

## 택시거리함수를 이용한 평면기하에 관한 연구<sup>1)</sup>

곽 경 민 (경기과학고등학교)  
백 승 민 (경기과학고등학교)  
최 우 석 (경기과학고등학교)  
최 준 범 (경기과학고등학교)  
고 일 석 (경기과학고등학교)  
김 병 학 (경희대학교)<sup>2)</sup>

택시거리함수는 거리함수의 조건을 만족하면서 실제로 택시가 갈 수 있는 경로를 따라 이동할 때 거리 개념을 주는 실용적인 거리개념이라 할 수 있다. 비 유클리드 기하의 하나로서 실제로 평면상을 이동하는 우리 실생활을 반영할 수 있는 이 개념은 러시아 태생의 수학자 H. Minkowski에 의해 처음으로 제안되고, E. F. Krause(1986)에 의해 단행본으로 출판되어 기본개념과 그간의 결과들이 소개 되어졌다. 그 후 이 거리개념을 가지는 공간에서 많은 연구가 이루어지고 있다.

본 연구에서는 비 유클리드 기하인 택시기하의 문제를 유클리드 평면기하의 결과 및 택시기하에 대한 선행연구결과 등을 참조하여 유클리드 기하와의 차별점과 택시거리함수를 이용한 평면기하의 제정리를 고찰하였다.

### I. 서 론

평면기하를 설명하는 방법 중에서는 점, 선분 등으로부터 시작하여 각도와 거리에 대한 개념도입이 중요하다. 우리가 익숙한 유클리드 기하에서는 유클리드 거리에 의해서 이론이 전개된다. 이 거리 개념은 직관적으로 이해가 쉽고 기존의 개념과도 일치하기 때문에 가장 많이 활용되고 있다. 그러나 잘 계획된 현대도시의 두 지점간의 거리개념은 실제로 갈 수 있는 경로를 통하여 정의되어야만 현실성을 떨 수 있다고 할 수 있다.

유클리드 기하학과 비교하여 평면상의 택시기하학은 실제로 택시가 갈 수 있는 경로를 따르는 실제적인 거리개념이라 할 수 있다. 이 개념을 이용한다면 우리의 실생활에서 만날 수 있는 여러 문제

\* 접수일(2010년 7월 30일), 심사(수정)일(2010년 8월 14일), 게재확정일자(2010년 9월 24일)

\* ZDM 분류 : G94

\* MSC2000 분류 : 97D50

\* 주제어 : 택시거리, 평면기하

1) 본 연구는 2010년도 과학고 영재교육 내실화 경기도 지원사업에 의하여 수행한 연구임.

2) Corresponding Author

들을 해결할 수 있는 수학적 근거를 제공할 수 있다. 예를 들면 두 사람의 직장인이 각각의 직장까지 가는 거리의 합이 최소가 되는 곳에 집을 구할 경우, 우체부가 도시의 여러 곳에 우편물을 배달해야 할 때 최적의 경로제공, 근방의 여러 곳 사람들이 이용하는 전화국 또는 편의시설을 설치할 경우 최적의 위치 또는 학교 배정시 학군별 경계의 설정 등에 기여를 할 수 있다. 이와 같이 택시거리에 의한 기하학적 고찰은 실생활과 밀접한 관련이 있고 그 활용성이 높은 비유클리드 기하학이며 현재까지 택시기하학과 그 수학교육적 활용에 대한 연구가 발표되고 있다.

그러나 택시거리에 의한 평면기하의 개념도입은 유클리드 기하학의 개념을 수평적으로 도입하면 오류를 범할 수 있는 면이 많기 때문에 개념의 정확한 이해와 정의 및 새로운 논리적체계가 필요하다고 할 수 있다.

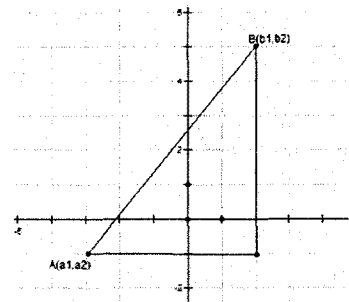
이와 같은 관점에서 본 논문에서는 지금까지 연구된 택시평면기하의 개념과 문제를 더욱 엄밀히 파악하고, 수학적 개념을 정확히 하여 제문제를 고찰하였다. 또한 발표되지 않은 여러 택시평면기하의 개념을 고찰하여 유클리드 기하와의 차별점을 발견하였으며, 이와 관련한 수학적 과정과 문제 해결 과정 등을 제시하고 이 연구를 통해 얻어진 결과들을 제시한다.

## II. 택시거리와 택시기하

평면상의 두 점  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  사이의 유클리드 거리  $d_E(A, B)$ 는  $d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ 로 주어진다.

한편 평면상의 두 점  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  사이의 택시거리  $d_T(A, B)$ 는  $d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ 로 주어진다. 당연히  $d_T$ 는 거리함수의 조건을 만족하며, 일반적으로 유클리드 거리보다 작지 않으며 두 거리함수사이의 관계는 어렵지 않게 파악할 수 있다. 이와 같은 택시거리함수를 이용한 기하를 택시기하라 한다(E.F.Krause (1986), 김경동·김희식 (2004)).

택시기하에서의 기본개념인 점과 택시거리, 택시원, 택시각, 택시삼각함수는 다음과 같이 정의된다(김경동·김희식 (2004), 원대윤 (1999)).



<그림 1>

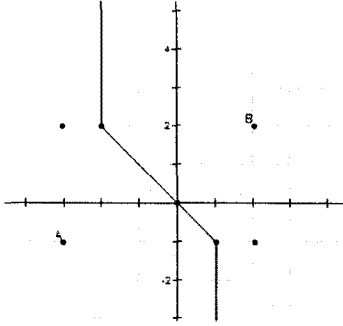
II-1. 한 점 A에서 직선 L까지의 택시거리는  $d_T(A, L) = \min_{P \in L} d_T(A, P)$ 이다.

II-2. 두 점에서 같은 택시거리에 있는 택시 집합은 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

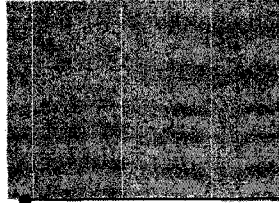
- (1) 두 점이  $x$ 축이나  $y$ 축 위에 있을 때는 두 점을 지나고 선분을 수직이등분하는 직선이다.
- (2) 두 점이 (정사각형이 아닌)직사각형의 대각선의 끝점일 때 <그림 2>와 같이 두 번 꺾인 직선

의 모양이다.

(3) 두 점이 정사각형의 대각선의 끝점일 때 <그림 3>과 같이 직선과 빗금 친 영역이 된다.



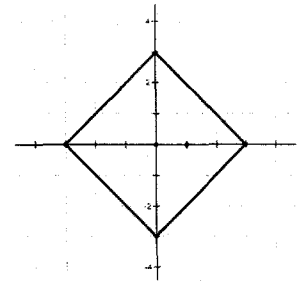
<그림 2>



<그림 3>

II-3. 택시원은 평면상의 한 정점에서 일정한 택시거리에서 있는 점들의 집합이다. 즉 좌표평면에서 중심이 P, 반지름이 r인 택시원  $C_T(P,r)$ 은  $C_T(P,r) = \{Q \in R^2 \mid d_T(P,Q) = r\}$ 이며, 마름모의 형태를 띄게 됨을 알 수 있다.

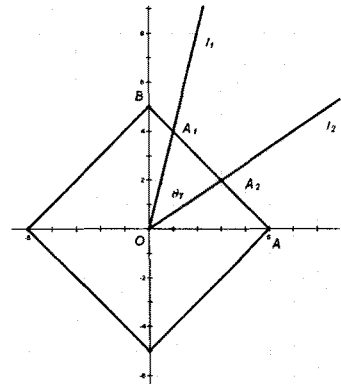
이 경우 택시 원주율  $\pi_T$ 는 택시원의 지름에 대한 원주의 비이며,  $\pi_T = 4$ 이다. 유클리드원은 원의 중심을 중심으로 하여 임의의 각 만큼 회전시켜도 원의 모양은 변하지 않는다. 그러나 택시원은 택시원을 중심으로 하여  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  만큼 회전이동하거나, x축, y축,  $y = x, y = -x$ 에 대하여 대칭이동 했을 때, 역시 택시원이 된다.



<그림 4>

#### II-4. 택시각

원점에서 출발하는 두 반직선  $l_1, l_2$ 가 반지름 1인 택시원  $C_T(O,1)$ 과 만나는 점을  $A_1, A_2$ 라 하자. 이때 택시각  $\angle A_1OA_2$ 의 크기를  $l_1$ 과  $l_2$ 에 의해 잘려진 택시원의 호의 길이 ( $l_T$ )로 정의 한다. 이것을 택시호도법이라 하고  $\angle A_1OA_2 = \theta_T$ 로 표시하고 택시각이라 부른다. 또한 택시각  $\theta_T$ 를 이루는 두 선분이 x축과 이루는 각 중에 작은 각  $\alpha_T$ 를 택시각  $\theta_T$ 의 참고각이라 한다. 참고각이 0인 택시각을 표준택시각이라 한다. 이 때 반지름 r인 택시원  $C_T(O,r)$ 에서 택시각  $\theta_T$ 로 잘려진 호의길이  $l_T$ 는  $l_T = r\theta_T$ 가 된다(원대운 (1999), 문숙미 (2007)).



<그림 5>

### II-5. 택시삼각함수

표준택시각  $\theta_T$ 가 되는 반직선이 반지름  $r$ 인 택시원과 만나는 점을  $P(x, y)$ 라 할 때 삼각함수는 유클리드 삼각함수와 유사하게 다음과 같이 정의된다.

$$\sin \theta_T = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta_T = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta_T = \frac{\sin \theta_T}{\cos \theta_T}.$$

또한, 택시삼각함수는 다음과 같은 성질을 만족한다(문숙미 (2007)).

$$\cos \theta_T = \begin{cases} 1 - \frac{\theta_T}{2}, & \theta_T \in [0, 4] \\ -3 + \frac{\theta_T}{2}, & \theta_T \in [4, 8] \end{cases} \quad \sin \theta_T = \begin{cases} \frac{\theta_T}{2}, & \theta_T \in [0, 2] \\ 2 - \frac{\theta_T}{2}, & \theta_T \in [2, 6] \\ -4 + \frac{\theta_T}{2}, & \theta_T \in [6, 9] \end{cases},$$

## III. 택시기하에서 각 이등분선과 내심, 방심

이 장에서는 앞에서 정의된 택시기하에서의 개념을 이용하여 각 이등분선과 내심 및 방심에 대해 알아본다. 이와 관련하여 박순용(2006)등 기존의 연구를 보다 엄밀히 고찰하고 경우별로 각 이등분선과 내심 및 방심의 존재성과 좌표에 대해 고찰하였다. 이 결과는 기존의 연구결과에 비해 간단하고 직선의 기울기에 따라 각의 이등분선, 내심, 방심의 좌표와 반지름을 구했다는 점에서 이후 이 분야 연구에 새로운 연구방법을 제시하였다고 할 수 있다.

### III-1. 각 이등분선

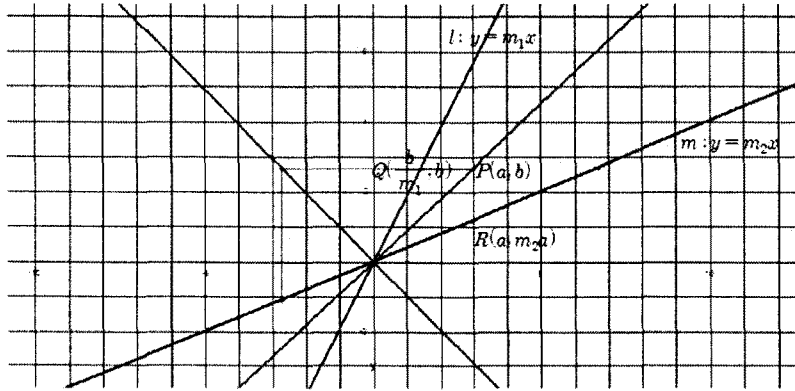
박순용(2006)등의 연구에서는 주어진 점의 위치를 네 가지 경우로 나누어 고찰하였다. 그러나 여기에서는 직선의 기울기에 의하여 분류하면 일반적인 경우까지 고찰할 수 있음을 알 수 있다. 먼저 교차하는 두 직선  $l, m$ 의 각 이등분선  $n$ 은  $n = \{P \mid d_T(l, P) = d_T(m, P)\}$ 에 의하여 정의된다. 이 때 직선  $l, m$ 의 기울기를 각각  $m_1, m_2$ 라고 하면 각 이등분선  $n$ 의 식은 다음과 같은 경우들로 나누어 각 경우 각의 이등분선의 식을 구할 수 있다.

(1)  $|m_1| \geq 1, |m_2| < 1$  인 경우

직선  $l, m$ 의 각 이등분선 상의 점  $P$ 에 대해  $P$ 를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선과  $l$ 과의 교점을  $Q, P$ 를 지나고  $y$ 축에 평행한 직선과  $m$ 과의 교점을  $R$ 이라고 하자.

$|m_1| \geq 1$ 이므로 점  $P$ 와 직선  $l$ 사이의 거리  $d_T(l, P) = PQ = \left| a - \frac{b}{m_1} \right|$ 이고  
 $|m_2| < 1$ 이므로 점  $P$ 와 직선  $m$ 사이의 거리  $d_T(m, P) = PR = |b - m_2 a|$ 이다.

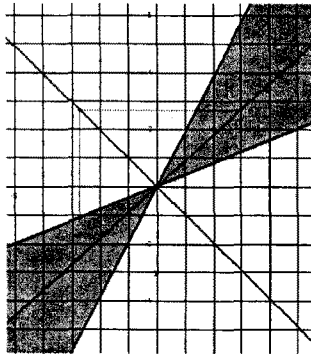
따라서  $n$ 은  $\left|a - \frac{b}{m_1}\right| = |b - m_2a|$ 인 점  $P(a, b)$ 의 집합이다.



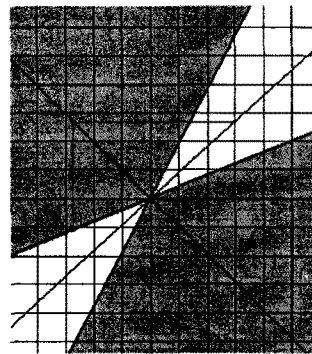
<그림 6>

(1)-a.  $P$ 가 <그림 7> 영역에 존재할 경우에는  $a - \frac{b}{m_1} = b - m_2a$ 이므로  $a, b$ 에 대해 나타내면  $\left(1 + \frac{1}{m_1}\right)b = (1 + m_2)a$ 이다. 즉,  $b = \frac{m_1}{1 + m_1}(1 + m_2)a$ 이므로 이 직선의 방정식은  $y = \frac{m_1}{1 + m_1}(1 + m_2)x$ 이다.

(1)-b.  $P$ 가 <그림 8> 영역에 존재할 경우에는  $a - \frac{b}{m_1} = m_2a - b$ 이므로,  $a, b$ 에 대해 나타내면  $\left(\frac{1}{m_1} - 1\right)b = (1 - m_2)a$ 이다. 즉,  $b = \frac{m_1}{1 - m_1}(1 - m_2)a$ 이므로 이 직선의 방정식은  $y = \frac{m_1}{1 - m_1}(1 - m_2)x$ 이다.



<그림 7>



<그림 8>

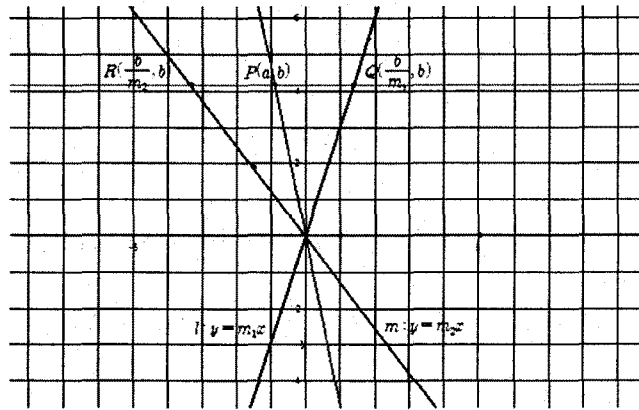
(2)  $|m_1|, |m_2| \geq 1$  인 경우

직선  $l, m$ 의 각 이등분선 상의 점  $P$ 에 대해  $P$ 를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선과  $l, m$ 과의 교점을  $Q, R$ 이라고 하자.

$|m_1| \geq 1$ 이므로 점  $P$ 와 직선  $l$  사이의 거리  $d_T(l, P) = PQ = \left| a - \frac{b}{m_1} \right|$ 이고

$|m_2| \geq 1$ 이므로 점  $P$ 와 직선  $m$  사이의 거리  $d_T(m, P) = PR = \left| a - \frac{b}{m_2} \right|$ 이다.

따라서  $n$ 은  $\left| a - \frac{b}{m_1} \right| = \left| a - \frac{b}{m_2} \right|$ 인 점  $P(a, b)$ 의 집합이다.



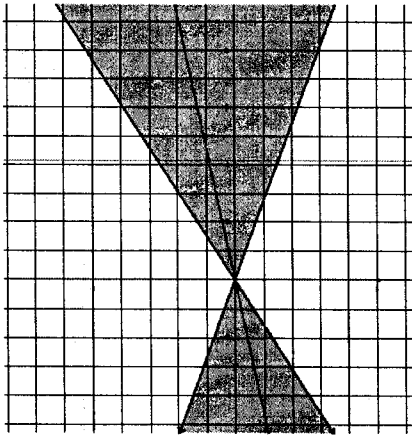
<그림 9>

(2)-a  $P$ 가 <그림 10> 영역에 존재할 경우에는  $\frac{b}{m_1} - a = a - \frac{b}{m_2}$ 이다. 따라서

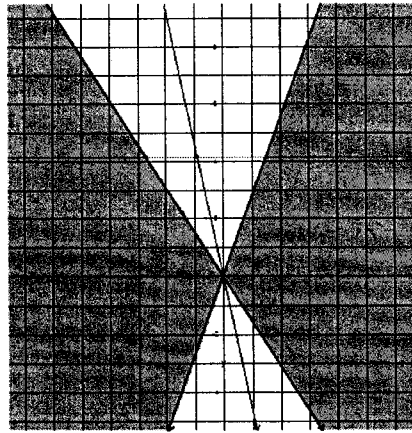
$$2a = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) b \quad \text{즉,} \quad b = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} a \text{이므로, 이 직선의 방정식은 } y = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} x \text{이다.}$$

(2)-b  $P$ 가 <그림 11> 영역에 존재할 경우에는  $a - \frac{b}{m_1} = a - \frac{b}{m_2}$ 이다. 따라서

$$\left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) b = 0 \quad \text{즉,} \quad b = 0 \text{이므로, 이 직선의 방정식은 } y = 0 \text{이다.}$$



<그림 10>



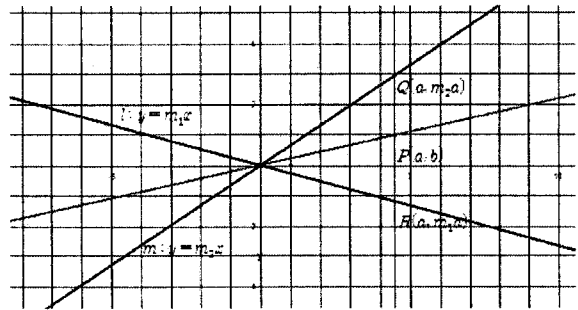
<그림 11>

(3)  $|m_1|, |m_2| < 1$  인 경우

<그림 12>에서 직선  $l, m$ 의 각 이동 분선 상의 점  $P$ 에 대해  $P$ 를 지나고  $y$ 축에 평행한 직선과  $l, m$ 과의 교점을 각각  $Q, R$ 이라고 하자.

$|m_1| < 1$ 이므로 점  $P$ 와 직선  $l$  사이의 거리  $d_T(l, P) = PQ = |b - m_1a|$ 이고  $|m_2| < 1$ 이므로 점  $P$ 와 직선  $m$  사이의 거리  $d_T(m, P) = PR = |b - m_2a|$ 이다.

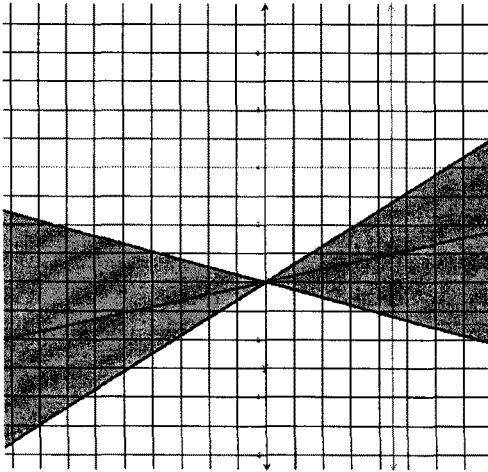
따라서  $n$ 은  $|b - m_1a| = |b - m_2a|$ 인 점  $P(a, b)$ 의 집합이다.



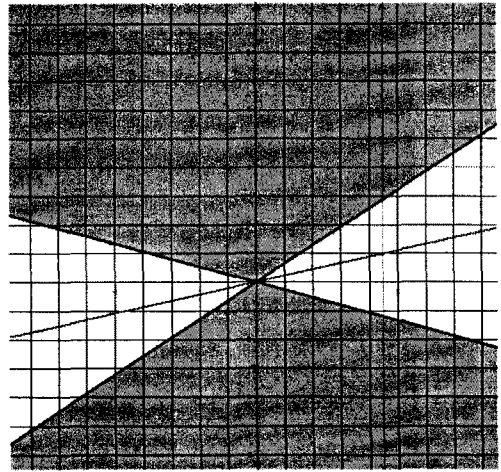
<그림 12>

(3)-a.  $P$ 가 위 영역(<그림 13>)에 존재할 경우에는  $b - m_1a = m_2a - b$ 이다. 따라서  $2b = (m_1 + m_2)a$  즉,  $b = \frac{m_1 + m_2}{2}a$ 이므로, 이 직선의 방정식은  $y = \frac{m_1 + m_2}{2}x$ 이다.

(3)-b.  $P$ 가 <그림 12> 영역에 존재할 경우에는  $b - m_1a = b - m_2a$ 이다. 따라서  $(m_1 - m_2)a = 0$  즉,  $a = 0$ 이므로, 이 직선의 방정식은  $x = 0$ 이다.



<그림 13>



<그림 14>

III-2. 내심

택시기하학에서  $\triangle ABC$ 의 내심은  $d(\overrightarrow{AB}, l) = d(\overrightarrow{BC}, l) = d(\overrightarrow{CA}, l)$ 를 만족하는 점  $I$ 로 정의된다.

택시기하학에서 내심의 존재성은 박순용(2006)에 비해 다음과 같이 간단히 증명할 수 있다. 앞에서 살펴본 바와 같이 임의의 두 직선의 각 이등분선은, 그 두 직선에 의해 나뉘는 네 구간 중 어느 것을 고르더라도 그 구간을 지나는 것이 존재한다. 따라서  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 기울기와 관계없이, 이중 임의의 두 직선을 고르면 삼각형 내부를 지나는 그 두 직선의 각 이등분선이 존재하므로,  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선을  $l$ ,  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선을  $m$ , 그리고  $l \cap m = I$ 라고 하면

$d(\overrightarrow{AB}, I) = d(\overrightarrow{BC}, I) = d(\overrightarrow{CA}, I)$  이므로  $I$ 는  $\triangle ABC$ 의 내심이 된다. 또한 다음과 같이 주어진 직선의 기울기에 의한 분류에 의하여 각 경우 내심의 좌표와 내접원의 반지름을 구할 수 있다.

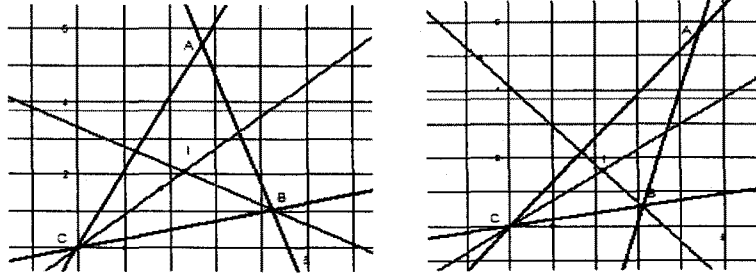
(1) 내심의 좌표

일반성을 잃지 않고  $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 중  $y$ 좌표의 값이 가장 작은 것을  $C$ 라고 둔 후,  $C$ 가 원점으로 오도록 삼각형을 평행이동 시키자. 평행이동 후 삼각형의 각 꼭짓점의 좌표를  $A(a_1, b_1)$ ,  $B(a_2, b_2)$ ,  $C(0,0)$ ,  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}$ 의 기울기를 각각  $m_1, m_2, m_3$ 라고 하자.



(1)-a.  $|m_1| \geq 1, |m_2| < 1$  인 경우

(1)-a-i).  $|m_3| \geq 1$  인 경우



<그림 15>

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{m_1}{1+m_2}(1+m_2)x$  이고

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $(y-b_1) = 2\frac{m_1m_3}{m_1+m_3}(x-a_1)$ 이다.

위 두 식을 연립하면  $\frac{m_1}{1+m_2}(1+m_2)x = 2\frac{m_1m_3}{m_1+m_3}(x-a_1) + b_1$  이므로

$b_1 = a_1m_1$ 를 위 식에 대입하여  $m_1$ 을 약분하고 양변에  $(1+m_2)(m_1+m_3)$ 을 곱하면

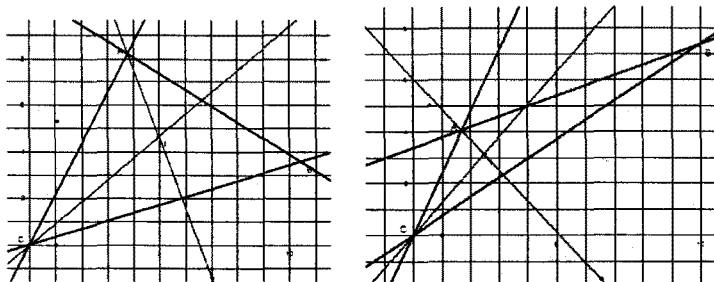
$(1+m_2)(m_1+m_3) = 2(1+m_1)m_3x + a_1(m_1-m_3)(1+m_1)$  이다. 이를 정리하여  $x$ 에 대해

풀면  $x = \frac{a_1(m_1-m_3)(1+m_1)}{m_1-m_3+m_1m_2+m_2m_3-2m_3m_1}$  이고,

이에  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}, m_2 = \frac{b_2}{a_2}, m_3 = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ 을 대입하여 정리하면

내심  $I = (\frac{a_2(a_1+b_1)}{a_2+b_1}, \frac{b_1(a_2+b_2)}{a_2+b_1})$ , 반지름의 길이  $r = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2+b_1}$  이다.

(1)-a-ii).  $|m_3| < 1$  인 경우



<그림 16>

$\overrightarrow{BC}, \overleftarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{m_1}{1+m_2}(1+m_2)x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overleftarrow{BC}$ 의 각 이등분선은  $(y-b_2) = \frac{m_2+m_3}{2}(x-a_2)$ 이다.

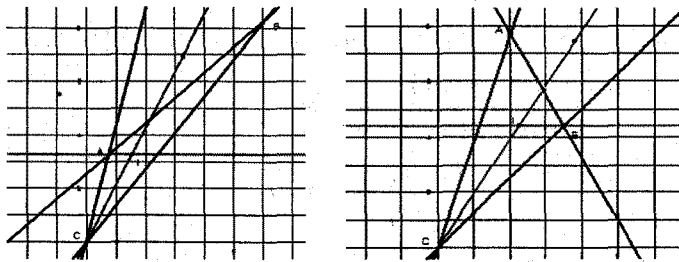
위 두 식을 연립하면  $\frac{m_1}{1+m_2}(1+m_2)x = \frac{m_2+m_3}{2}x - \frac{m_2+m_3}{2}a_2 + m_2a_2$ 이므로 위 식의 양변에  $2(1+m_2)$ 을 곱하면  $2m_1(1+m_2)x = (1+m_1)(m_2+m_3)x + (m_2-m_3)(1+m_1)a_2$ 이다.

이를 정리하여  $x$ 에 대해 풀면  $x = \frac{a_2(m_2-m_3)(1+m_1)}{2m_1-2m_2+(m_2-m_3)(1+m_1)}$ 이고,

이에  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}, m_2 = \frac{b_2}{a_2}, m_3 = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ 을 대입하여 정리하면

내심  $I = (\frac{a_2(a_1+b_1)}{a_2+b_1}, \frac{b_1(a_2+b_2)}{a_2+b_1})$ , 반지름의 길이  $r = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2+b_1}$ 이다.

(1)-b.  $|m_1|, |m_2|, |m_3| \geq 1$  인 경우



<그림 17>

(1)-b-i).  $m_3 \geq 0$  인 경우

$\overrightarrow{BC}, \overleftarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overleftarrow{AC}$ 의 각 이등분선은  $y = b_1$ 이다.

위 두 식을 연립하면  $\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}x = b_1$ 이고, 이를 정리하여  $x$ 에 대해 풀면  $x = \frac{m_1+m_2}{2m_1m_2}b_1$ 이

다. 이에  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}, m_2 = \frac{b_2}{a_2}, m_3 = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ 을 대입하여 정리하면 내심  $I = (\frac{a_1b_2 + a_2b_1}{2b_2}, b_2)$ ,

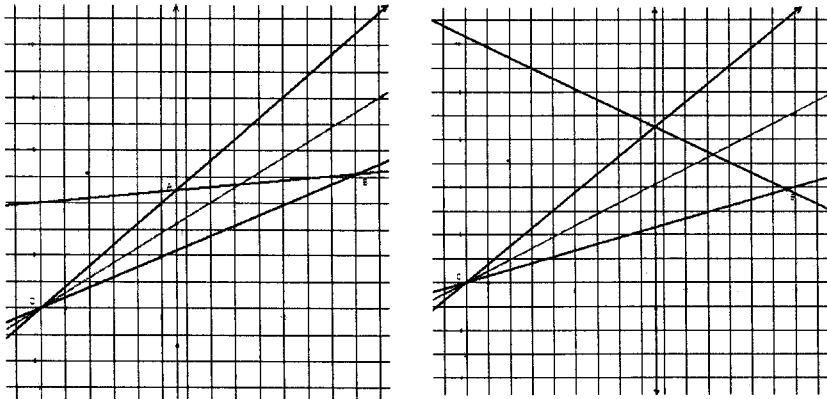
반지름의 길이  $r = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{2b_2}$ 이다.

(1)-b-ii).  $m_3 < 0$ 인 경우

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선은  $y = b_2$ 이다.

위 두 식을 연립하면  $\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}x = b_2$ 이고, 이를 정리하여  $x$ 에 대해 풀면  $x = \frac{m_1+m_2}{2m_1m_2}b_2$ 이다. 이에  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}, m_2 = \frac{b_2}{a_2}, m_3 = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ 을 대입하여 정리하면 내심  $I = (\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2b_1}, b_1)$ , 반지름의 길이  $r = \frac{a_2b_1-a_1b_2}{2b_1}$ 이다.

(1)-c.  $|m_1|, |m_2|, |m_3| < 1$ 인 경우



<그림 18>

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{m_1+m_2}{2}x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $x = a_1$ 이다.

위 두 식을 연립하여  $x$ 로 나타낸 후  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}, m_2 = \frac{b_2}{a_2}, m_3 = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ 을 대입하여 정리하면 내심  $I = (\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2a_2}, a_1)$ , 반지름의 길이  $r = \frac{a_2b_1-a_1b_2}{2a_2}$ 이다.

### III-3. 방심

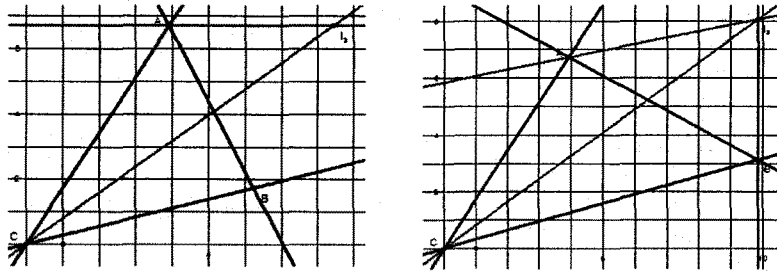
택시기하학에서  $\triangle ABC$ 의  $A$ 에 대한 방심  $I_a$ 는  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 로 둘러싸이며, 삼각형 외부에 존재하는  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 에 이르는 거리가 모두 같은 점으로 정의된다. 우선, 택시기하학에서 방심의 존재성은 박순용(2006)의 연구에 비하여 다음과 같이 간단히 증명할 수 있다. 내심의 경우와 마찬가지로

임의의 두 직선의 각 이등분선은 그 두 직선에 의해 나뉘는 네 구간에 대해 모두 존재한다는 사실을 이용하여 증명할 수 있다.  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 기울기와 관계없이,  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 로 둘러싸이며 삼각형 외부에 존재하는  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선이 존재하므로,  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선을  $l_b$ ,  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선을  $l_c$ , 그리고  $l_b \cap l_c = I_a$ 라고 하면  $d(\overrightarrow{AB}, I_a) = d(\overrightarrow{BC}, I_a) = d(\overrightarrow{CA}, I_a)$ 이므로  $I_a$ 는  $\triangle ABC$ 의  $A$ 에 대한 방심이 되는 것이다. 또한 다음과 같이 주어진 직선의 기울기에 의한 분류에 의하여 각 경우 방심의 좌표와 방점원의 반지름을 구할 수 있다.

(1) 방심의 좌표

내심의 경우와 마찬가지로 각 꼭짓점의 좌표를  $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(0,0), \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}$ 의 기울기를 각각  $m_1, m_2, m_3$ 이라고 하자.

(1)-a.  $|m_1| \geq 1, |m_2| < 1$ 인 경우



<그림 19>

(1)-a-i).  $|m_3| \geq 1$ 인 경우

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{m_1}{1+m_1}(1+m_2)x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = b_1$ 이다.

위 두 식을 연립하면  $\frac{m_1}{1+m_1}(1+m_2)x = b_1$ 이고, 이를 정리하여  $x$ 에 대해 풀면

$x = \frac{1+m_1}{m_1(1+m_2)}b_1$ 이다. 이에  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}, m_2 = \frac{b_2}{a_2}, m_3 = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ 을 대입하여 정리하면

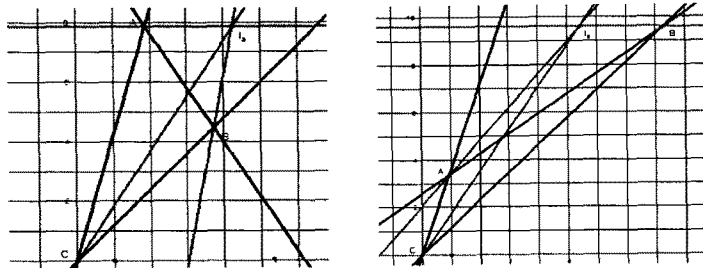
$A$ 의 방심  $I_a = I(\frac{a_2(a_1+b_1)}{a_2+b_2}, b_1)$ , 반지름의 길이  $r_a = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2+b_2}$ 이다.

(1)-a-ii).  $|m_3| < 1$ 인 경우

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{m_1}{1+m_1}(1+m_2)x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선은  $x = a_2$ 이다.

위 두 식을 연립하여  $x$ 로 나타낸 후  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $m_2 = \frac{b_2}{a_2}$ ,  $m_3 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ 을 대입하여 정리하면  $A$ 의 방심  $I_a = (a_2, \frac{b_1(a_2 + b_2)}{a_1 + b_1})$ , 반지름의 길이  $r_a = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 + b_1}$ 이다.

(1)-b  $|m_1|, |m_2|, |m_3| \geq 1$ 인 경우



<그림 20>

(1)-b-i).  $m_3 \geq 0$ 인 경우

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = b_1$ 이다.

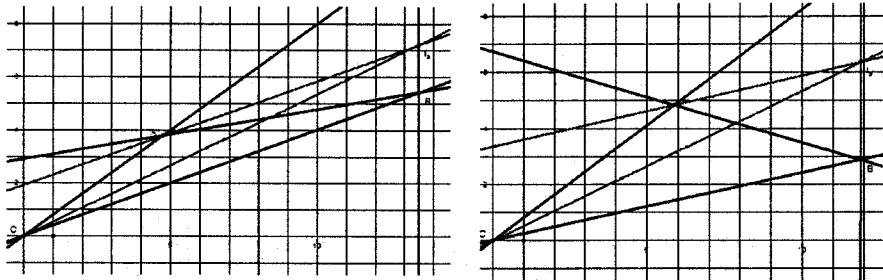
위 두 식을 연립하여  $x$ 로 나타낸 후  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $m_2 = \frac{b_2}{a_2}$ ,  $m_3 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ 을 대입하여 정리하면  $A$ 의 방심  $I_a = (\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2b_2}, b_1)$ , 반지름의 길이  $r_a = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{2b_2}$ 이다.

(1)-b-ii).  $m_3 < 0$ 인 경우

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}x$ 이고  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선은  $y = b_2$ 이다.

위 두 식을 연립하고  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $m_2 = \frac{b_2}{a_2}$ ,  $m_3 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ 을 대입하여 정리하면  $A$ 의 방심  $I_a = (\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2b_1}, b_2)$ , 반지름의 길이  $r_a = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{2b_1}$ 이다.

(1)-c.  $|m_1|, |m_2|, |m_3| < 1$ 인 경우



<그림 21>

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$ 의 각 이등분선은  $y = \frac{m_1 + m_2}{2}x$ 이고  $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$ 의 각 이등분선은  $x = a_2$ 이다.

위 두 식을 연립하여  $x$ 로 나타낸 후  $m_1 = \frac{b_1}{a_1}, m_2 = \frac{b_2}{a_2}, m_3 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$  을 대입하여 정리하면  $A$ 의 방심  $I_a = (a_2, \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2a_1})$ 이며, 반지름의 길이  $r_a = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{2a_1}$ 이다.

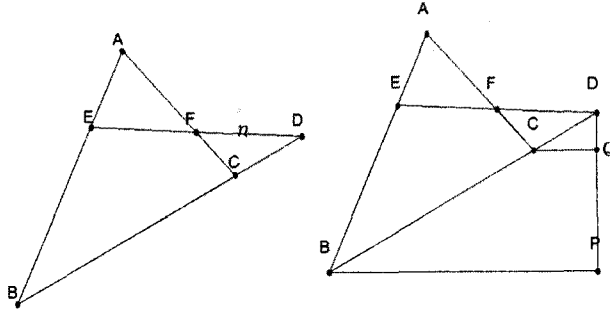
#### IV. 택시기하에서의 몇 가지 평면기하정리

택시거리와 유클리드 거리는 평면상에서 일치하지 않는다. 따라서 유클리드기하에서 성립하는 정리들이 택시기하에서 성립하지 않을 수 있음을 예상할 수 있다. 이런 관점에서 이 장에서는 유클리드기하에서 성립하는 평면기하의 정리(엄상섭(1976), Namba(2008)) 중 택시기하에서 성립하는 네 가지 정리(IV-1,2,3,4)와 그에 대한 증명 및 성립하지 않는 한 가지 정리(IV-5)와 그에 대한 반례의 구성에 대하여 알아본다. 특히 IV-1,2에서와 같이 택시기하에서 Menelaus 정리와 그 역이 성립함을 알 수 있다.

##### IV-1. 택시기하에서 Menelaus정리

$\triangle ABC$ 의 정점을 지나지 않는 선분  $n$ 과  $\triangle ABC$ 의 세 직선과의 교점을  $E, F, D$ 라 하면  $\frac{d_T(D, C)}{d_T(B, D)} \times \frac{d_T(F, A)}{d_T(C, F)} \times \frac{d_T(E, B)}{d_T(A, E)} = 1$ 이 성립한다.

(증명)



<그림 22>

유클리드에서의 Menelaus정리(엄상섭(1976))는  $\triangle ABC$ 의 정점을 지나지 않는 선분  $n$ 과  $\triangle ABC$ 의 세 직선과의 교점을  $E, F, D$  라 하면  $\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{CF}} \times \frac{\overline{EB}}{\overline{AE}} = 1$ 이 성립한다는 것이다.

한편 택시기하에서  $\triangle BDP \propto \triangle CDQ$  이므로  $\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CQ} + \overline{QD}}{\overline{BP} + \overline{DP}} = \frac{d_T(D, C)}{d_T(B, D)}$ 이다. ...(\*)

마찬가지로

$$\frac{d_T(F, A)}{d_T(C, F)} = \frac{\overline{FA}}{\overline{CF}}, \quad \frac{d_T(E, B)}{d_T(A, E)} = \frac{\overline{EB}}{\overline{AE}} \text{ 이므로 } \frac{d_T(D, C)}{d_T(B, D)} \times \frac{d_T(F, A)}{d_T(C, F)} \times \frac{d_T(E, B)}{d_T(A, E)} = 1$$

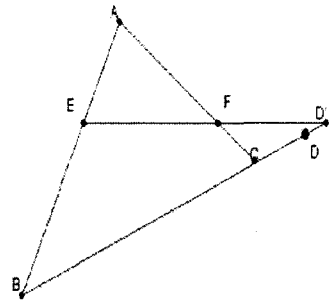
임을 알 수 있다.

IV-2. 택시기하에서 Menelaus 역정리

세 점  $E, F, D$ 가 각각 직선  $AB, AC, BC$ 위에 있고,

$$\frac{d_T(D, C)}{d_T(B, D)} \times \frac{d_T(F, A)}{d_T(C, F)} \times \frac{d_T(E, B)}{d_T(A, E)} = 1 \text{ 을 만족하면, 세 점}$$

$E, F, D$ 는 한 직선 위에 있다.



<그림 23>

(증명)

직선  $EF$ 와 직선  $BC$ 와의 교점을  $D'$ 이라 한다.

Menelaus정리에 의하여

$$\frac{d_T(D', C)}{d_T(B, D')} \times \frac{d_T(F, A)}{d_T(C, F)} \times \frac{d_T(E, B)}{d_T(A, E)} = 1 \text{ 이 성립한다.}$$

조건에서  $\frac{d_T(D, C)}{d_T(B, D)} \times \frac{d_T(F, A)}{d_T(C, F)} \times \frac{d_T(E, B)}{d_T(A, E)} = 1$ 이므로  $\frac{d_T(D, C)}{d_T(B, D)} = \frac{d_T(D', C)}{d_T(B, D')}$ 임을 알 수

있다.

(\*)에 의하여  $\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{d_T(D, C)}{d_T(B, D)} = \frac{d_T(D', C)}{d_T(B, D')} = \frac{\overline{D'C}}{\overline{BD'}}$  이므로  $D = D'$  이고, 따라서 세 점  $E, F, D$ 는 한 직선 위에 있다.

**IV-3. 택시기하에서의 Ceva의 정리**

$\triangle DBF$ 의 선위에 있지 않는 점  $G$ 와 각 꼭짓점을 이은 직선이  $\overline{DF}, \overline{FB}, \overline{DB}$  와 만나는 점을 각각  $E, A, C$ 라 하면

$$\frac{d_T(B, C)}{d_T(D, C)} \times \frac{d_T(A, F)}{d_T(A, B)} \times \frac{d_T(D, E)}{d_T(F, E)} = 1 \text{ 이다.}$$

(증명)

$\triangle BDA$ 와  $\overline{FC}$ 에서 Menelaus정리를 이용하면

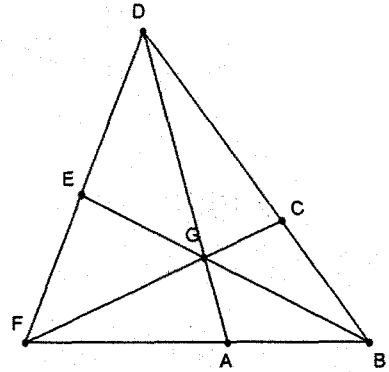
$$\frac{d_T(B, C)}{d_T(D, C)} \times \frac{d_T(D, G)}{d_T(G, A)} \times \frac{d_T(A, F)}{d_T(F, B)} = 1 \dots \textcircled{1}$$

$\triangle DFA$ 와  $\overline{EB}$ 에서 Menelaus정리를 이용하면

$$\frac{d_T(D, G)}{d_T(A, G)} \times \frac{d_T(A, B)}{d_T(F, B)} \times \frac{d_T(F, E)}{d_T(D, E)} = 1 \dots \textcircled{2}$$

①과 ②로부터

$$\frac{d_T(B, C)}{d_T(D, C)} \times \frac{d_T(A, F)}{d_T(A, B)} \times \frac{d_T(D, E)}{d_T(F, E)} = 1 \text{ 임을 알 수 있다.}$$



<그림 24>

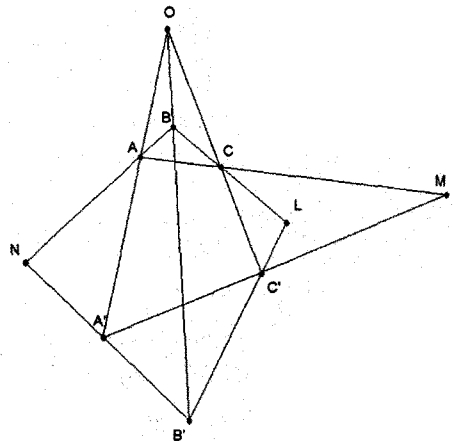
**IV-4. 택시기하에서의 Desargues정리**

택시거리가 도입된 동일평면상에 있는 두 삼각형  $ABC, A'B'C'$ 에서 직선  $AA', BB', CC'$  이 한 점  $O$ 에서 만날 때, 직선  $BC$ 와  $B'C'$ 의 교점을  $L, AC$ 와  $A'C'$ 의 교점을  $M, AB$ 와  $A'B'$ 의 교점을  $N$ 이라 하면  $L, M, N$ 은 일직선상에 있다.

(증명)

$\triangle OBC$ 와  $\overline{LB'}$ 에서 Menelaus정리를 이용하면

$$\frac{d_T(O, C)}{d_T(C, C')} \times \frac{d_T(C, L)}{d_T(L, B)} \times \frac{d_T(B, B')}{d_T(B', O)} = 1 \dots \textcircled{1}$$



<그림 25>



$\triangle OCA$ 와  $\overline{MC}$ 에서 Menelaus정리를 이용하면

$$\frac{d_T(O, C')}{d_T(C, C')} \times \frac{d_T(C, M)}{d_T(M, A)} \times \frac{d_T(A, A')}{d_T(O, C')} = 1 \dots \textcircled{2}$$

$\triangle OAB$ 와  $\overline{NA'}$ 에서 Menelaus정리를 이용하면

$$\frac{d_T(O, A')}{d_T(A, A')} \times \frac{d_T(A, N)}{d_T(N, B)} \times \frac{d_T(B, B')}{d_T(B', O)} = 1 \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③으로부터

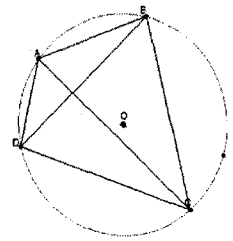
$$\frac{d_T(A, M)}{d_T(M, C)} \times \frac{d_T(C, L)}{d_T(L, B)} \times \frac{d_T(B, N)}{d_T(N, A)} = 1$$

따라서 Menelaus 역정리(IV-2)에 의하여 세 점  $M, L, N$ 이 한 직선 위에 있음을 알 수 있다.

**IV-5. 택시기하에서의 Ptolemy정리**

유클리드기하에서 Ptolemy정리(엄상섭(1976), Namba(2008))는 동일 원주 상에 있는 4개의 점  $A, B, C, D$ 에 대하여

$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AD} \times \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{DC}$ 가 성립하는 것이다. 그러나 택시기하에서는 아래와 같은 반례가 존재하므로 Ptolemy정리가 성립하지 않는다. 그러나 택시기하에서는 성립하지 않음을 다음의 반례를 통하여 알 수 있다.



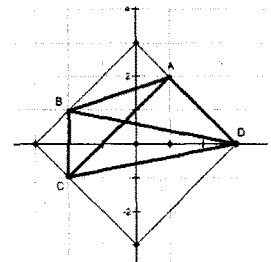
<그림 26>

**(반례)**

<그림 27>과 같이 반지름이 3인 택시원의 원주 상에서 점  $A, B, C, D$ 를 잡자.

이때,  $\overline{AC} \times \overline{BD} = 6 \times 6 = 36$ 이고

$\overline{AD} \times \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{DC} = 4 \times 2 + 4 \times 6 = 32$ 이므로 Ptolemy 정리가 성립하지 않는다.



<그림 27>

**V. 택시기하에서의 회전변환**

유클리드 기하에서는  $\theta$ 만큼의 회전변환에 대응되는 행렬이  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 임이 알려져 있다. 장은정(2006)은 택시평면에서 회전변환이 등거리 변환이 되기 위한  $\theta$ 의 범위에 대하여 발표하였다. 본 연구에서는 택시기하에서의 회전변환과 대응되는 행렬을 알아보기 위하여 제1사분면에서의 점  $P$ 가  $\alpha$ 만큼 회전 하여 점  $Q$ 가 될 때, 대응되는 행렬을 점의 위치와 회전각의 분류에 의하여 고찰하였다.

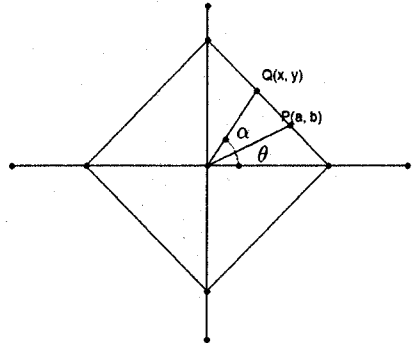
V-1.  $x > 0, y > 0$  인 경우

$Q$ 가 제 1사분면에 있을 경우, 택시기하에서 각의 정의에 의해 호의 길이  $l_T$ 는  $l_T = r\theta$ 이므로,  $r(\alpha + \theta) = 2y$ 이고,  $r\theta = 2b$ 임을 알 수 있다. 따라서  $r\alpha = 2(y - b)$ 이므로  $y = \frac{r\alpha}{2} + b = \frac{\alpha}{2}a + \frac{\alpha + 2}{2}b$ 이다.

또한,  $r = a + b = x + y$ 이므로

$$x = r - y = \frac{2 - \alpha}{2}a - \frac{\alpha}{2}b \text{ 이다. 따라서}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 - \alpha}{2} & \frac{-\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha + 2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & 2 - \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$



&lt;그림 28&gt;

V-2.  $x < 0, y > 0$  인 경우

$Q$ 가 제 2사분면에 있을 경우, 택시기하에서 각의 정의에 의해 호의 길이가  $l_T$ 는  $l_T = r\theta$ 이므로,  $r(\alpha + \theta) = 2r - 2x$ 이고,  $r\theta = 2b$ 임을 알 수 있다. 따라서  $r\alpha = 2r - 2x - 2b$ 이므로

$$x = \frac{2 - \alpha}{2}r - b = \frac{2 - \alpha}{2}a - \frac{\alpha}{2}b \text{ 이다.}$$

또한,  $r = -x + y = a + b$ 이므로

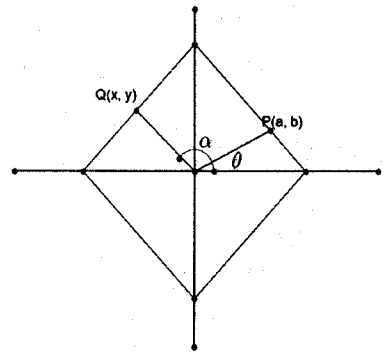
$$y = x + a + b = \frac{4 - \alpha}{2}a + \frac{2 - \alpha}{2}b \text{ 이다.}$$

이때,  $0 \leq \alpha < 2$ 와  $2 \leq \alpha < 4$ 일 때로 나누어 생각하자.

(1)  $0 \leq \alpha < 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 - \alpha}{2} & \frac{-\alpha}{2} \\ \frac{4 - \alpha}{2} & \frac{2 - \alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 2 - \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(2)  $2 \leq \alpha < 4$



&lt;그림 29&gt;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\alpha}{2} & \frac{-\alpha}{2} \\ \frac{4-\alpha}{2} & \frac{2-\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -2+\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{이다.}$$

V-3.  $x < 0, y < 0$  인 경우

Q가 제 3사분면에 있을 경우, 택시기하에서 각의 정의에 의해 호의길이  $l_T$  는  $l_T = r\theta_T$  이므로,

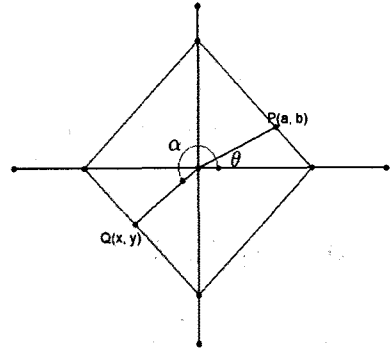
$r(\alpha + \theta) = 4r - 2y$ 이고,  $r\theta = 2b$ 임을 알 수 있다. 따라서  $r\alpha = 4r - 2y - 2b$ 이므로

$$y = \frac{4-\alpha}{2}r - b = \frac{4-\alpha}{2}a + \frac{2-\alpha}{2}b \text{이다.}$$

또한,  $r = -x - y = a + b$ 이므로

$$x = -y - a - b = \frac{\alpha-6}{2}a + \frac{\alpha-4}{2}b \text{이다. } 2 \leq \alpha < 4 \text{와}$$

$4 \leq \alpha < 6$ 일 때로 나누어서 생각하자.



<그림 30>

(1)  $2 \leq \alpha < 4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-6}{2} & \frac{\alpha-4}{2} \\ \frac{4-\alpha}{2} & \frac{2-\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(2)  $4 \leq \alpha < 6$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-6}{2} & \frac{\alpha-4}{2} \\ \frac{4-\alpha}{2} & \frac{2-\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{이다.}$$

V-4.  $x > 0, y < 0$  인 경우

Q가 제 4사분면에 있을 경우, 택시기하에서 각의 정의에 의해 호의길이  $l_T$ 는  $l_T = r\theta_T$  이므로,  $r(\alpha + \theta) = 6r + 2x$ 이고,  $r\theta = 2b$ 임을 알 수 있다. 따라서  $r\alpha = 6r + 2x - 2b$ 이므로,

$$x = \frac{\alpha-6}{2}r + b = \frac{\alpha-6}{2}a + \frac{\alpha-4}{2}b \text{이다.}$$

또한,  $r = x - y = a + b$ 이므로  $y = x - a - b = \frac{\alpha-8}{2}a + \frac{\alpha-6}{2}b$ 이다.  $4 \leq \alpha < 6$ 와

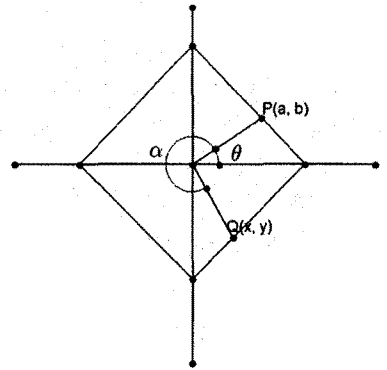
$6 < \alpha < 8$  일 때로 나누어서 생각하자.

(1)  $4 \leq \alpha < 6$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-6}{2} & \frac{\alpha-4}{2} \\ \frac{\alpha-8}{2} & \frac{\alpha-6}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha-2 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(2)  $6 < \alpha < 8$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-6}{2} & \frac{\alpha-4}{2} \\ \frac{\alpha-8}{2} & \frac{\alpha-6}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha+2 \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{이다.}$$



<그림 31>

### VI. 택시기하에서의 등주정리

유클리드 평면기하에서의 등주정리에 비해 택시거리를 가지는 평면에서 같은 둘레의 길이를 가지는 도형 중에서 가장 큰 넓이를 가지는 도형은  $x$  축과  $y$  축에 평행한 변을 가지는 정사각형이됨을 다음과 같이 증명할 수 있다.

(증명)

일정한 둘레를 가지는 임의의 다각형의 넓이가 정사각형의 넓이보다 항상 작음을 증명함으로써 택시기하에서의 등주정리를 증명할 것이다.

$n$ 개의 꼭짓점을 가지는 다각형을 생각해보자. (택시기하학에서 곡선의 형태는 존재하지 않으므로 다루지 않는다.)  $n$ 개의 꼭짓점을  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 이라 하자. 여기서  $x$  원소의 집합을  $P$ ,  $y$  원소의 집합을  $Q$ 라고 하자.

이 때,  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $Q = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  로 표현이 가능하고 유한 집합이다.

집합  $P$ ,  $Q$ 는 유한 집합이기 때문에 원소 중에서 최댓값과 최솟값을 가지며 이 때, 집합  $P$ 에서의 원소의 최솟값을  $x_{\min}$ , 최댓값을  $x_{\max}$ 이라고 하고, 집합  $Q$ 에서의 원소의 최솟값을  $y_{\min}$ , 최댓값을  $y_{\max}$ 이라 하자. 그러면 각각 네 개의 점  $(x_{\min}, y_{\min}), (x_{\min}, y_{\max}), (x_{\max}, y_{\max}), (x_{\max}, y_{\min})$ 은 각각의 변이  $x$  축과 평행 혹은 수직한 직사각형의 꼭짓점을 이루게 된다. 따라서

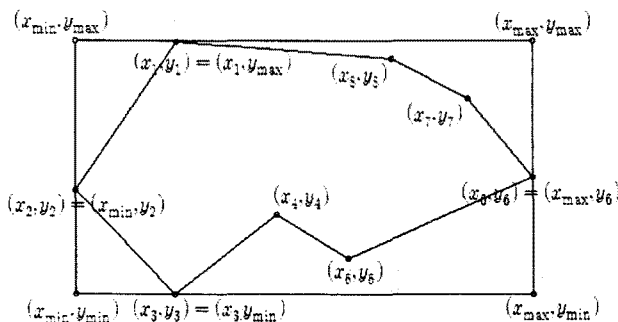
위의 네 점이 이루는 직사각형  $T$ 의 넓이는 다각형의 넓이보다 크거나 같다. .... ①

또한 직사각형의 둘레의 길이는 다각형의 둘레의 길이 보다 짧거나 같다. .... ②

왜냐하면 직사각형의 둘레의 길이 =  $2 \times [(x_{\max} - x_{\min}) + (y_{\max} - y_{\min})]$ 이고 다각형의 둘레의

길이 =  $\sum_{i=1}^{n-1} (|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i|) + |x_n - x_1| + |y_n - y_1|$ 이므로 다각형의 둘레의 길이를 전개해

주변 직사각형의 둘레의 길이보다 크을 알 수 있다.



<그림 32> n=8일 경우의 예시

②에 의해서 다각형의 둘레의 길이  $2l$ 은 위에서 말한 직사각형 T의 둘레의 길이  $2l'$ 보다 크거나 같게 된다. 또한 직사각형의  $x$ 축과 평행한 변의 길이를  $t$ 라고 놓으면 직사각형 T의 넓이는  $t(l'-t)$ 이다. (단, 이때  $t$ 는  $l' > t > 0$ )

한편, ①에 의해서 직사각형 T의 넓이는 다각형의 넓이  $S$ 보다 크다.

그리고  $t(l'-t)$ 는  $\frac{l'^2}{4}$  보다는 작거나 같다.

왜냐하면  $\frac{l'^2}{4} - t(l'-t) = (\frac{l'}{2} - t)^2 \geq 0$ 이고, 따라서  $\frac{l'^2}{4} \geq t(l'-t)$ 이기 때문이다.

따라서  $\frac{l'^2}{4} \geq \frac{l'^2}{4} \geq t(l'-t) \geq S$ 이다.

$\frac{l'^2}{4}$ 은 둘레의 길이가  $2l$ 인 정사각형의 넓이이고  $S$ 는 둘레의 길이가  $2l$ 인 임의의 다각형의 넓이이므로 길이가 일정할 때 가장 넓이가 넓은 도형은 정사각형임을 알 수 있다.

그러나 둘레의 길이가  $2l$ 이고 넓이가  $\frac{l'^2}{4}$ 인 도형은 정사각형밖에 없다. 이 사실을 증명하기 위하여 둘레의 길이가  $2l$ 이고 정사각형이 아닌 다각형을 생각해보자.

만약 다각형을 둘러싸는 직사각형과 다각형 사이에 남는 부분이 있으면 다각형의 넓이  $S$ 는  $t(l'-t) > S$ 이고  $\frac{l'^2}{4} \geq \frac{l'^2}{4} \geq t(l'-t)$ 이므로  $\frac{l'^2}{4} > S$ 가 된다.

만약 다각형을 둘러싸는 직사각형과 다각형 사이에 남는 부분이 없다면 이 다각형은 직사각형이 되어야 한다. 그러므로 다각형의 넓이  $t(l-t)$ 가 되는데 이 다각형은 정사각형이 아니기 때문에  $t$ 의 범위는  $l > t > 0$ ,  $t \neq \frac{l}{2}$ 이다. '산술평균  $\geq$  기하평균'이므로  $\frac{t+(l-t)}{2} \geq \sqrt{t(l-t)}$  이고, 양변을

제공하면  $\frac{l^2}{4} \geq t(l-t)$ 인데  $t \neq \frac{l}{2}$ 이므로 위 식에서 등호가 성립하지 않는다. 그래서  $\frac{l^2}{4} > t(l-t) = S$ 이다.

그러므로 위의 두 가지 경우를 통해 둘레의 길이가  $2l$ 인 정사각형이 아닌 다각형의 넓이  $S$ 는  $\frac{l^2}{4}$ 보다 항상 작음을 알 수 있다.

### VII. 택시기하에서의 최소의 문제

이 장에서는 여러 가지 경우에 대하여 최소의 문제를 생각해 본다. 특히 두 번째 경우인  $n$ 개의 점으로부터 거리의 합이 최소가 되는 영역에 대해서는 조미애(2009)의 선행 연구가 있지만, 본 연구에서는 증명 방법을 달리하고 보다 더 다양한 경우에 대하여 고찰하였다. 특히 VII-3,4,5에서는 직선의 기울기에 의한 분류와 그 경우 최단 또는 최소의 문제를 생각하였다.

#### VII-1. 점과 점사이의 최단거리

유클리드 기하학에서 점과 점사이의 최단거리는 두 점을 잇는 선분의 길이를 의미한다. 또한 두 점사이의 거리를 두 점 사이의 최단거리로 정의한다. 그러나 택시기하에서는 두 점  $A(x_1, x_2), B(y_1, y_2)$  사이의 거리는  $d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 로 정의하기 때문에 이 정의가 두 점  $A, B$  사이의 거리, 즉 최단거리가 된다.

#### VII-2. $n$ 개의 점으로부터 거리의 합이 최소가 되는 영역

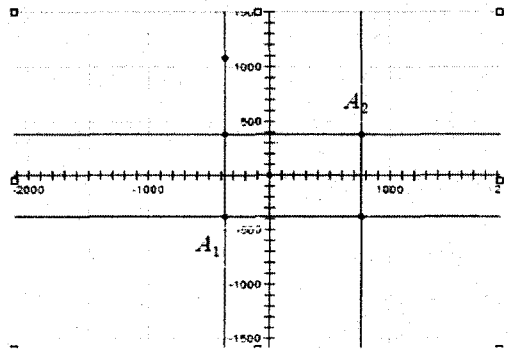
$S_T = d_T(A_1, P) + d_T(A_2, P) + \dots + d_T(A_n, P)$ 가 최소가 되는 점  $P$ 를 찾아보자.

##### (1) $n = 2$ 인 경우

$d_T(A_1, P) + d_T(A_2, P)$ 가 최소가 되는 영역은 <그림 33>의 음영 부분과 같다.

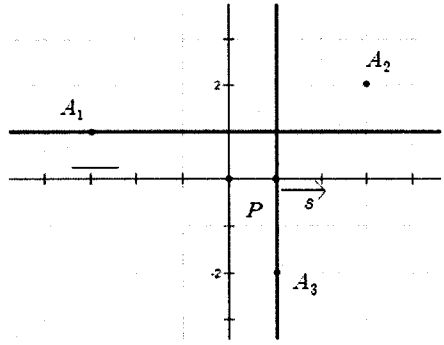
##### (2) $n = 3$ 인 경우

<그림34>의 세 개의 점을 생각하자. 먼저  $A_1, A_2, A_3$ 의  $x$ 좌표를 작은 값부터 셋을 때 가운데에 위치한  $A_3$ 를 지나는  $y$ 축에 평행한 직선  $L$ 을 생각하자. 이 위에 만약  $P$ 가 있지



<그림 33>

않다면 이제  $P$ 를 일반성을 잃지 않고 직선  $L$ 위에서 오른쪽으로  $s$ 만큼 이동시켜 보자. 그러면  $d_T(A_2, P)$ 는  $s$ 만큼 감소하지만,  $d_T(A_1, P), d_T(A_3, P)$ 는 각각  $s$ 만큼 씩 증가하게 된다. 따라서  $S_T$ 는  $s$ 만큼 증가하는 꼴이 되므로  $P$ 가 직선  $L$ 위에 있는 경우가 아니라면 최소가 될 수 없다. 마찬가지로  $y$ 좌표를 작은 값부터 쫓을 때 가운데에 있는  $A_1$ 을 지나는  $x$ 축에 평행한 직선위에 점  $P$ 가 있어야만 한다. 따라서 두 직선의 교점이 우리가 구하고자 하는  $P$ 의 좌표가 된다.

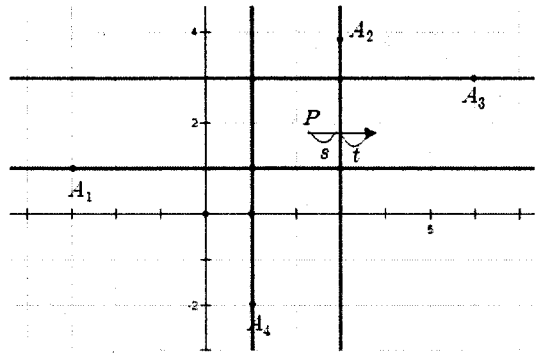


<그림 34>

위에서 설명한 내용은 특수한 경우이며 일반적으로 몇 개의 점들이 같은 직선위에 있는 경우들에 대해서는 (4),(5)에서 생각한다.

(3)  $n = 4$ 인 경우

$n = 4$ 일 경우에도 (2)와 같은 원리를 적용하기 위하여, <그림 35>에서  $x$ 좌표를 작은 값부터 쫓을 때 중앙의 두 점  $A_4, A_2$ 를 생각해 보자. 그리고  $A_4$ 에서  $y$ 축에 평행한 직선과  $A_2$ 에서  $y$ 축에 평행한 직선이 이루는 무한 직사각형 영역을 생각한다.  $P$ 가 그 내부에 있지 않다면, 그 내부에서는  $x$ 좌표로  $s(s > 0)$ 만큼 벗어나고, 그 영역 밖으로  $t(t > 0)$ 만큼 벗어났다고 하자.  $d_T(A_2, P)$ 는



<그림 35>

$+(t - s)$ ,  $d_T(A_1, P), d_T(A_4, P)$ 는 각각  $+(s + t)$ ,  $d_T(A_3, P)$ 는  $-(s + t)$ 만큼 변한다. 따라서  $S_T$ 는  $2t$ 만큼 증가하게 되므로  $P$ 는 이 무한 직사각형 영역에 존재할 수밖에 없다. 마찬가지로  $x$ 축에 평행한 무한 직사각형 영역에 대해서도 생각하면  $P$ 는 <그림 35>의 음영 부분에 있게 된다.

(4)  $n$ 이 홀수일 경우

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 중에서  $x$ 좌표가 작은 값부터 세어서 크기순으로  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이라 하자(같은  $x$ 좌표를 갖는 점들은  $y$ 좌표의 값이 가장 큰 점부터 세기로 하자.) 이제  $X_{\frac{n+1}{2}}$ 을 포함하는  $y$ 축에 평행한 직선  $L_y$ 를 생각하면  $L_y$ 위에  $P$ 가 존재한다.

(증명)

다음의 두 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

i)  $L_y$  위에  $X_{\frac{n+1}{2}}$  만 존재하는 경우

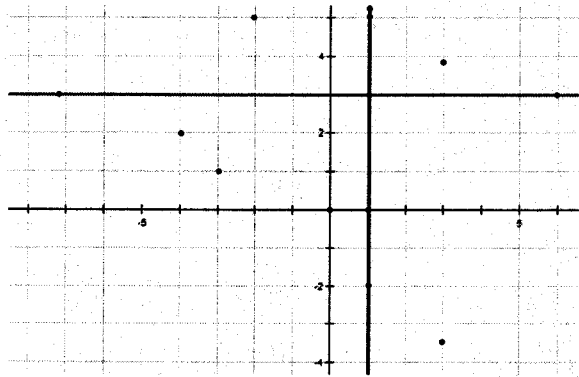
$L_y$ 를 기준으로 왼쪽과 오른쪽에 있는 점들의 개수는 같다. 따라서  $L_y$  위에 점  $P$ 를 이동시키면 항상 택시거리가 증가하게 되므로  $P$ 는  $L_y$  위에 있다.

ii)  $L_y$  위에  $X_{\frac{n+1}{2}}$  이외의 점들이 있을 때

$L_y$  위의 점  $P$ 가 오른쪽으로 이동할 때를 생각해보자.  $L_y$  위에  $X_{\frac{n+1}{2}}$  을 기준으로 위의 점들과  $L_y$ 의 왼쪽의 점들의 개수를 합한 개수와  $X_{\frac{n+1}{2}}$  기준으로 아래의 점들과  $L_y$ 의 오른쪽에 있는 개수의 합은 같다. 따라서  $P$ 가 오른쪽으로 이동하는 경우에 택시거리가 증가하게 된다.

같은 방법으로 생각하면  $P$ 가 왼쪽으로 이동하는 경우에도 택시거리가 증가하게 되므로  $P$ 는  $L_y$  위에 있다. (증명끝)

위의 증명방법과 마찬가지로  $y$ 축의 음의 방향부터 세어서  $Y_{\frac{n+1}{2}}$ 를 포함하는  $x$ 축에 평행한 직선을 설정하여 그 직선을  $L_x$ 라 하면  $L_x$  위에  $P$ 가 있게 되므로 결국  $L_x$ 와  $L_y$ 의 교점은  $P$ 의 자취가 된다.



<그림 36>  $n$ 이 홀수 일 때의 예시

(5)  $n$ 이 짝수인 경우

$X_{\frac{n}{2}}, X_{\frac{n}{2}+1}$  을 각각 지나는  $y$ 축에 평행한 직선  $L_{y_1}, L_{y_2}$ 을 생각하면  $P$ 는  $L_{y_1}, L_{y_2}$ 를 포함하는 무한 직사각형 영역  $D$  위에 있다.

(증명)

i)  $L_{y_1} \neq L_{y_2}$ 인 경우

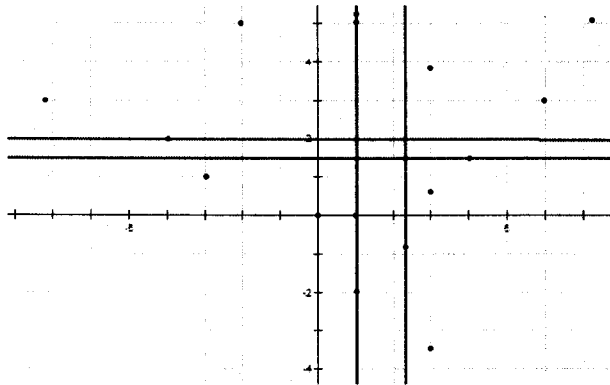


$L_{y_1} \neq L_{y_2}$  이므로  $X_{\frac{n}{2}}, X_{\frac{n+1}{2}}$  은 같은 직선 위에 있지 않다. 따라서  $L_{y_1}$  위에 있는 점들 중  $X_{\frac{n}{2}}$  는 가장 아래에 있고,  $L_{y_2}$  위에 있는 점들 중  $X_{\frac{n+1}{2}}$  는 가장 위에 있다. 따라서  $L_{y_1}$  를 포함하여 왼쪽에 있는 점의 개수와  $L_{y_2}$  를 포함하여 오른쪽에 있는 점의 개수는 같다. 따라서  $L_{y_1}, L_{y_2}$  사이의 영역에서  $P$  가 벗어난다면 항상 택시거리가 증가하므로  $P$  는  $L_{y_1}, L_{y_2}$  사이의 영역에 있다.

ii)  $L_{y_1} = L_{y_2}$  인 경우

$X_{\frac{n}{2}}, X_{\frac{n+1}{2}}$  는 같은 직선 위에 있다. 따라서  $L_{y_1}$  의  $X_{\frac{n}{2}}$  기준으로 위쪽에 있는 점과  $L_{y_1}$  의 왼쪽에 있는 점의 개수의 합과  $L_{y_2}$  의  $X_{\frac{n+1}{2}}$  기준으로 아래쪽에 있는 점과  $L_{y_2}$  의 오른쪽에 있는 점의 개수의 합은 같다. 따라서 직선  $L_{y_1} = L_{y_2}$  에서 오른쪽으로 이동하거나 왼쪽으로 이동하여도 택시거리가 증가하게 되므로  $P$  는 직선  $L_{y_1} = L_{y_2}$  위에 있다.(증명끝)

위의 증명방법과 마찬가지로  $y$  좌표의 값이 작은 점부터 세었을 때  $Y_{\frac{n}{2}}, Y_{\frac{n+1}{2}}$  를 포함하는 직선  $L_{x_1}$  과  $L_{x_2}$  를 설정하면,  $P$  는  $L_{x_1}$  과  $L_{x_2}$  를 포함하는 무한 직사각형 영역  $R$  위에 놓여있다. 따라서  $P$  의 자취는  $D \cap R$  이 된다.



<그림 37>  $n$ 이 짝수 일 때의 예시

### VII-3. 점과 직선사이의 최단거리

유클리드 기하에서는 점과 직선사이의 최단거리를 점에서 직선에 내린 수선의 길이로 정의한다. 그러나 택시 기하에서는 직선의 기울기에 따라 정의가 달라진다. 이제 임의의 직선의 기울기를  $m$  이라 하자.

(1)  $|m| < 1$  인 경우

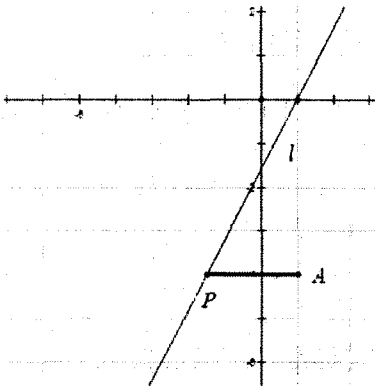
A에서 직선  $l$ 에 이르는 최소 거리는 A에서  $y$ 축에 평행한 직선이  $l$ 과 만나는 점  $P$ 까지의 거리이다.

(증명)

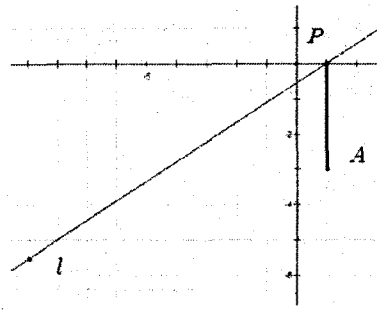
<그림 39>의 A에서  $y$ 축에 평행한 직선이  $l$ 과 만나는 점을  $P$ 라 하자.  $P$ 가  $x$ 축의 음의방향으로  $s$ 만큼 이동하면,  $y$ 좌표는  $|m|s$ 만큼 감소한다. 따라서 전체 택시 거리는  $(1 - |m|)s$ 만큼 증가하게 된다. 따라서  $P$ 와 다른 모든 점에 대해서는 택시거리가 증가하게 되므로  $P$ 까지의 거리가 최소거리가 된다.

(2)  $|m| > 1$  인 경우

<그림 38>의 A에서 직선  $l$ 에 이르는 최소 거리는 A에서  $x$ 축에 평행한 직선이  $l$ 과 만나는 점  $P$ 까지의 거리이다.



<그림 38>



<그림 39>

이제  $l$ 과 점  $A$ 의 택시 최단 거리를  $H_T(A, l)$ 로 정의한다.

Ⅶ-4. 삼각형  $ABC$ 의 내부(경계포함)에서  $H_T(P, \overrightarrow{AB}) + H_T(P, \overrightarrow{BC}) + H_T(P, \overrightarrow{CA})$ 가 최소가 되는 점

직선  $AB, BC, CA$ 의 기울기의 절댓값을 각각  $m_1, m_2, m_3$ 라 하면 다음과 같은 4가지 경우로 나눌 수 있다.

(1)  $m_1, m_2, m_3 > 1$  인 경우

<그림 40>에서  $m_1, m_2, m_3 > 1$ 이므로 내부의 점  $P$ 에서 직선  $AB, BC, CA$ 까지의 거리는 모두  $x$ 축에 평행하다. 따라서 <그림 40>과 같이 생각해 보면 직선  $l$ 위에 점  $P$ 가 있고  $P = C$ 일 때

가 최소가 된다.

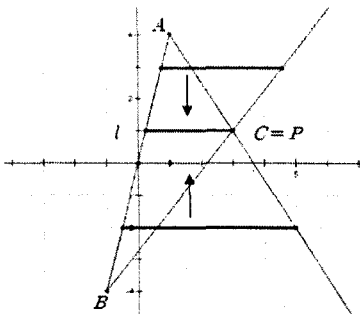
(2)  $m_1, m_3 > 1, m_2 < 1$  인 경우

먼저  $P$ 의  $y$ 좌표를 고정시킨 상태에서 생각해 보자. <그림 41>의  $P$ 에서 직선  $AB, CA$ 까지의 거리는  $P$ 에서  $x$ 축에 평행한 직선이고 또한 직선  $BC$ 까지의 거리는  $P$ 에서  $y$ 축에 평행한 직선이므로 <그림 41>과 같이 그리면  $P$ 가 오른쪽으로 이동할수록 작아진다. 따라서  $P$ 의  $y$ 좌표가 고정되어 있을 때  $P$ 는 선분  $AC$ 위에 있을 때가 최소가 된다.

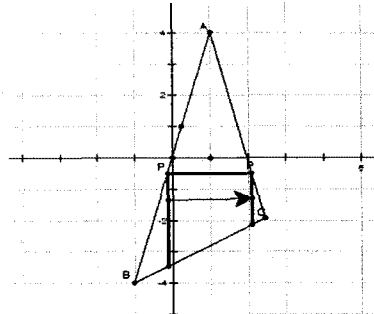
두 번째로  $P$ 가 선분  $AC$ 위에 있는 상태에서  $x$ 좌표를 고정하여 생각해 보자. 직선  $AB$ 의 방정식을  $y = m_1x + n_1$ , 직선  $BC$ 의 방정식  $y = m_2x + n_2$ , 직선  $CA$ 의 방정식을  $y = m_3x + n_3$ 라 하자. 또한  $AC$ 위의 점  $P$ 의 좌표를  $(\alpha, \beta)$ 라 하면

$$\begin{aligned} d_T(P, \overleftrightarrow{AB}) + d_T(P, \overleftrightarrow{BC}) &= \alpha - \frac{m_3\alpha + n_3 - n_1}{m_1} + m_3\alpha + n_3 - m_2\alpha - n_2 \\ &= \alpha(1 - \frac{m_3}{m_1} + m_3 + m_2) + \frac{n_1 - n_3}{m_1} + n_3 - n_2 \end{aligned}$$

따라서  $1 - \frac{m_3}{m_1} + m_3 - m_2 > 0$  인 경우  $\alpha = A$ ,  $1 - \frac{m_3}{m_1} + m_3 - m_2 < 0$  인 경우  $\alpha = C$ 가 된다.



<그림 40>



<그림 41>

(3)  $m_1, m_3 < 1, m_2 > 1$  인 경우

<그림 42>에서  $P$ 의  $x$ 좌표를 고정시킨 상태에서 생각해 보자.  $P$ 에서 직선  $BC$ 까지의 거리는 위로 갈수록 감소하므로  $P$ 는 선분  $AB$ 에 위치하게 된다.

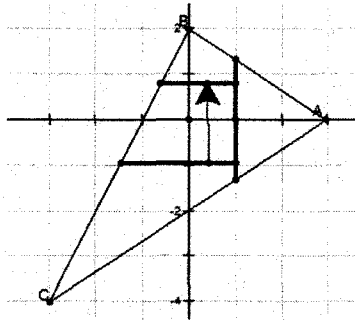
두 번째로  $P$ 의  $y$ 좌표를 고정시킨 상태에서 생각해 보자. 직선  $AB$ 의 방정식을  $y = m_1x + n_1$ , 직선  $BC$ 의 방정식  $y = m_2x + n_2$ , 직선  $CA$ 의 방정식을  $y = m_3x + n_3$ 라 하자. 또한  $AB$ 위의 점  $P$ 의 좌표를  $(\alpha, \beta)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 d_T(P, \overrightarrow{BC}) + d_T(P, \overleftarrow{CA}) &= \alpha - \frac{m_1\alpha + n_1 - n_2}{m_2} + m_1\alpha + n_1 - m_3\alpha - n_3 \\
 &= (1 - \frac{m_1}{m_2} + m_1 - m_3)\alpha + \frac{n_2 - n_1}{m_2} + n_1 - n_3
 \end{aligned}$$

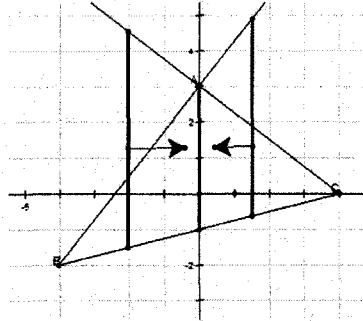
따라서  $(1 - \frac{m_1}{m_2} + m_1 - m_3) < 0$ 인 경우  $\alpha = B$ ,  $(1 - \frac{m_1}{m_2} + m_1 - m_3) > 0$ 인 경우  $\alpha = A$ 가 된다.

(4)  $m_1, m_2, m_3 < 1$ 인 경우

<그림 43>을 보면  $P$ 에서의 거리는 화살표의 방향으로 변한다. 따라서  $P$ 는  $A$  위에 있을 때가 최소가 된다.



<그림 42>

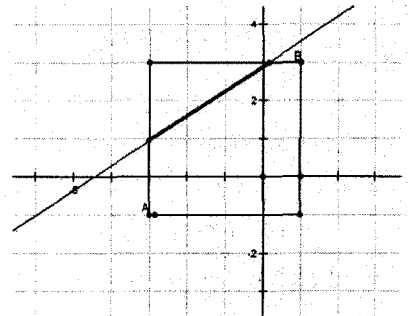


<그림 43>

VII-5. 평면위에 고정된 두 점  $A, B$ 와 직선  $l$  위의 임의의 점  $P$ 에 대해서  $d_T(A, P) + d_T(B, P)$ 가 최소가 되는 점

(1)  $A, B$ 를 꼭짓점으로 하는 택시 직사각형 영역과  $l$ 이 만나는 경우

VII-2의 (1)에서 보면  $n = 2$ 일 때  $S_T$ 가 최소가 되는 영역은 직사각형 내부의 영역이다. 따라서 직사각형 내부와 직선  $l$ 이 만나는 영역이  $d_T(A, P) + d_T(B, P)$ 가 최소가 되는 영역이 된다.



<그림 44>

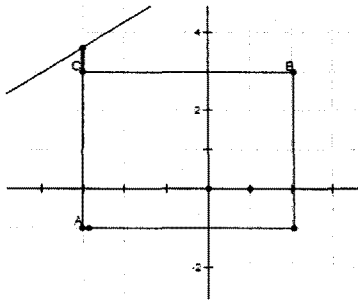
(2)  $A, B$ 를 꼭짓점으로 하는 택시 직사각형 영역과  $l$ 이 만나지 않는 경우 직선  $l$ 의 기울기를  $m$ 이라 하자.

(2)-a.  $|m| < 1$  인 경우

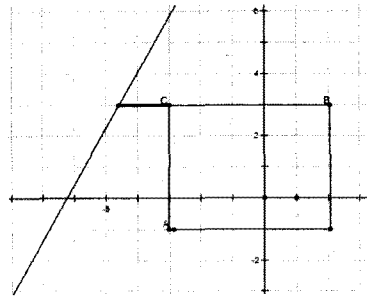
$A, B$ 를 포함하는 직사각형에서  $l$ 까지의 최단거리는 <그림 45>의 꼭짓점  $C$ 에서  $y$ 축에 평행한 직선이  $l$ 과 만나는 점이 된다.

(2)-b.  $|m| > 1$  인 경우

(2)-a와는 반대로 <그림 46>을 보면  $C$ 에서  $x$ 축에 평행한 직선이  $l$ 과 만나는 점이  $P$ 가 된다.



<그림 45>



<그림 46>

## Ⅶ. 결론

택시기하는 유클리드 거리를 이용한 유클리드 기하에 비해 평면상에서 실제로 이동 할 수 있는 경로를 따라 정의되는 택시거리를 이용한 비 유클리드 기하이다. 따라서 평면상을 이동하는 문제에 대해서는 유클리드 기하보다 실용적이라 할 수 있으며, 생활 속에서 일어 날 수 있는 여러 문제에 대한 최적의 조건을 제시 할 수 있다. 택시기하는 정의를 정확히 이해하면 내용적으로 접근하기 크게 어렵지 않지만 창의적인 발상과 논리적 접근이 필요하고, 동시에 다양한 사고를 할 수 있다는 점과 우리가 잘 알고 있으며 익숙한 유클리드 기하와의 비교연구 등이 가능하다는 점에서 영재교육 또는 R&E의 주제로서도 좋은 역할을 할 수 있을 것이다. 실제로 기본적인 개념의 교육에 의해 학생들은 단기간에 기초적인 연구단계에 진입 할 수 있었으며, 택시기하의 정확한 개념파악과 논리적이고 창의적인 접근에 의하여 기존의 결과를 확장 또는 일반화 하였다(예를 들어 직선의 기울기에 의한 분류에 의해 각등분선과 내심, 외심, 최소, 최단의 문제, 회전변환에 대한 연구결과 등). 또한 선행연구결과가 되지 않은 새로운 결과(택시기하에서의 평면기하문제, 등주장리 등)를 도출하기도 하였다. 이는 유클리드 기하적인 사고에서 벗어나 새로운 거리개념이 도입된 평면에서 창의적인 연구방법과 논리적인 접근을 통하여 얻어진 결과라는 점에서 창의성 개발과 심화학습이라는 영재교육의 취지 및 연구단계를 이해하고 실제로 실행해보는 R&E의 취지와도 부합하는 좋은 예가 될 것으로 기대한다.

본 연구를 통하여 여러 택시평면기하의 문제들을 해결하였으며 유클리드 기하에서 성립하는 기하가 어느 정도 택시기하에서 성립되는지를 조사하였다. 첫째로, 유클리드기하에서의 각 이등분선과는

다른 정의를 이용하여 택시기하에서의 각 이등분선을 직선의 방정식으로 나타내고 이를 이용해 삼각형의 각 변의 기울기에 따라 달라지는 내심과 방심의 좌표를 구하였으며(제III장), 둘째로, 제 IV장에서 유클리드기하에서 성립하는 여러 정리들 중 택시기하에서도 성립하는 정리들(Menelaus 정리, Ceva정리, Desargues정리)을 알아보았고, 성립하지 않는 정리(Ptolemy정리)에 대한 반례도 구성하였다. 셋째로, 택시기하에서의 회전변환과 이 변환에 대응되는 행렬을 구하여 각의 범위에 따라 다르게 나타내었고(제V장), 이를 통해 유클리드 기하와의 차이점을 고찰하였다. 넷째로, 제 VI장에서 택시기하에서의 등주정리에 관해 정리해보고 유클리드 기하에서의 등주정리와의 차이점을 비교해보았다. 마지막으로 택시기하에서의 최적화의 일환으로 최소와 최단의 문제들에 대한 해법을 제시하였다.(제 VII장). 이는 실제로 도시계획이 잘된 도시에서 여러 상황에 대한 최적의 문제에 대한 해법이 될 수 있으므로 그 활용도 의미 있다고 할 수 있을 것이다. 또한 유클리드 평면기하에서의 접근 방식과 선형연구와는 다른 방법으로 택시기하에서의 결과를 확장하고 새로운 결과를 얻어냄으로서 발상의 전환과 새로운 기하에서의 연구방법도 터득하게 되었으며, 이들 연구방법과 접근방법은 택시기하에서의 다른 기하학적 성질의 파악을 위한 연구에도 활용할 수 있다는 점에서 그 의미가 있을 것이다.

**Acknowledgment.** 저자들은 본 논문에 대해 귀중한 논평과 제시를 해주신 referee 께 감사의 뜻을 표합니다.

## 참 고 문 헌

- 김경동 · 김희식 (2004). 택시기하학(비유클리드 기하학에서의 모험), 서울: 경문사.
- 문숙미 (2007). 택시기하에서의 택시삼각함수, 제주대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 박순용 (2006). Taxicab 평면에서의 삼각형의 오심, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 엄상섭 (1976). 일반기하학, 교학사.
- 원대운 (1999). Taxicab 기하학에 관한 연구, 성균관대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 장은정 (2006). 택시켄평면에서의 등거리변환, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 조미애 (2009). 택시켄 평면에서 유한개의 점으로부터 거리의 합이 최소가 되는 영역과 삼중초점 타원 그래프, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- T.Nanba (2008). 평면도형의 기하학(Japanese), 현대수학사, Kyoto.
- E.F.Krause (1986). Taxicab Geometry : An advance in Non-Euclidean Geometry, Dover Publication, New York.

## On the plane geometry using taxicab distance function

**Kyung Min Kwak; Seung Min Baik; Woo Seok Choi; Jun Bum Choi & Il Seog Ko**

Gyeonggi Science High School Suwon 440-800, Korea

E-mail : yaebbymin@hanmail.net; qoqo2@naver.com; cos7159@naver.com;

jjjwmsqja@naver.com & iskois@naver.com

**Byung Hak Kim**

Department of the Applied Mathematics, Kyung Hee University, Suwon 446-701, Korea

E-mail : bhkim@khu.ac.kr

Taxicab distance function is a practical distance notion which gives us information of real world pathway distance that really taxi can go through. As one of the non-Euclidean geometry, this study of an ideal city with all roads running horizontal or vertical, was introduced by the Russian Mathematician H. Minkowski and synthetically reported by the E. F. Kraus in 1986. After that, there were many reports and papers on this topic and still being researched.

At this point of view, our research about taxicab geometry provides its differences from Euclidean plane geometry, and considers about several theorems on plane geometry using the taxicab distance function.

- 
- \* ZDM Classification : G94
  - \* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
  - \* Key Words : Taxicab geometry, Plane geometry