 길이의 곱이 주어지면, $D_{18}(k_a,bc,a_1a_2)$이다. (단, $a_1=\overline{\mathrm{BK}_a}$, $a_2=\overline{\mathrm{CK}_a}$)

(증명) 삼각형 ABC에서 제시한 자료(datum)중 마지막 두 가지에 대해서 살펴보자.

첫째, $D_{17}(\alpha-\beta,k_c,h_c)$임을 확인해 보자(<그림 13>참조).

$\gamma=180-(\alpha+\beta)$이고 각 A의 이등분선을 그었으므로 $\angle \mathrm{K_cCA}=90-(\frac{\alpha+\beta}{2})$ 이고, 삼각형 ACH_c는 직각삼각형이므로 $\angle \mathrm{ACH}_c=90-\alpha$ 이다. 그러므로 $\angle \mathrm{K_cCH}_c=\frac{\alpha-\beta}{2}$이다. 삼각

형 K_cCH_c은 직각삼각형이므로, $\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=\dfrac{h_c}{k_c}$인 관계가 성립한다. 따라서 $D_{17}(A-B, k_c, h_c)$이 된다.

둘째, $D_{18}(k_a, bc, a_1a_2)$임을 확인해 보자(<그림 13>참조).

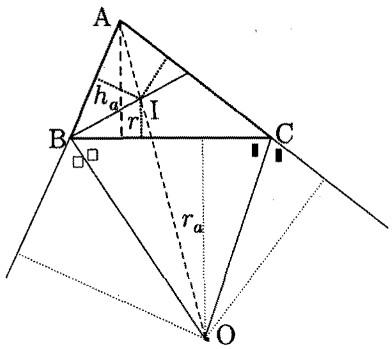
삼각형ABC의 외접원이 있다고 하자. 각 A의 이등분선의 연장선이 원과 만나는 점을 E라 하자. 그러면 $\angle BEA=\gamma$이므로 $\triangle ABE$ $\triangle ACK_a$이다. 닮음비에 의해서 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AK_a}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$, 즉 $\dfrac{b}{k_a}=\dfrac{\overline{AE}}{c}$이다. 따라서, $bc=k_a\overline{AE}=\overline{AK_a}(\overline{AK_a}+\overline{K_aE})=\overline{AK_a}^2+\overline{AK_a}\times\overline{K_aE}$이다. 여기서 원의 내부에서 만나는 두 현에 대한 성질에 의해 $\overline{AK_a}\times\overline{K_aE}=\overline{BK_a}\times\overline{K_aC}$이고, 이 식을 앞의 식에 대입하면 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$bc=\overline{AK_a}^2+\overline{AK_a}\times\overline{K_aE}=\overline{AK_a}^2+\overline{BK_a}\times\overline{K_aC}=k_a^2+a_1a_2$$

따라서 $bc=k_a^2+a_1a_2$이므로 $D_{18}(k_a, bc, a_1a_2)$이 된다.■

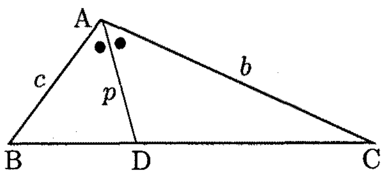
[자료개발4] 삼각형 ABC에서 내심을 I, 방심을 O라 하고, 점 A에서 내린 수선의 발의 길이를 h_a, 내접원의 반지름의 길이를 r, 방접원의 반지름의 길이를 r_a라 하면, $D_{19}(h_a, r, r_a)$이다.

(설명) 자료임을 보이는 것은 세 개의 수학적 대상 사이의 일반적인 관계식이 있음을 통해 확인할 수 있다. 실제로, $h_a=\dfrac{2rr_a}{r_a-r}$ 인 관계를 확인할 수 있다.



<그림 14>

[자료개발5] 각 A의 크기가 주어진 삼각형 ABC에서, 각 A의 이등분선이 대변과 만나는 점을 D라 하고, 각각의 변의 길이를 p, b, c라 하면, $D_{20}(p, b, c)$이다.



<그림 15>

(설명) 각 A의 크기를 구체적으로 120°라고 하면, $\triangle ABD+\triangle ACD=\triangle ABC$인 관계가 성립하므로 $pc+pb=2bc\cos 60°$이다. 따라서 이 식을 전개하면 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$인 관계를 확인할 수 있다.

V. 요약 및 결론

본 연구에서는 수학 문제 외적 구조의 한 가지 형태인 자료(datum)에 대해 살펴보았다. Euclid의 저작인 자료론에서 제시하고 있는 자료(datum)는 수학적 내용의 외적인 구조의 측면에서 매우 특별한 의미를 지니고 있었다. 이러한 문제의 외적인 구조 측면에서 자료론이 가지는 의미를 고찰하였고, 이를 바탕으로 중학교 전체 내용 영역에서 자료(datum)라고 볼 수 있는 내용을 찾아 보았으며, 특별히 기하 영역에서 자료(datum)가 되는 수학적인 내용의 구체적인 사례 분석을 실시하였다. 마지막으로는 중학교 기하영역에 대한 분석 결과를 바탕으로 몇 가지 수학 교수-학습을 위한 자료를 제시하였다. 구체적인 연구결과는 다음과 같다.

첫째, 자료론의 분석을 통해 자료(datum)의 의미를 구체화하였다. 자료론은 Pappus가 제시한 분석의 보물 맨 앞에 위치하고 있는 책으로, 정의 15개와 94개의 명제로 이루어져 있다. 94개의 명제들은 자료(datum)라고 불리는 동일한 구조를 가지고 있고, 거의 동일한 형태의 증명 양식을 취하고 있다. 명제의 구성을 보면, 가정 부분에 2개[혹은 3개]의 수학적 대상이 있고, 결론에는 항상 1개의 수학적 대상이 있다. 즉, 주어진 2개[혹은 3개]의 조건을 충족시키면 새로운 1개의 결론을 도출할 수 있다는 의미이다. 여기서 가정과 결론에 존재하는 수학적 대상들의 모임을 '자료(datum)'라고 한다. 단, 수학적 대상 A, B, C를 자료(datum)라고 명명할 수 있는 것은, 수학적 대상 세 개 중 임의의 한 개를 제외한 나머지 두 개만으로 제외된 나머지 하나를 항상 구할 수 있는 대상들만으로 이루어졌을 때이다. 이것이 자료(datum)가 가지는 가장 중요한 구조적인 특징이다.

둘째, 분석의 효율을 위해 자료(datum)를 분류하여 세 가지 유형을 제시하였다. 특정 자료(datum) 상황에서 학생들에게 가장 친숙하고, 보편적인 문제 상황일 때를 정형자료(FD), 학생들에게 다소 익숙하지 않지만, 어느 정도는 보편적인 문제 상황일 때를 순행자료(DD), 학생들에게 가장 익숙하지 않고, 다소 생소한 문제 상황일 때를 역행자료(RD)로 구분하였다.

셋째, 중학교 교과서에 제시되어져 있는 자료(datum)는 모두 38개로 확인되었고, 이 중 기하내용이 22개로 가장 높은 비중을 차지하고 있었다. 보다 객관적인 자료(datum)의 수를 확인하기 위해 지난 6년간의 국가수준학업성취도 평가 중학교 문항을 분석하였는데, 그 결과 전체 문항 수의 17.8%가 자료(datum)의 형식을 지니고 있었다.

넷째, 기하영역에 대한 자료(datum)를 바탕으로 구체적인 분석을 실시하였다. 분석 결과 중학교 기하영역에 나오는 자료(datum)는 네 가지 형식(type)의 서로 다른 범주로 구분되었다. 형식1은 FD, DD, RD가 부분적으로 동일한 수평적인 관계를 가지고, 주어진 두 대상 사이에 대칭적인 구조를 가지고 있는 자료(datum)이다. 형식2는 FD, DD, RD가 부분적으로 동일한 수직적인 관계를 가지고, 두 대상의 순서적인 구분은 의미가 없기 때문에 주어진 두 대상 사이에 대칭적인 구조를 가지고 있는 자료(datum)이다. 형식3은 FD, DD, RD가 전체적으로 동일한 수평적인 관계를 가지고, 세 대상 사이에 순서적인 구분은 의미가 없기 때문에 모든 유형이 본질적으로 동일하며, 세 대상 사이

의 관계에 대한 일반화된 공식이 보편적으로 알려져 있는 자료(datum)이다. 형식4는 FD, DD, RD가 전체적으로 상이한 수직적인 관계를 가지고, 세 대상 사이에 순서적인 구분은 매우 중요한 의미를 가지며, 각각의 세 유형이 독특한 절차와 난이도 차이가 분명한 자료(datum)이다.

다섯째, 한 개의 자료(datum)이지만 서로 다른 유형을 가질 수 있기 때문에 각 유형에 대한 교수학적인 배려가 요구되어진다. 실제로 국가수준학업성취도 평가에서 동일한 자료(datum)에 대한 상이한 유형의 문제에서 매우 다른 성취 결과가 나타났다. 특히, 우수학력의 학생보다는 보통학력 이하의 학생들에게서 더욱 두드러졌다. 따라서 자료(datum)의 구조를 가지는 수학 내용에 대한 학습에서 편중된 학습을 지양하고 다양한 유형에 대한 수업 활동이 요구되어진다.

여섯째, 자료(datum)의 형식을 가지는 수학 내용에 대한 교수-학습 활동에서 다양한 수학적 경험을 위한 학습 자료의 예시를 제시하였다. 현장 교사들의 유사한 자료 개발 활동을 통해 교수-학습의 개선 및 풍성한 수학 수업이 기대되어진다.

참 고 문 헌

교육부 (1999). 고등학교 수학과 교육과정 해설, 서울 : 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2007). 2007 개정교육과정, 서울 : 교육인적자원부.

서보억 · 윤대원 · 김동근 (2008). 유클리드의 자료론(Euclid's Data)에 대하여, <한국수학사학회논문집>, **21(2)**, 55-70.

염상섭 (2009). 수학문제 해결의 기법에 관한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **23(4)**, 1015-1022.

유희찬 · 류성림 · 한혜정 · 강순모 · 제수연 · 김명수 · 천태선 · 김민정 (2010). 중학교 1학년, 2학년 수학, 서울 : 미래엔 컬처그룹.

조두경 · 박만구 (2008). 수학 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생들의 수학적 사고 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **47(2)**, 169-180.

한국교육과정평가원 (2004). 2003년 국가수준학업성취도 평가 연구-수학-, 한국교육과정평가원.

____________ (2005). 2004년 국가수준학업성취도 평가 연구-수학-, 한국교육과정평가원.

____________ (2006). 2005년 국가수준학업성취도 평가 연구-수학-, 한국교육과정평가원.

____________ (2007). 2006년 국가수준학업성취도 평가 연구-수학-, 한국교육과정평가원.

____________ (2008). 2007년 국가수준학업성취도 평가 연구-수학-, 한국교육과정평가원.

____________ (2009). 2008년 국가수준학업성취도 평가 연구-수학-, 한국교육과정평가원.

한인기 (2001). 수학문제의 구조 규명에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **11**, 279-290.

한인기 (2009). 수학 문제의 내적구조를 활용한 기하 영역의 수준별 교수-학습 자료의 분석 연구, 한

국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 23(2), 175-196.
황석근 · 이재돈 (2007). 중학교 수학7-가, 7-나, 8-가, 8-나, 9-가, 9-나, 서울 : 한서출판사
Boyer C. B., & Merzbach, U. C. (1991). *A History of mathematics*, John Wiley & Sons Inc.
Eves H. (1990). *An introduction to the history of mathematics*, Saunders College Publishing.
Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics*, Dover Publications Inc.
Taisbak, C. M. (2003). *Euclid's Data(ΔΕΔΟΜΕΝΑ) or The Importance of Being Given*, Museum Tusculanum Press.

The Analysis study of 'datum' in Middle School Geometry on the Basis of 'The Data' of Euclid

Suh Bo-euk
Mathematics Education, Catholic University in Daegu,
Hayang, Gyung-san, Gyungsangbukdo, Korea
E-mail : eukeuk@cu.ac.kr

The purpose of this study is to analyze 'datum' of 'The Data' in the textbooks of middle school on the basis of 'The Data of Euclid' and develop datum. For this, the followings are conducted.

First, the distinctive structure of datum of 'The Data' is considered. Second, some learning materials the contents of geometry in the textbooks of middle school are analyzed and the mathematical meanings are explored. Third, the applicable datum to geometry education of middle school are developed and the way of educational use is studied.

The hopefully, the result of this study will make school mathematics education more plentiful and give meaningful implications to revision of mathematics education curriculum and the improvement of teaching and learning.

* ZDM Classification : D13
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : datum, The Data, Geometry education, Teaching and learning material