韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 24 집 제 3 호, 2010. 9. 611-626

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 3, Sep. 2010. 611-626

CAS의 도구발생과 수학 지식의 발견 관점에서 고찰한 일차함수의 합성 성질 탐구

김 진 환 (영남대학교)
조 정 수 (영남대학교)

본 연구는 일차함수의 합성 성질에 관한 수학적 지식의 발견을 CAS 그래핑 계산기를 도구로 활용하여 조명하였다. 이를 위하여 먼저 CAS 그래핑 계산기와 같은 공학이 도구로 생성되는 의미와 과정을 살펴보았고, 실험수학의 견지에서 CAS를 활용한 관찰, 추측, 추론과 증명 등의 개념 기반형 수학적 활동에 기초한 수학적 지식 발견의 탐구 활동을 구상하였으며, 이 활동의 실제적 적용으로 일차함수의 반복 합성에 의해 얻어진 함수족들의 성질을 분석하였다. 이를 통하여 CAS 그래핑 계산기가 가지는 도구의 기능적 능력인 그래프 그리기, 표의 생성이나 기호 조작은 지필로는 힘든 반복 합성한 함수족의 탐구를 유의미하도록 함을 알 수 있었고, CAS가 수학적 활동에 매개되어 학교수학의 새로운 교수-학습 변화에 대한 주요한 역할을 담당할 수 있음을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

디지털 공학시대의 도래와 함께 수학의 교수-학습에서 가장 중대한 변화 중의 하나는 CAS(Computer Algebra Systems) 그래핑 계산기와 같은 공학의 사용에 관한 이론의 발달과 더불어 학교수학에서 이런 공학의 사용에 대한 적극적 권장이다. NCTM(2000)은 학교수학에서 공학의 사용을 권장하여 공학의 원리를 제시하고 있는데, 공학 특히 CAS 등은 다양한 측면에서 수학적 아이디어를 관찰할 수 있는 기회를 제공하고 수학적 탐구과정을 경험할 수 있게 하며, 결과를 점검해보는 데 많은 도움을 줄 수 있음을 강조하고 있다. 제 7차 교육과정(1998)과 개정된 교육과정(2007)에서도 연산능력과 기본개념을 손상시키지 않는 범위에서 계산기나 컴퓨터를 활용할 수 있도록 권장하고 있으며 앞으로 새로이 개정될 교육과정도 계산기나 컴퓨터를 활용한 수학적 사고 능력의 향상을 강조할 것으로 예상된다.

수학교실에서 공학의 유용성에 대한 긍정적 평가는 수학의 교수-학습에서 새로운 공학의 활용 가

* 접수일(2010년 8월 26일), 심사(수정)일(2010년 9월 7일), 게재확정일자(2010년 9월 15일)
* ZDM 분류 : U74
* MSC2000 분류 : 97U70
* 주제어 : CAS, 일차함수, 합성함수, 도구발생, 수학적 활동
* 이 연구는 2009학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

능성을 열어주고 있다. 이에 Fey et al.(1984)은 학교 수학의 대수교육에서 함수의 역할에 대한 논쟁을 재점화시켰고, 조작적 기능과 수학적 모델링의 새로운 역할을 하게 될 공학적 환경의 도래를 암시했다. 다양한 공학도구가 대수 영역을 중심으로 중재자로 활용되면서 CAS와 같은 인지 공학(cognitive technology)이 수학적 활동과 교수-학습에 미치는 영향에 대한 논의가 활발히 이루어져 왔다(Heid & Blume, 2008). 특히 함수와 계산 알고리즘은 학교수학의 대수 영역의 중추적 주제이며, 대수 체계를 갖춘 인지적 공학은 학생들이 함수나 계산 알고리즘에 대한 이해를 높이는 데 큰 잠재적 영향력이 있음을 주장하고 있다.

CAS 그래핑 계산기의 인지 공학이 함수 개념과 원리의 습득 과정에 깊게 연루되는 하나의 이유는 함수가 가지는 과정(process)과 대상(object)의 관점과 이들이 기호로 조작되어 질 수 있기 때문이다. Sfard(1992)는 과정으로서 함수의 조작적 개념은 단지 계산과정과 관련하고 있으며, 이 개념은 주어진 알고리즘과 관계를 설명하는 규칙에 따른 하나의 양의 역동적 변환을 수반한다고 설명한다. 그리고 대상으로서 함수의 구조적 개념은 국소적이 아닌 전면적인 함수의 성질(가령, 연산하는 것, 대칭성, 가역성, 주기 등)과 관계하는 것으로 보았다. 그러나 과정과 대상은 수학적 세계를 완전히 구별시키고 분리시키는 요소가 아니라 같은 것을 다른 측면으로 이해하는 것임을 강조하고 있다. Gray & Tall(1994)은 과정과 대상의 쌍대성을 고려하면서 기호(symbolism)는 과정의 산물을 위하여 도입하였고, 과정과 대상은 동일한 기호를 사용하여 적혀 질수 있음에 주시하여 과정과 대상에 대한 동시적 이해를 기호로 연계시켰다. Gerny & Alperts(2004)는 함수를 행위(action)와 대상으로 보는 견해를 자유로이 넘나들 수 있는 Gray & Tall이 제시한 과정과 개념에 대한 통합적 이해능력(proceptual capacity)이 공학에 내재되어 있음을 지적하였다. 수학적 의미가 공학 그 자체에 내재되어 있다는 것이 아니라 공학을 활용하는 사용자의 활동에서 수학적 의미가 형성된다는 것이다.

공학이 수학적 활동에 유용한 역할의 수행이란 배경에는 도구발생에 대한 이해를 전제로 한다. 수학적으로 활용 의미가 부여된 도구(instrument)는 그렇지 못한 단순한 가공물(artifact)과는 구별된다(Verillon & Rabardel, 1995). 가공물과 도구의 구분은 수학교실에서 수학적 활동의 도구인 CAS가 단순 가공물로 사용되는지 아니면 유용한 도구로 사용되는지를 구별할 수 있는 중요한 개념이다. CAS 그래핑 계산기의 활용 능력은 도구화의 정도에 따르며, 이 정도에 따라 CAS를 활용한 함수에 대한 교수-학습에서 공학이 가진 잠재력의 표출 정도가 달라질 것이다. 그렇다면 지필환경에서는 다루기 힘들지만 CAS 그래핑 계산기를 도구화하여 다룰 수 있는 학교수학의 수학적 활동에는 어떤 것이 있을까?

본 연구에서는 위에서 논의한 CAS의 도구발생적 관점에서 사례 생성, 관찰, 추측, 추론과 증명 등의 개념 기반형 수학적 실험 활동에 기반하여 일차함수의 반복합성으로 만들어진 함수족을 특성화하는 새로운 수학적 지식의 발견 과정을 탐색하고자 한다.

Ⅱ. 도구발생과 수학적 활동

본 절에서 CAS 그래핑 계산기가 수학교실에서 사용되기 위한 도구로서 가지는 의미를 도구발생의 관점에서 그 배경을 살펴보고, CAS가 중재된 수학적 활동의 이론적 측면을 고찰하고자 한다.

1. 도구발생

학생들이 공학을 어떻게 사용하는가를 교사 및 학생과 도구사이의 관계로부터 잘 설명하는 구성개념(construct)이 도구발생(instrumental genesis)이다. 도구발생과 발달은 인류 문명의 발달과 직결되고 수학의 발달과도 관계된다. 크게는 수학 자체도 자연 현상의 구명에 필요한 도구이며, 피타고라스 정리도 도구로서 세상과 자연 현상을 이해하려는 도구로 볼 수 있다. Verillon & Rabardel(1995)는 가공물과 도구를 구별하였으며, 가공물의 기능적 능력(capacity)을 고려할 필요성과 사람과 가공물 사이의 관계에 주목했다. 기능적 능력은 도구로서 할 수 있는 일로 이를 알아야 효율적인 도구로 사용할 수 있다. 도구는 자체적으로 존재하지 않으며 사용자 행위 대리인(user-agent)의 역할을 하게 될 때 비로소 도구로 발전한다. Artigue(2002)는 도구의 발전에 대한 개인적 그리고 사회적 본질을 지적했다. 도구발생은 가공물이 도구가 되는 과정 혹은 가공물을 사용하기 위한 의미 있는 방법을 개발하는 과정으로 여기에는 두 가지 개념이 있는데, 가공물의 도구화(instrumentalization)와 도구기제(instrumentation)이다. 가공물의 도구화는 도구적 가치가 없던 가공물의 잠재적 기능을 충분히 파악하여 특정 목적에 맞게 변형하여 사용하는 것을 말한다. 도구기제란 그 도구로 인해 일어나는 행동(instrumented action)을 통해 주어진 과제를 효율적으로 처리하게 해주는 테크닉(technique)의 점진적 발달이 오고 이로써 스키마의 발달을 가져올 때 그 도구가 도구기제로 사용된다고 한다. 수학교육에서 도구 생성의 핵심은 공학에 의해 만들어진 수학을 이해하는 것과 자신의 목적에 맞게 공학을 사용할 수 있는 것이다. 어떤 학생이 계산기를 잘 쓰고 못 쓰고는 도구발생(가공물의 도구화와 도구기제)에 의해 그 차이가 발생한다. 공학의 명료성은 가공물 그 자체가 아니라 조정자(mediator)로서 기능을 수행할 때 얻어진다(Lave & Wenger, 1991).

Drijvers(2003)는 CAS 계산기(TI-89)가 9학년, 10학년 학생들의 매개변수 개념을 이해하는데 얼마나 기여하는가를 연구하면서 도구발생의 구성 개념을 사용했다. 도구발생의 구성 개념을 이용하여 공학의 물리적 가공물과 학생들의 정신작용 사이의 중재자(mediator)로서 CAS의 역할에 대해 설명했다. 예를 들면, 도구 이해의 과정에서의 학생들의 어려움은 CAS에 식을 입력할 때의 어려움이다. 식을 입력하는 것은 CAS에서의 표기법이나 관례에 대한 테크닉 지식뿐만 아니라 입력하는 식의 구조에 대한 개념적 인식을 요구한다. 가공물에서 도구로 발달하는 도구발생에서 중요한 관점은 개발해야하는 도구의 기능적 능력(capacity)에 대한 면밀한 검토가 요구된다. 그러므로 도구생성에 관한 관심은 절차의 맹목적 적용을 넘어서는 기능적 능력의 본질인 테크닉에 대한 관심을 동반한다.

2. CAS와 수학적 활동

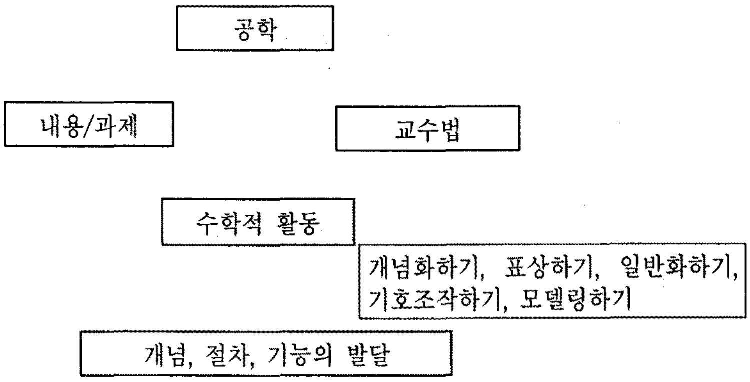
공학 도구는 수학적 활동에 많은 영향을 미치는데, 학생들이 어떤 수학적 활동을 경험하는가는 이들의 수학적 지식의 형성에도 중요한 영향을 미친다. 수학적 활동에는 계산하기, 미분하기, 작도하기, 해구하기, 방정식 풀기, 분류하기, 패턴찾기, 일반화하기, 특수화하기, 추론하기, 증명하기 등을 들 수 있다. 이러한 수학적 활동은 크게 두 가지 형, 절차 기반형 활동(technical activity, 기교형), 개념 기반형 활동(conceptual activity, 개념형)으로 분류된다(Zbiek, Heid, Blume & Dick, 2007). 절차 기반형 수학 활동은 수학적 대상이나 대상을 나타내는 표상에 수학적 행동을 취하는 것으로 작도하기, 측정하기, 그래프 그리기, 해 구하기, 수치적 계산, 표기법 사이의 번역 변환, 방정식풀기, 미분하기, 수집하기, 분류하기, 대수적 조작하기 등이 있고, 과제의 기계적이거나 절차적인 면에 관계된다. 한편 개념 기반형 수학활동에는 수학적 연결성, 수학적 구조 및 수학적 관계를 이해하기, 의사소통하기, 수학적 연결성과 구조 및 관계성을 활용하기 등을 포함하며, 과제를 조사하고 명확히 하여 정당화 하는 것과 관련되는 주요 활동에는 패턴을 찾고 기술하기(귀납적 추론하기), 정의하기, 추측하기, 일반화하기, 추상화하기, 표상을 연결하기, 검증하기, 증명하기, 반박하기 등이 있다.

Hillel, Kieran & Gurtner(1989)는 절차 기반형 수학활동을 촉진하기 위하여 사용자가 수학적 대상이나 대상의 표상물에 행위를 가할 수 있어야 하며, 개념 기반형 수학활동을 촉진하기 위하여 시각적 반응 피드백의 중요성을 강조하였다. Borwein(2005)는 실험수학(experimental math)에 대한 기술에서 공학을 사용한 수학활동은 절차 기반형 활동과 개념 기반형 활동 둘 다에 영향을 미칠 가능성이 있음을 지적하고 컴퓨터 사용에 의한 활동의 목적을 다음과 같이 제안하였는데, 이 제안은 CAS 등의 수학교육용 공학 도구의 사용에 대한 시사점을 준다:

- 통찰력과 직관력 얻기
- 새로운 패턴과 관계 찾기
- 수학적 원리를 나타내는 그래프 그리기
- 추측을 검증하고 반증하기
- 형식적 증명이 도움되는 결과들을 탐구하기
- 형식적 증명에 접근하는 방법 제안하기
- 긴 계산을 컴퓨터로 대신하기
- 해석적으로 유도된 결과 확증하기

Heid & Blume(2008)은 도구 발생에 의해 영향을 받은 공학이 대수의 내용과 과제, 교수법에 영향을 줌으로써 공학이 수학적 활동에 영향을 주고 궁극적으로 개념, 절차, 기능의 발달을 가져온다고 제안하였다(<그림 Ⅱ-1>). 공학 환경 제공의 차이는 교수-학습에 참가한 학생들의 수학적 활동의 차

이를 주고 이것은 결과적으로 학습의 차이를 초래한다. 수학교실 상황에서 사용되는 공학적 도구는 학생들이 참여하는 인지적 활동뿐만 아니라 학습을 중재한다(Wertsch, 1998). 공학은 수학교실에서 학생들의 역할뿐만 아니라 이들에게 제공되는 개념화하기, 표상하기, 일반화하기, 기호조작하기, 모델링하기 등의 수학적 활동에 대한 기회의 본질을 바꿀 수 있다.



<그림 II-1> 공학이 학습에 미치는 영향

Ⅲ. CAS에 기반한 수학 지식의 발견 모형

학교수학에서 CAS의 활용은 교수-학습에서 무엇을 어떻게 가르칠 것인가에 대한 고려를 하게 한다. 그렇다면 CAS를 수학교육에서 가치 있는 유용한 도구로 사용하기 위해서는 어떻게 해야 하는가? 사소화(trivialization), 시각화(visualization), 집중화(Concentration), 실험화(experimentation) 라는 측면에서 CAS의 사용을 살펴봄으로써 수학교육에서 CAS 사용의 중요성과 그 이유를 알 수 있다 (Kutzler, 2003).

(1) 사소화(trivialization): 복잡한 산술 계산, 그래프 그리기, 대수적 조작을 사소하게 한다. 이에 따라 수학을 가르칠 때 보다 복잡한 문제와 실제적이고 현실적인 문제를 해결할 수 있는 능력을 기르는데 도움을 준다.

(2) 시각화(Visualization): 대상이나 사실 또는 과정을 그림으로 보여주는 것을 말하는데, 이 시각화의 결과는 그래프나 숫자 또는 대수식을 말한다. 오늘날 시각화라는 용어는 대수적 대상이나 사실, 수치적 대상이나 사실에 대한 그래프적 표현을 말한다. CAS 그래핑 계산기는 대수적 표상과 그래프적 표상 사이의 동치적 해석을 위하여 표상 사이의 변환이 손쉽게 이루어지게 하는 뛰어난 기능이 있다.

(3) 집중화(concentration): CAS의 지원을 받을 수 있는 연습문제를 다룰 때 CAS는 동치 변환에 의하여 단순화하는 기능을 수행하고 학생들은 동치변환을 선택하는 고등 수준의 기능에 완전히 집중

할 수 있다.

(4) 실험화(experimentation): 수학적 지식을 발견하는 하나의 방법이 될 수 있는 것으로 인식론적인 이론에 따라 수학 발견의 주요 단계를 시각화할 수 있다. 이것은 Buchberger의 나선형 교수학습 구조로 수학적 발견의 주요 단계로 다음과 같이 기술된다(Kutzler, 2003).

> 알고 있는 알고리즘을 적용하여 예를 산출 ⇨ 예에서 귀납적으로 얻을 수 있는 특성 관찰 ⇨ 관찰을 근거로 추축하가 ⇨ 추측을 증명하고 이론 만들기 ⇨ 이론을 실행하여 새로운 알고리즘을 제공 ⇨ 적용 ---> 새로운 예를 산출, 관찰, 추측 …

이 과정은 나선형으로 계속 진행되며 수학 지식들을 발견하는 과정이다. 이러한 과정은 3가지 단계로 나눌 수 있다. 알려진 알고리즘을 적용하여 여러 예를 만드는 실험단계, 증명을 통하여 제기한 추측을 정리로 발전시키고 정리에 의해 알고리즘화된 지식이 새로운 알고리즘을 위한 시행점으로 보는 엄밀화 단계, 그리고 알고리즘을 실제 적용하는 단계인 적용단계가 있다.

Buchberger의 나선형 수학 발견 과정의 구조를 토대로 CAS를 활용한 일차함수의 합성함수족에 대한 탐색을 시발점으로 수학 지식의 발견 모형을 재구성해 보면 <그림 Ⅲ-1>과 같다.

탐구문제의 구성-목표설정

⇩

실험활동(CAS사용): 다양한 사례 생성

⇩

관찰

⇩

분류하기 및 추측하기

-공통점, 차이점, 불변인 것, 패턴의 탐지, 반례 점검

⇩

추론 및 증명

-정당화(경험적 정당화)하기, 형식적 증명

⇩⇩

수학적 지식의 발견

-개념, 원리, 알고리즘, 정리

<그림 Ⅲ-1> 수학적 지식을 발견해가는 수학적 활동

탐구문제의 도입은 학습자가 가지고 있는 사전 지식과 경험에 바탕을 두며 교사에 의해 안내된다. 다양한 사례의 생성을 위하여 CAS 그래핑 계산기를 사용한다. CAS는 함수의 그래프 그리기, 표 만

들기, 함수값 계산하기와 방정식의 해구하기 등 대수적 조작 능력을 제공한다. 수학적 사고에 손상이 없는 범위에서 CAS를 활용할 수 있는 상황에서는 CAS를 도구화한다. CAS의 적절한 활용으로 신속하게 시각적이고 오류가 없는 다양한 사례들을 구성하게 한다. 이 사례들에서 관계성을 찾고, 패턴을 지각적으로 관찰함으로써 수학적 특성을 발견하고 상황에 따라 다양한 표상의 번역도 하게 한다. 관찰은 수학적 발견이 본격적으로 시작되는 것이며, 수학 지식의 발견에서 가장 중추적인 활동으로 볼 수 있다. 관찰은 기존의 경험을 새로운 지식으로 연결 짓고 패턴과 관계성을 찾게 하는 수단으로 수학적 추측을 가능하게 한다. 추측은 귀납적 추론의 소재가 되어 그 결과는 정당화나 증명을 통해서 그 참임이 주장된다. 이러한 과정은 개념이나 원리, 알고리즘의 발견과 일반화된 수학적 정리를 발견하게 한다. 패턴 탐지까지의 귀납적 사고와 기호화하고 형식화하는 수학적 표현을 거치며 패턴이나 관계성에 대한 합리적인 논거 제시하는 추론의 과정을 밟으면서 수학적 결과인 정리를 도출하는 연역적 사고를 따르게 된다.

Ⅳ. CAS를 활용한 일차함수 합성 성질에 대한 탐구의 실제

본 절에서는 CAS 그래핑 계산기를 활용한 수학 지식 발견의 탐구 모형을 기반으로 일차함수의 반복 합성으로 주어지는 함수족들의 성질을 탐구하고자 한다. 이러한 탐구를 통해 하나의 원리나 정리를 찾아가는 과정에서 일어나는 수학적 활동을 분석해 보고자 한다. 본 절에서 합성함수에 대한 성질을 실험하고 탐색하는 CAS형 도구는 Texas Instruments의 Voyage 200이다.

함수의 합성으로 얻은 함수를 하나의 대상으로 다룰 수 있다는 점에서 이 탐구의 수준이 고등학교 수학으로 보아야 하지만, 함수의 과정적인 개념과 대상적 개념이 하나의 기호로 엮어 진다는 점에서 일차함수와 그 그래프를 잘 이해한다면 중학교 수준에서도 합성의 개념을 도입하여 이 실험적 탐구활동을 시행해 볼 수 있을 것이다.

먼저 일차함수에 대한 합성함수의 개념을 살펴보자. 두 일차함수 f, g에 대하여, 합성함수 $g \circ f$는 임의의 실수 $x \in \mathbf{R}$에 대하여 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$로 정의된다. 합성함수 $g \circ f$는 $g(f)$라 쓰기도 한다. f와 g 모두 일차함수이므로 $f(g)$도 항상 일차함수가 된다. 함수들의 합성연산에 대하여 결합법칙이 성립한다. 따라서 $f(f) = f^{<2>}$, $f \circ f^{<2>} = f^{<2>}(f) = f^{<3>}, \cdots$, 으로 나타낸다.

[탐구문제] 두 일차함수 f, g에 대하여 g에 f를 합성하고 이를 다시 f에 의해 반복 합성해서 얻어지는 일차함수족은 어떠한 성질을 가질까? 이 탐구로부터 일반화된 수학적 성질을 기술하시오.

위의 탐구문제는 수학적 기호를 사용하여 다음과 같이 좀 더 구체적으로 바꾸어 생각해 볼 수 있다. 두 일차함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ 에 대하여, g에 f를 반복 합성하여 얻은 함수들로 구성된 일차함수족은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathcal{F}(g) = \{g,\ f(g),\ f^{<2>}(g),\ f^{<3>}(g),\ \cdots,\ f^{<n>}(g), \cdots\ \}$$

여러 형태의 일차함수를 가지고 이 함수족의 그래프를 그려 보고 이 함수족이 가지는 두드러진 성질이 무엇인지를 관찰하고 추측하며 처음 두 일차함수에 주어진 계수 a, b, c, d가 함수족에 어떤 영향을 미치는가를 알아보는 것이 이 탐구의 목적이다. 여기서 $\mathcal{F} = \{i,\ f,\ f(f),\ f^{<3>}, \cdots\ \}$로 나타내자. i는 $i(x) = x$로 주어지는 항등함수이다. 그러면 $\mathcal{F}(g) = \{F(g) \mid F \in \mathcal{F}\}$로 나타낼 수 있다.

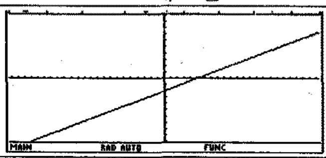
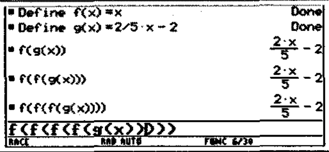
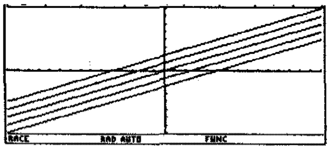
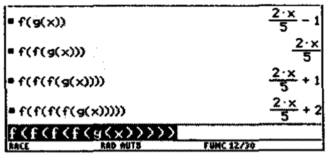
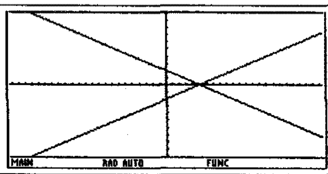
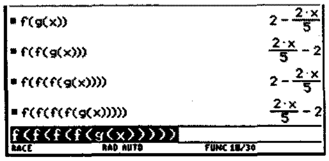
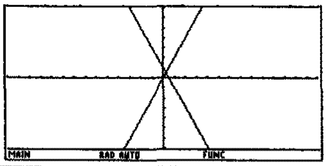
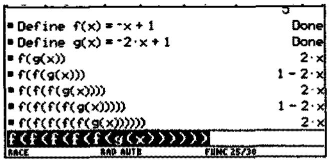
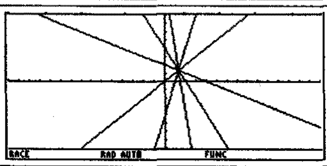
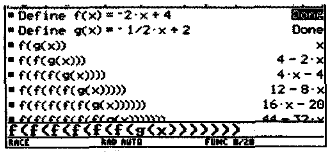
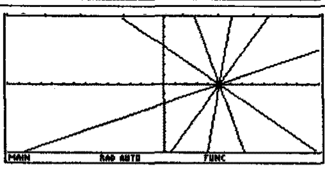
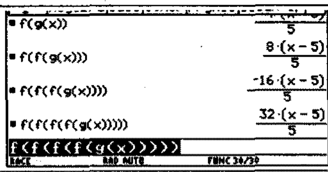
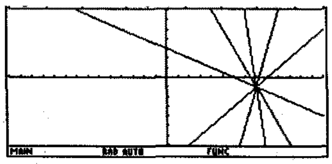
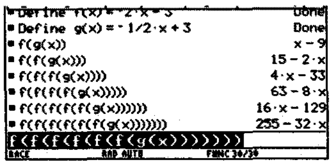
CAS를 합성함수의 성질 탐구를 위한 도구로 활용하기 위해서는 CAS가 가진 기능적 능력인 함수의 그래프 그리기, 함숫값 계산하기에 관한 조작 및 방정식의 해를 구하는 기능을 습득하고 있다고 전제한다.

<표 IV-1> 일차함수의 반복 합성한 그래프들의 성질을 발견하는 수학적 과정과 활동

<table>
<tr><th>f, g 선택</th><th>CAS를 사용하여 여러 그래프 그리기</th><th>관찰을 통한 성질기술</th><th>수학적 활동</th></tr>
<tr><td>$f(x) =$
$g(x) =$</td><td>$g(x)$
$f(g(x))$
$f(f(g(x)))$
$f(f(f(g(x))))$
$f(f(f(f(g(x)))))$</td><td></td><td rowspan="2">CAS를 매개로 다양한 예들을 생성(관찰의 자료제공), 관찰</td></tr>
<tr><td colspan="3">$f(x) =$ $g(x) =$: 다양하게 하며 위의 과정을 반복 시행</td></tr>
<tr><td colspan="3">⇩
그래프들이 갖는 성질에 따라 분류하고 두 일차함수와의 관계 찾기</td><td>⇩
분류와 추측</td></tr>
<tr><td colspan="3">⇩
정당화하거나 증명하기</td><td>⇩
검증</td></tr>
</table>

<표 IV-1>는 일차함수의 합성한 결과로 얻어지는 일차함수족의 수학적 성질을 발견해가는 과정과 수학적 활동을 나타낸다. 학생들에게 제공될 활동지는 <표 IV-1>을 기초로 하여 만들어 질 수 있을 것이다. 탐구 활동의 일환으로 학생들에게 각자 다양한 일차함수를 정하게 한다. 학생들은 이 활동지에 근거하여 그들이 임의로 정한 일차함수에 대하여 합성 함수족의 그래프를 CAS를 활용하여 그려보고 그래프들에서 관찰되는 성질을 기술하도록 한다. CAS에 의해 생성된 여러 함수족들을 특성에 따라 분류하고 그 특성을 수학적 성질로 규정하고 정당화하거나 증명하는 과정을 수행해 보도록 한다. 여기서는 학생들을 대상으로 한 실제적 실험활동 없이 가상적인 것으로 대신한다.

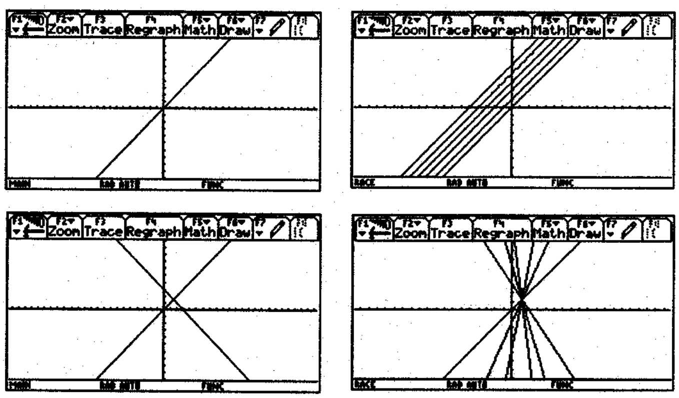
<표 IV-2> 일차함수의 반복 합성과 그래프들의 패턴 유형

<table>
<tr><th>관찰 유형</th><th>$\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들 $g(x)$, $f(g(x))$, $f(f(g(x)))$, $f^{<3>}(g(x))$, $f^{<4>}(g(x))$ 의 그래프들</th><th>$f(x)$, $g(x)$의 예</th><th>$\mathcal{F}(g)$의 함수들</th></tr>
<tr><td>(I)</td><td></td><td>$f(x)=x$
$g(x)=\frac{2}{5}x-2$</td><td></td></tr>
<tr><td>(II)</td><td></td><td>$f(x)=x+1$
$g(x)=\frac{2}{5}x-2$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">(III)</td><td></td><td>$f(x)=-x$
$g(x)=\frac{2}{5}x-2$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$f(x)=-x+1$
$g(x)=-2x+1$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">(IV)</td><td></td><td>$f(x)=-2x+4$
$g(x)=-\frac{1}{2}x+2$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$f(x)=-2x$
$g(x)=\frac{2}{5}x-2$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$f(x)=-2x-3$
$g(x)=-\frac{1}{2}x+3$</td><td></td></tr>
</table>

일차함수를 반복 합성한 함수족에 속한 함수들의 그래프 관찰을 통해 우선적으로 얻어질 것으로 예상되는 특성이 그래프가 공유하는 점의 수일 것이다. 두 일차함수의 계수들이 함수족에 속하는 함수들에 의해 주어진 그래프들의 공유점의 수와는 어떤 관계가 있을까? 공유점의 관점에서 특성적 분류를 하고 그 유형을 정하게 한다. 합성함수족의 그래프들에 대한 관찰에서 공유점의 수를 준거로 <표 Ⅳ-2>와 같이 네 가지의 유형으로 나누어질 것이다.

이처럼 그래프들이 가지는 특성의 관찰은 지필 환경에서는 여러모로 힘들 것이다. 학생들이 직접 다루게 될 위의 탐구문제를 생각하는 것 자체 뿐 아니라 여러 형의 그래프를 그리는 활동에서 어려움을 겪게 될 것이고 학생들이 시각적인 자료를 제공받기가 쉽지 않을 것이다. CAS를 사용하는 환경에서는 일차함수 및 합성한 함수의 그래프 그리기는 매우 사소한 일이고 또한 짧은 시간에 다양한 함수의 그래프를 정확하게 그리기 때문에 더 많은 시간을 관찰과 추론을 하는데 집중하여 사용할 수 있음을 알 수 있다. 탐구실험을 위한 사례의 제공과 시각적 관찰에서 CAS가 중재된 공학 환경이 수학적 사고를 좀 더 여유롭고 풍부하게 함을 알 수 있다.

합성연산과 이 연산에 대한 결합법칙의 성립함에 근거하여 g를 배제하고 일차함수 f만의 합성함수를 포함하는 함수족 $\mathcal{F}$로도 $\mathcal{F}(g)$의 유형을 파악하는 근거를 제공할 수 있다. $\mathcal{F}(g)$에 대한 위와 같은 활동과정을 함수족 $\mathcal{F}$에 행함으로써 다음 <그림 Ⅳ-1>과 같은 4가지의 패턴 유형으로 분류됨을 알 수 있다. 함수족 $\mathcal{F}$의 유형을 먼저 고려한 다음 $\mathcal{F}(g)$의 유형을 다루는 위의 탐구문제에 접근해도 된다.



<그림 Ⅳ-1> 일차함수족 $\mathcal{F}$에 대응하는 그래프들의 패턴유형

지금까지 관찰하고 분류한 네 가지의 패턴 유형을 일차함수들의 계수와 연계시켜 새로이 관찰하고 추측하도록 하며 그 추측을 수학적 성질로 기술하도록 한다. 관찰은 새로운 수학적 지식에 위한 탐구의 시발점이면서 한 번에 국한되지 않고 모든 단계에서 사용된다. 관찰하기는 CAS 환경에서 수학적 활동 및 수학적 사고의 한 형태로 보아야 할 것이다. 관찰은 실험 수학에서 가장 중추적인 활

동으로 시각적 경험을 정신적인 깨달음으로 연결시켜 준다. 또한 관찰은 기존의 경험을 새로운 지식으로 연결하고, 패턴과 관계성을 찾게 하는 수단이며, 보편적 지식으로 자리 매김을 기다리는 귀납적 추측을 낳고 수학적 지식의 발견을 촉진한다.

일차함수 $f(x)=ax+b$ 및 $g(x)=cx+d$의 계수 $a(\neq 0)$, b, $c(\neq 0)$, d 는 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들의 그래프들이 가지는 네 가지 유형과 어떤 관계가 있는 가? 계수 $a(\neq 0)$, b, $c(\neq 0)$, d와 합성함수족의 그래프가 가지는 특성과 공유점의 수와의 관계는 다음과 같은 성질로 기술될 수 있다.

(Ⅰ) $a=1$, $b=0$ 인 경우, 함수족 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들의 그래프들은 g의 그래프와 같다.

(Ⅱ) $a=1$, $b\neq 0$ 인 경우, 함수족 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들의 그래프들은 서로 만나지 않으며, g의 그래프를 평행 이동한 직선들이다.

(Ⅲ) $a=-1$인 경우, 함수족 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들의 그래프들은 두 가지 형이 있으며 한 점에서 교차한다. 함수족 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 모든 함수들의 그래프들이 공유하는 점은 하나이다.

(Ⅳ) $a\neq 1$ 이고 $a\neq -1$인 경우, 함수족 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들의 그래프들은 한 점에서 만난다. 어떠한 두 그래프도 같지 않다. 특히 $|a|>1$이면 그래프들이 y-축에 근접해 가고, $|a|<1$이면 x-축에 근접해 간다.

의의 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)의 경우는 CAS를 사용하여 점검해 볼 수도 있고, 지필환경에서 대수적으로 쉽게 점검해 볼 수 있다. 이를 구체적으로 알아보면,

(Ⅰ) 형에서 함수 f는 $f(x)=x$로 주어지므로 항등함수이며 f의 합성으로 얻어지는 함수족 $\mathcal{F}$ = $\{f\}$이다. 따라서 $\mathcal{F}(g)$ = $\{f(g)\}$ = $\{g\}$이다.

(Ⅱ) 형은 $a=1$, $b\neq 0$ 인 경우에만 나타나며 이 경우 $f(x)=x+b$로 f의 합성으로 얻어지는 함수족 $\mathcal{F}$ = $\{h \mid h(x)=x+nb$, n은 범자연수$\}$이며, 이들의 그래프들은 f의 그래프를 평행 이동한 것이다. $\mathcal{F}(g)$ = $\{h(g) \mid h\in\mathcal{F}\}$로 $h(g)$의 그래프는 g의 그래프를 평행 이동한 것이다

(Ⅲ) 형은 $a=-1$인 경우에 나타나며 이 경우 $f(x)=-x+b$로 반복 합성한 함수 $f^{< n >}$은 다음과 같이 주어지므로 함수족 $\mathcal{F}$ = $\{f, i\}$이며 두 함수 f, i의 그래프는 직교한다.

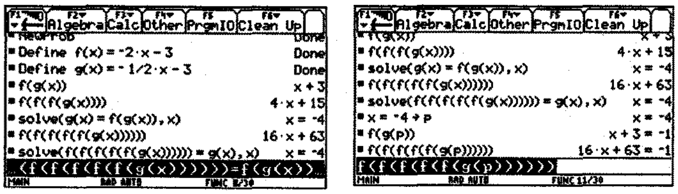
$$f^{< n >}(x)=\begin{cases}-x+b & (n:odd)\\ x & (n:even)\end{cases}$$

따라서 $\mathcal{F}(g)$ = $\{g, f(g)\}$이고 g와 $f(g)$의 그래프들은 단 한 점에서만 만난다. 그러나 직교할 필요는 없으며 이 두 형의 그래프는 이들의 교점을 지나는 x-축 및 y-축에 평행한 직선들에 대하여 대칭을 이룬다.

이제 (Ⅳ) 형의 경우에 대하여 정당성을 검증하기로 한다. 관찰하고 분류하고 추측의 과정 다음으로 고려해야 할 것이 이 추측이 정당한지를 검증하는 것이다. 지금까지의 추측은 시각적이고 기하적

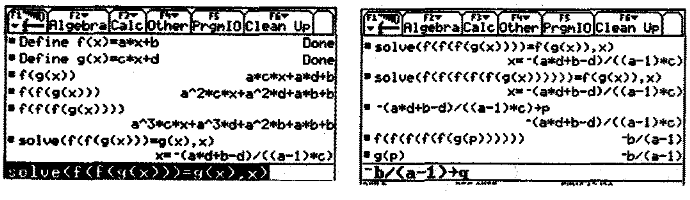
인 관찰에 근거하였다. 기하적인 관찰에서 대수적 관찰로 옮겨 이 추측에 대한 타당성을 점검하고자 한다. 여기서 CAS의 대수적 조작능력을 전제로 CAS를 활용하며 형식적인 증명보다는 경험적 정당화에 비중을 두어 다룬다.

가령 일차함수 $f(x)=-2x-3$, $g(x)=-\frac{1}{2}x+3$에 대한 함수족 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들의 그래프들의 공유점이 하나임은 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 임의의 두 함수를 택하고 두 함수식을 사용한 하나의 방정식을 만들고 (예를 들어, $f(f(f(g(x))))=g(x)$), 이를 풀어 이들 그래프들에 대한 공유점의 좌표를 구하고 또 다른 두 함수를 택해 방정식을 만들고 풀어 공유점의 좌표를 구한 다음 이들 두 좌표를 비교함으로써 검증된다. 여러 번의 좌표 비교활동을 통해 공유점이 같음을 보여 공유점이 하나임을 정당화한다. 여기서 주 활동은 방정식을 풀어 공유점의 x좌표를 구하고 이를 함수에 대입하여 함숫값을 구하여 공유점의 좌표를 찾는 대수적 방법이다. 이 대수적 방법이 함수들의 그래프를 시각적으로 관찰한 기하적인 방법과 상호 보완적으로 연결된다. <그림 Ⅳ-2>는 CAS를 활용한 일차함수 정의하기와 합성함수 구하기, 방정식 만들기, "solve"기능을 활용한 방정식 풀기, 함숫값 구하기를 통해 공유점의 좌표를 구한 과정이다. 위의 함수족의 그래프들이 가지는 공유점이 하나라는 기하적인 추측을 뒷받침하는 대수적 실험활동의 결과이다. 실제 하나인 공유점의 좌표가 $(-4,-1)$임을 구체적으로 확인시켜 준다.



<그림 Ⅳ-2> 특별한 일차함수의 반복 합성들의 공유점

이 사례에서와 같이 CAS를 사용한 대수적인 방법으로 이끌어낸 계수들이 공유점의 수에 미치는 영향을 일반적인 상황에서 정당화하여 보기로 한다. 일차함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$에 대한 함수족 $\mathcal{F}(g)$의 그래프들의 공유점 문제는 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 임의의 두 함수를 택하여 그들의 공유점을 비교하는 과정으로 수행해 볼 수 있다(<그림 Ⅳ-3>).



<그림 Ⅳ-3> 일반적 일차함수의 반복 합성들의 공유점

CAS 그래핑 계산기로 구한 방정식의 해 x에서 $a \neq 1$임을 직접적으로 언급하고 있진 않으나, 분모의 값이 0이 될 수 없다는 점에서 a의 값이 1이 아님을 암묵적으로 나타내고 있다. $a \neq 1$이면 함수족 $\mathcal{F}(g)$에 속하는 함수들이 공유하는 점이 하나임을 알 수 있다. 이 점의 좌표를 (p,q)라 하면 CAS 그래핑 계산기를 통해 p, q는 a, b, c, d에 의해 표현되고, (p,q)는 다음처럼 주어짐을 볼 수 있다(<그림 Ⅳ-3>):

$$(p,q) = (-\frac{ad+b-d}{(a-1)c}, -\frac{b}{a-1})$$

지금까지 살펴본 CAS를 활용한 일련의 실험 탐구 과정으로부터 일차함수를 반복 합성하여 얻은 함수족이 가지는 성질을 이들 그래프들의 공유점의 문제와 일차함수의 계수와 관계한 수학적 지식으로 발전시킬 수 있음을 알 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 연구는 일차함수의 합성함수를 탐구함에 있어 도구의 관점에서 공학의 의미를 살펴보았고, 실재적 탐구를 통해 수학적 지식의 발견적 교수-학습에서 CAS 공학이 주는 장점을 알아보았다. 본 연구의 결과는 공학의 적절한 활용은 다양한 측면에서 수학적 아이디어를 관찰할 수 있는 기회를 제공하고, 수학적 탐구 과정을 경험하고, 수학적 결과를 검증해 보는데 많은 도움을 줄 수 있다는 NCTM(2000) 규준의 공학의 원리에 대한 실제적인 예를 제시해 주고 있다. 또한 7차 교육과정이나 개정된 교육과정에서 강조된 기본 개념에 기초 연산을 손상시키지 않는 범위에서 공학의 활용에 대한 사례가 될 수 있다고 본다.

본 연구에서는 CAS 등의 공학 도구의 활용과 함수에 대한 연구의 이론적 근거를 찾고자 하였다. 함수는 과정과 대상이란 이중적 개념이다(Sfard, 1992). 중학교 저학년 수준에서는 함수의 교수-학습의 수준은 함숫값을 계산하는 것과 같은 수치적으로 다룰 수 있는 능력에 초점이 두지만, 고등학교에서는 함수를 대상으로 다룰 수 있는 대상적 개념이 있어야 한다. 함수에 대한 합성은 이러한 대상적 개념에 해당한다. 그러나 본 연구는 과정과 대상을 하나의 동전처럼 통합된 일체로 보았다. 이러한 관점의 근거는 함수의 기호화된 식은 수치적으로 다룰 수 있는 과정적 개념과 함수를 대상으로 다룰 수 있는 대상적 개념을 동시에 내포한다는 Gray & Tall(1994)의 연구와 CAS와 같은 인지적 공학 도구는 과정과 개념(대상)을 자유 왕래하는 능력이 내재되어 있다는 Gerny & Alperts(2004)의 연구에 두고 있다. 이에 CAS 그래핑 계산기의 기능적 능력은 함수를 과정과 수학적 대상으로 볼 수 있는 길을 열어 줌을 알 수 있었다. 또한 가공물과 도구와의 구별과 가공물이 가지는 기능적 능력을 바탕으로 도구를 이해하고 도구화하는 두 가지 개념을 가진 도구발생이란 구성 개념이 CAS를 도구로 이해하는데 유용한 구성개념임을 보였다.

일차함수의 합성함수에 대한 분석은 수학을 발견하거나 발전시켜가는 과정을 CAS를 도구로 활용

한 다양한 사례의 생성과 관찰을 통해 특성이나 패턴을 찾고, 분류하고, 추측을 만들며 추측을 입증하는 수학적 활동에 기초하여 이루어졌다. 이러한 수학적 발견의 과정에 입각한 탐구에서 기능적 기호 조작이나 정형화된 기호 알고리즘을 적용하는 사례의 구성이나 과제를 CAS에 맡김으로써 실행의 결과를 분석하는데 집중할 수 있었다.

본 연구의 탐구의 실제에서 학생들을 직접 참가시키진 못했고 가상적인 측면에서 접근하였다. 후속의 연구에서는 수학교실에서 학생들을 대상으로 CAS를 활용한 실험 활동을 실행하면서 수학 지식의 발견과 더불어 학생들 간의 상호작용, 도움을 주고받는 협력 관계와 수학적 의사소통의 차이, 수학적 호기심 등 공학 사용의 측면에서 교실 담화를 관찰해 볼 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2007). 초·중등학교 교육과정. 교육인적자원부.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumenalization and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal od Computers for Mathematical Learning,* **7**, 245-274.

Borwein, J. M. (2005). The experimental mathematics: The pleasure of discovery and the role of proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* **10**, 109-134.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter.* Doctoral dissertation, Utrecht University.

Fey, J. T., Atchison, W. F., Good, R. A., Heid, M. K., et al. (1984). *Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula.* Reston, VA: NCTM.

Gerny, M., & Alperts, B. (2004). Formula 1-A mathematical microworld with CAS: Analysis od learning opportunities and experiences with students. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* **9**, 25-57.

Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference,* **2**, 72-79.

Gray, E., & Tall, D.(1994). Duality ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education,* **25**, 116-140.

Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Algebra and function development: In Heid, M. K. & G. W. Blume (Eds.), *Research on the technology and learning of mathematics* (Vol 1, pp. 55-108). NCTM.

Hillel, J., Kieran, G., & Gurtner, J. (1989). Solving structured geometric tasks on the computer: The role of feedback in generating strategies. *Educational Studies in Mathematics,* **20**, 1-39.

Kutzler, B. (2003). CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics. In J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, R. M. Zbiek (Eds.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education.* Reston, VA: NCTM.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripherical participation.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. (류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙 역). 서울: 경문사. (영어원작은 2000년 출판).

Sfard, A.(1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education,* **9**, 77-101.

Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action.* Oxford :oxford University Press.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester, Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol.2, pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Exploration of the Composite Properties of Linear Functions from Instrumental Genesis of CAS and Mathematical Knowledge Discovery

Kim, Jin Hwan
Dept. of Mathematics Education, Yeungnam University, 712-749, Korea
E-mail : kimjh@yu.ac.kr

Cho, Cheong Soo
Dept. of Mathematics Education, Yeungnam University, 712-749, Korea
E-mail : chocs@yu.ac.kr

The purpose of this study is to explore the composite properties of linear functions using CAS calculators. The meaning and processes in which technological tools such as CAS calculators generated to instrument are reviewed. Other theoretical topic is the design of an exploring model of observing-conjecturing-reasoning and proving using CAS on experimental mathematics. Based on these background, the researchers analyzed the properties of the family of composite functions of linear functions. From analysis, instrumental capacity of CAS such as graphing, table generation and symbolic manipulation is a meaningful tool for this exploration. The result of this study identified that CAS as a mediator of mathematical activity takes part of major role of changing new ways of teaching and learning school mathematics.

* ZDM Classification : U74
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70
* Key Words : CAS, linear function, composite function, instrumental genesis, mathematical activity