韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 24집 제 3호, 2010. 9. 543-562

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 3, Sep. 2010. 543-562

# 미지수가 2개인 연립일차부등식의 문제해결과정에서 발생하는 오류 분석 및 지도방안 연구

전 영 배 (경상대학교)
노 은 환 (진주교육대학교)
김 대 의 (경상대학교 사범대학 부설고등학교)
정 찬 식 (합천대병초등학교)
김 창 수 (경상대학교 사범대학 부설중학교)
강 정 기 (창원안남중학교)
정 상 태 (사천문선초등학교)

본 연구는 미지수가 2개인 연립 부등식을 해결하는 과정에서 발생하는 오류에 대해 분석하고 오류에 따른 교수-방법을 제공하는데 그 목적이 있다. 먼저, 미지수가 2개인 연립 부등식을 소개하고, 연구자가 지도하고 있는 한 학생이 제안한 풀이를 보여준다. 미지수가 2개인 연립 부등식의 문제를 해결하는 과정에서 학생은 오류를 범하고 있는데, 본 연구에서는 이러한 오류에 대해 해석기하학적 접근($xy-$평면에서의 오류진단, $ab-$평면에서의 오류진단), 대수적 접근, 공리적 접근의 방법으로 오류를 진단하고 적절한 지도방법을 모색하고자 한다. 학생이 문제를 해결하는 과정에서 범한 오류는 미지수가 2개인 연립일차부등식의 내용을 학습하기 전에 배우게 되는 내용 중 '8-가 단계'에서 학습하는 미지수가 2개인 연립일차방정식의 내용이 미지수가 2개인 연립일차부등식의 내용과 유사한 점이 많기 때문에 미지수가 2개인 연립일차부등식과 관련된 문제를 해결하는 과정에서 미지수가 2개인 연립일차방정식을 학습하면서 익힌 풀이 방법이 같은 방법으로 적용될 것이라는 오개념과 미지수가 2개인 연립일차부등식과 관련된 불충분한 내용의 교육과정 때문에 발생한 것이다. 학생이 범한 오류에 대해 학생의 문제 풀이 과정을 해석기하학적, 대수적 접근을 통해 면밀히 분석한 결과 학생이 범한 오류는 미지수가 2개인 연립일차부등식을 해결하는 과정에서 2개의 변수들 사이의 상호관련성을 간과하여 발생한 결과임을 알 수 있다. 따라서 본 연구는 오류를 범하기 쉬운 미지수가 2개인 연립일차부등식과 관련된 문제를 해결하는 과정에서 2개의 변수 사이의 관련성에 대해 해석기하학적 접근, 대수적 접근, 공리적 접근을 통하여 2개의 변수들 사이의 상호관련성에 대해 학생들에게 주지시켜야 하고 아울러 미지수가 2개인 연립일차부등식을 다룰 경우 대수적 기법이 변수들 사이의 관련성으로 인하여 조심스러워야 하므로 해석기하학적으로 좌표평면을 도입하여 문제에 접근해야함을 강조한다.

* 접수일(2010년 7월 21일), 심사(수정)일(2010년 8월 22일), 게재확정일자(2010년 9월 16일)
* ZDM 분류 : D34, H34
* MSC2000 분류 : 97D40, 97D70
* 주제어 : 수학적 오류, 미지수가 2개인 연립일차 부등식

# Ⅰ. 들어가며

## 1. 연구의 필요성 및 목적

NCTM은 수학 교육의 중요한 목표로 수학적 사고력과 문제 해결력의 신장을 강조하고 있다. 이를 바탕으로 우리나라 7차 교육과정에서도 수학과 목표를 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 사고하는 능력을 기르게 하여, 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하는데 그 목적을 두고 있다(교육부, 1997).

그러나 실제 학교 현장에서 많은 학생들이 개념을 제대로 이해하지 못하여 문제 해결 과정에서 많은 어려움을 겪고 있다. 따라서 문제풀이 과정에서 학습자가 어떻게·왜 오류를 범하고 있는지, 그리고 주어진 학습과제에서 어떠한 오류의 유형이 학습자들에게 가장 취약한지, 또 이미 발생한 오류를 어떻게 치료할 것인지 등에 대한 연구가 필요하다.

Piaget는 많은 학생들이 일관성 있게 보인 오류는 그 문제에 접근하는 학생들의 인지구조를 나타내는 것이라 하였고, Clayton은 유능하고 성공적인 교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학적 구조를 알아야 할 뿐만 아니라, 학생들의 오류를 진단하기 위한 전략에 대한 지각을 갖추어야 하고, 현장의 수학 교사들은 학생의 오류를 연구할 필요가 있다고 강조했다(이현주, 2004. 재인용). 오류는 학습하는 과정에서 학생들의 인지능력을 파악할 수 있게 하고, 학습자들의 학습 실패 원인에 대한 가치 있는 정보를 제공해주기 때문에 오류를 파악하는 일은 중요하다. 그러므로 학교현장의 교사들은 학생들의 학습 과정을 살펴봄으로써 학생들의 오류를 파악하고, 오류 분석을 통해 원인을 찾아 학생들의 문제해결능력을 향상시킬 수 있도록 도움을 제공해야 한다.

수학교과에서 부등식은, 대수영역뿐만 아니라 해석영역과 기하영역 등 많은 수학의 영역에서 문제해결의 수단으로서 중요한 위치를 차지하고 있다. 대수영역에서 $x=y$을 보이거나 기하영역에서 주어진 두 변의 길이가 같음을 보이는 문제에서, $x \ge y$이고 $x \le y$이면 $x=y$임을 이용하면 쉽게 문제를 해결할 수 있는 것이 좋은 예일 것이다. 중등학교 교육과정에서는 중학교 수학 8-가 단계에서 일차부등식을 다루게 되고, 그 후 고등학교 1학년에서부터 3학년 교육과정에 이르기까지 내용이 연결되어 있을 뿐만 아니라 다른 영역에서도 부등식이 많이 활용되고 있다. 따라서 부등식에 대한 정확한 이해가 이루어지지 않으면 후속학습과 수학 문제해결에 어려움을 줄 수 있다.

지금까지 국내에서 이루어진 연구를 보면 일차부등식에 대한 연구(조의행, 1999; 김용호, 2001; 이경미, 2007; 정혜선, 2007; 김주일, 2008; 박은혜, 2008)와 이차부등식 또는 지수, 로그, 삼각부등식을 다룬 연구(우현철, 2000; 강호상, 2002; 고성순, 2009)가 있었지만 '미지수가 1개인 부등식'을 다룬 것이 대부분이다.

본 연구는 연구자가 '미지수가 2개인 부등식' 문제에 대해 고민하는 학생을 만나면서 시작된다. 그런데 학생이 범한 오류는 '미지수가 1개인 부등식'에 대한 연구가 대부분이던 기존의 연구에서 볼 수

없던 오류였다.

이러한 이유로 본 논문에서는 그 동안 연구가 미흡했던 '미지수가 2개인 연립일차부등식'에 대한 문제해결과정에서 학생들이 흔히 겪을 수 있는 오류에 대해 분석하고, 그 원인을 진단하여 학생이 일으키는 오류의 교정과 오류의 예방을 위한 바람직한 지도방안을 모색해 보고자 한다.

## 2. 수학적 오류

이종희(2002)는 수학적 오류란 학습자 개개인이 수학을 습득할 때 갈등을 일으키고 새로운 개념을 이해하는 데 방해가 되는 선행지식이나 자생적 관념을 의미한다고 하였으며, 인간의 사고 과정을 거쳐 나온 수학적 결과들은 절대적인 것이 아니라 인간 활동의 다른 결과물처럼 사회적으로 구성되는 것이므로 수학적 오류가 존재하고 그 수학적 오류를 극복하는 것은 수학 발전을 위해서 중요하다고 하였다. 또 오류를 분석하는 것은 학생들이 수학을 배우는 과정에 대한 다양한 출발점을 제공해주며 오류의 원인에 대한 고려는 수학 교사들이 학생들의 개인차에 대한 지식을 교육 과정 내용의 지식에 통합할 수 있도록 하기 때문에 중요하다(김선주, 2005).

학생이 일으키는 오류의 발생 원인에는 여러 가지가 있겠지만 김부미(2006)는 이전의 학습결과로 형성된 옳았던 개념이 특정 문맥에서는 오개념이 되는 과정이나 결과로서 발생되거나 개념과 개념이 Chunk(청크) 또는 Unpack(언팩)되는 과정에서 발생할 수 있고, 수학 학습 과정에서 같은 문제가 서로 다른 근원으로부터 오류를 발생시키기도 하며 같은 오류가 서로 다른 문제해결 과정에서 발생하기도 한다고 하였다. Radatz(1979)는 언어적 어려움, 공간 정보 획득의 어려움, 선행기술 및 사실과 개념의 미숙, 부정확한 결합 혹은 사고의 경직성, 부적절한 법칙이나 전략의 적용이 오류의 주된 원인이 되며 이것은 수학 과제에 포함된 정보를 얻거나 처리하고 재생산하는데 사용되는 매커니즘을 조사해보면 확인될 수 있다고 하였다. Christiansen, Howson & Otte(1986)는 학생들이 개인적인 방법을 사용할 때, 필수적인 어떠한 것들을 생략하게 되면서 오류를 범하게 된다고 하였고, 박선화(1998)는 Brousseau의 인식론적 장애가 오류의 원인이 된다고 하였다.

이처럼 학생들의 불완전하거나 부정확한 지식, 결함 있는 절차 사용, 교사의 잘못으로 인해 오류가 발생할 수 있으며 교사는 학생들의 오류를 확인하고 교정해줌으로써 효과적인 수학 학습을 실현하도록 해야 하며 학생들의 학습에 도움을 주어야 한다. 따라서 문제해결 과정에서 나타나는 오류를 분석하는 것은 학생들의 인지능력 파악을 통해 학생들의 이해 정도를 알아볼 수 있고(Tirosh, 2000), 학습의 실패 원인에 대한 정보를 얻게 되므로 새로운 학습에 있어서 적절한 교수·학습 방법을 효과적으로 구성하는데 도움이 될 수 있을 것이다.

### 3. 부등식의 중등학교 교육과정 분석

중등학교의 교육과정에서 부등식 단원에 대한 학습 내용을 간략하게 살펴보면 다음과 같다. '8-가 단계'에서는 처음으로 부등식과 일차부등식을 다루고 있으며, 부등식에서는 부등식의 뜻과 해, 부등식의 성질을 학습하게 되고, 일차부등식에서는 일차부등식의 풀이, 연립부등식, 일차부등식의 활용을 학습하게 된다. '8-가 단계'부등식 단원의 학습목표는 크게 5가지가 있다. 첫째, 부등식과 그 해의 뜻을 이해한다. 둘째, 부등식의 성질을 이해한다. 셋째, 일차부등식과 그 해를 이해하고, 일차부등식을 풀 수 있다. 넷째, 연립일차부등식과 그 해를 이해하고, 연립일차부등식을 풀 수 있다. 다섯째, 일차부등식 또는 연립일차부등식을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. 부등식의 정의와 부등식이 가지고 있는 성질을 배움으로써 부등식에 대한 기본 개념을 학습하게 된다. 또한 일차부등식과 연립일차부등식을 활용하여 실생활과 관련된 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 된다.

'9단계'에서는 부등식을 학습하지 않고, '10단계'에 올라가서 다시 부등식을 학습하게 된다. '10-가 단계'에서는 부등식의 성질과 절댓값을 포함한 일차부등식, 이차부등식과 연립이차부등식을 배우고, 간단한 절대부등식을 증명하는 것을 학습하게 된다. '10-가 단계'는 '8-가 단계'에서 학습했던 부등식에 대한 내용을 더 포괄적으로 확장시키므로 학생들은 '8-가 단계'에서 학습했던 부등식의 성질과 일차부등식의 풀이 방법을 알고 있어야 한다. '10-가 단계'부등식 단원의 학습목표는 크게 5가지 있다. 첫째, 부등식의 성질에서는 중학교에서 배웠던 내용을 일반화하여 실수의 대소 관계의 기본 성질을 이용하여 부등식의 성질을 이해하고 활용할 수 있도록 한다. 둘째, 절댓값을 포함한 일차부등식에서는 절댓값의 기호를 소개하고 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다. 셋째, 이차부등식에서는 이차부등식의 뜻을 알게 하고, 이차부등식의 풀이 방법을 알게 한다. 이차부등식의 해가 어떤 구간으로 나타내어짐을 수직선에서 충분히 이해할 수 있도록 하고 연립이차부등식도 이차부등식과 마찬가지로 같은 방법으로 해결을 한 후 공통부분을 찾아 답을 구할 수 있도록 한다. 넷째, 부등식의 증명에서는 절대부등식을 소개하고, 부등식의 정의와 성질을 이용하여 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

## Ⅱ. 연구의 실제

### 1. 문제제기 및 연구 대상자 특성

가. 문제제기

본 연구는 연구자가 지도하고 있는 한 학생이 미지수가 2개인 연립일차부등식과 관련된 문제 풀이에서 자신의 풀이가 잘못된 곳이 없음에도, 답지의 답과 맞지 않아 곤란해 하며 면담을 요청하였다. 그 학생과의 면담을 통해, 본 연구의 문제가 제기되었다.

나. 연구에 제기된 문제

| |
|---|
| $f(x)=ax+b$, $2 \le f(1) \le 4$, $0 \le f(2) \le 3$일 때, $f(0)$과 $f(3)$의 범위를 각각 구하시오. |

다. 연구 대상 학생의 풀이

위 문제에 대한 연구 대상 학생의 풀이를 살펴보면 다음과 같다.

> 먼저 $2 \le f(1) \le 4$이므로 $2 \le a+b \le 4$ … ①
> 또 $0 \le f(2) \le 3$이므로 $0 \le 2a+b \le 3$ … ②이다.
> 이 때, ②−①를 하면 $-4 \le a \le 1$ … ③이다.
> 또 2×①−②를 하면 $1 \le b \le 8$ … ④이다.
> 이 때, $f(0)=b$이므로 $1 \le f(0) \le 8$이다.
> 한 편, 3×③+④를 하면 $-11 \le 3a+b \le 11$이다.
> 이 때, $f(3)=3a+b$이므로 $-11 \le f(3) \le 11$이다.
> 따라서 $1 \le f(0) \le 8$이고 $-11 \le f(3) \le 11$이다. □

위의 풀이를 보면 계산상의 착오가 없을 뿐 만 아니라 논리상의 허점도 없는 것으로 보인다. 하지만 풀이에서 나온 결론은 교재에 제시된 정답과는 다르다. 이는 학생이 제시한 풀이에 중대한 허점이 있다는 것을 의미한다. 그래서 학생에게 위의 풀이는 잘못된 것이며 다시 한 번 재검토해 볼 필요가 있다고 알려주었고, 이에 학생은 풀이과정에 대해 논리적 혹은 계산상의 실수가 있었는지의 여부를 살펴보았다. 하지만 학생은 풀이에서 논리상의 허점과 계산상의 실수가 있는지에 대해서만 여러 차례 검토하였으며, 자신이 제시한 풀이에 대해 이상이 없는 것으로 결론을 내렸다.

라. 연구교사의 조언

여러 차례의 검토를 했음에도 불구하고 자신이 제시한 풀이에 대해 이상이 없는 것으로 결론 내리려던 학생에게 연구자는 다음과 같은 조언을 제공하였다. 학생의 풀이와 검토 과정을 지켜 본 후, 학생을 상대로 아래와 같이 면담을 통해 학생에게 자신의 풀이 과정상에 문제가 있음을 지적하였다. 학생과의 면담과정에 위압감이나 불편함이 없도록 오디오 녹음이나, 비디오 녹화 자료는 사용하지 않았으며 연구대상자와 연구자가 아닌 제 3자가 현장에서 컴퓨터로 기록하는 현장노트(Field Note) 방법으로 이루어졌다.

연구자 : 내가 보기에도 너의 풀이에 계산상의 실수는 전혀 없어.
학 생 : 그렇지요.

연구자 : 그러면 어디에 문제가 있는 것일까? 자 이번에는 네가 계산해 놓은 결과들을 가지고 다르게 풀이해 보자.

학 생 : 예.

연구자 : 너의 풀이에서 이미 구해 놓은 ②, ③식을 이용하여 $3a+b$의 범위를 구해 보자. 만약 ②+③을 하면 $-4 \le 3a+b \le 4$가 된다. 따라서 $-4 \le f(3) \le 4$이다. 그렇지?

학 생 : 예, 그런데 이것은 제가 구한 답과는 다르네요.

연구자 : 이것은 너의 풀이에서 제시된 $-11 \le f(3) \le 11$과 다른 결론이다. 이 풀이의 과정이 잘못되었다고 생각하니?

학 생 : 아니오.

연구자 : 만약 이 풀이가 계산상의 실수나 논리상의 허점이 없다면, 위에서 제시한 너의 풀이와 이 풀이의 정답이 다른 이유를 어떻게 설명할 수 있겠니?

학 생 : 아직은 잘 모르겠습니다.

연구자 : 이 풀이 이외에도 다음과 같이 풀어도 다른 답을 구할 수 있어. (①+②)−④를 하면 $-6 \le 3a+b \le 6$이 된다. 이 풀이의 결론 역시 네가 제시한 결론과 다르지.

학 생 : 예.

연구자 : 이것을 어떻게 설명할 수 있겠니? 어느 것이 과연 정답이지?

학 생 : 글쎄요 뭔가 잘못된 것 같은데 아직은 잘 모르겠어요.

위의 조언을 받은 학생은 드디어 자신의 풀이에 이상이 있다는 의심을 품기 시작하였다. 학생은 자신의 풀이와 연구자의 조언을 비교해가면서 왜 이렇게 다양한 결론이 나오는 것인지 고민하기 시작했으며, 문제가 잘못된 것 아닌가에 대해 의구심을 품기도 하였다. 연구자의 조언을 받은 이후 학생은 처음 자신이 풀이한 풀이에 대해 논리적인 결함이 있을 것이라는 막연한 추측을 하기도 하였다. 그러나 자신의 풀이와 위의 조언에서 제시된 풀이에 내재해 있는 논리적 허점을 끝내 발견하지는 못하였다.

### 마. 연구대상자의 특성

연구자에게 의문을 제기한 학생은 경남 창원 소재 D고등학교 2학년 학생으로서 수학성적이 우수하며, 평소 수학에 대한 관심이 매우 높은 학생이다. 또 본 연구자에게 자주 다양한 문제에 대해 물어올 만큼 수학문제에 대한 도전의식과 탐구심이 강하며 자신의 생각이나 문제 풀이에 대해 수학적으로 충분히 자신의 생각을 표현할 수 있는 수학적 의사소통 능력 또한 뛰어나다. 이 학생의 수학 학습 선행 정도는 이미 '10-가 단계'의 수학과정을 학습하여 충분히 숙지하고 있으며, '10-가 단계'에서 제시되는 평이한 문제에 대해 별 어려움 없이 해결할 수 있는 수준이다. 특히 부등식과 관련된 학습에서는 '미지수가 2개인 연립일차부등식'을 해석기하학적으로 좌표평면을 이용하여 능숙히 해결할 수 있는 할 수 있는 학생이다.

## 2. 학생이 범한 오류의 원인

학생은 교사의 조언에도 불구하고 자신의 풀이에서의 논리적 허점을 발견하지 못하였다. 이것은 무엇 때문일까? 현 교육과정에서는 부등식의 경우 방정식을 배운 이 후 학습하도록 되어 있다. 그런데 일부의 경우를 제외하고 방정식의 여러 가지 성질이 대부분 부등식에서도 그대로 성립하는 경우가 많이 있다. 따라서 방정식을 학습한 학생들은 부등식을 학습하면서 방정식에서 사용한 방법을 부등식에서도 같은 방법을 적용하여 문제를 해결하는 경험을 많이 갖게 된다.

앞에서 살펴본 것과 같이 '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 경우 연립부등식을 좌표평면 위에서 영역을 표시하여 해결하는 방법이 '10-가 단계'에서 소개되고 있다. 이 학습을 하기 전에 배우게 되는 것은 '8-가 단계'에 나오는 '미지수가 1개인 일차부등식'과 '미지수가 1개인 연립일차부등식' 그리고 '10-가 단계'에 나오는 '미지수가 1개인 이차부등식' 등이 있다. '미지수가 2개인 연립일차부등식'을 학습하기 이전에 배우게 되는 부등식에 관한 내용들은 '미지수가 1개인 부등식'이기 때문에 '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 학습에 영향을 미치지 못한다. 오히려 '8-가 단계'에서 학습하는 '미지수가 2개인 연립일차방정식'이 '미지수가 2개인 연립일차부등식'과 유사한 점이 많기 때문에 '미지수가 2개인 연립일차방정식'을 해결하면서 익힌 풀이 방법이 '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 해결에도 같은 방식으로 적용될 것이라는 기대를 갖게 한다.

연립방정식을 해결할 때, 많이 사용하는 성질로는 다음과 같은 것이 있다.

| |
|---|
| [성질 Ⅰ] $A = B$이고 $C = D$이면 $A + C = B + D$이다. |
| [성질 Ⅱ] $A = B$이고 $C = D$이면 $A - C = B - D$이다. |

위 [성질 Ⅰ]과 [성질 Ⅱ]는 연립부등식을 풀 때에도 유사하게 성립할 것이라는 생각을 갖게 하여, 다음과 같은 성질이 성립할 것이라고 단정 짓고, 이를 통해 문제를 해결하는 경험을 갖게 되는 것이다.

| |
|---|
| [성질 Ⅲ][2] $A \le B \le C$이고 $D \le E \le F$이면 $A + D \le B + E \le C + F$이다. |
| [성질 Ⅳ][3] $A \le B \le C$이고 $D \le E \le F$이면 $A - D \le B - E \le C - F$이다. |

비록 '미지수가 2개인 연립일차부등식'을 좌표평면 위에 영역을 표시하여 해결하는 방법을 배웠다 하더라도 같은 문제에 대해 다양한 풀이가 존재하는 수학 문제의 특성상 '미지수가 2개인 연립부등식'을 좌표평면 위에 영역을 표시하여 해결하는 과정을 선택하지 않고 위와 같은 성질을 이용하여 해결하려는 것은 어쩌면 자연스러운 발상이다.

2) [성질 Ⅲ]는 [성질 Ⅰ]로부터 유추된 성질임.
3) [성질 Ⅳ]는 [성질 Ⅱ]로부터 유추된 성질임.

특히 연립방정식의 경우에 [성질 Ⅰ]과 [성질 Ⅱ]는 어떠한 경우에도 성립하는 것이다. 따라서 자연스럽게 연립부등식의 [성질 Ⅲ]과 [성질 Ⅳ]도 특별한 조건이 없어도 언제나 성립하는 명제라고 생각하기 쉽다. 즉, 연립방정식을 통해 학습된 성질이 연립부등식에서도 그대로 성립할 것이라는 생각이 학생들에게 오류를 갖게 하기 쉽다.

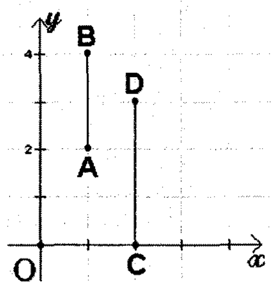
### 3. 바람직한 지도방안

가. 해석기하적 접근에 따른 오류 진단 및 지도

1) 학생이 범한 오류의 진단-해석기하적 해석

가) $xy$－평면에서의 오류 진단

학생의 풀이에서 제시된 답과 연구자의 조언에서 제시된 답이 다른 것으로 보아 위의 두 풀이에는 심각한 논리적 오류가 숨어 있음을 알 수 있다. 따라서 오류의 원인을 진단해 보면 다음과 같다. $-4 \le a \le 1$ … ③와 $1 \le b \le 8$ … ④은 맞는 결론이다. 그러나 $3\times$③+④을 하여 구한 $-11 \le 3a+b \le 11$이나 ②+③을 하여 구한 $-4 \le 3a+b \le 4$이나 (①+②)−④을 하여 구한 $-6 \le 3a+b \le 6$은 모두 잘못된 결론이다. $-4 \le a \le 1$ … ③와 $1 \le b \le 8$ … ④은 왜 올바른 결론이고, $3\times$③+④을 하여 구한 $-11 \le 3a+b \le 11$이나 ②+③을 하여 구한 $-4 \le 3a+b \le 4$이나 (①+②)−④을 하여 구한 $-6 \le 3a+b \le 6$은 잘못된 결론인지를 알아보기 위해 위의 문제를 <그래프 1>을 통해 접근해 보자.




<그래프 1>

$f(x)=ax+b$에서 $2 \le f(1) \le 4$라는 것은 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 <그래프 1>에서 선분 $AB$를 지난다는 것을 의미한다. 마찬가지로 $0 \le f(2) \le 3$이라는 조건은 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 <그래프 1>에서 선분 $CD$를 지난다는 것을 의미한다. 즉, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 선분 $AB$와 선분 $CD$를 동시에 지나는 직선을 의미한다.

한편, 함수 $f(x)=ax+b$에서 $a$는 직선인 그래프의 기울기를 의미하고 $b$는 직선 그래프의 $y$절

편을 의미한다. 따라서 기울기 $a$는 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $A$와 점 $D$를 지나는 직선일 때 최대가 되고, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $B$와 점 $C$를 지날 때 최소가 된다. 따라서 $-4 \le a \le 1$이다. 이는 학생이 제시한 풀이에서의 결과와 동일함을 알 수 있다. 마찬가지로 $y$절편 $b$는 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $B$와 점 $C$를 지날 때 최대가 되고, 점 $A$와 점 $D$를 지날 때 최소가 되므로 $1 \le b \le 8$이다. 이것 또한 학생이 제시한 풀이에서의 결과와 일치함을 알 수 있다.

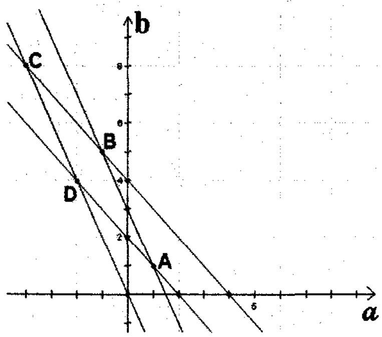
$2 \le a+b \le 4$ … ①과 $0 \le 2a+b \le 3$ … ②에서 ①−②를 하여 구한 $-4 \le a \le 1$ … ③과 2×①−②를 하여 구한 $1 \le b \le 8$ … ④가 올바른 것은 $a+b$와 $2a+b$가 서로 관련이 없기 때문이다. $a+b=2$라고 하자. 함수 $f(x)=ax+b$에서 $f(1)=2$가 된다는 것이므로 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 <그래프 1>의 점 $A$를 지난다는 의미를 지니고 있다. 그런데 함수 $f(x)=ax+b$가 점 $A$를 지난다는 것은 함수 $f(x)=ax+b$가 선분 $CD$ 위의 어떤 점을 지날지에 대해서는 전혀 영향을 미치지 못한다. 이는 $2a+b$의 값은 $a+b$의 값과 관계없이 0 이상 3 이하의 어떠한 값도 취할 수 있음을 뜻한다.

한편, 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프에서 $a$의 값에 대해 $b$의 값은 자유롭게 결정되는 것이 아니라 $b$의 값은 $a$의 값에 의해 결정된다. 예를 들면, $a=1$일 때, $b$의 값은 $1 \le b \le 8$범위 내에 있는 어떠한 값을 취할 수 있는 것이 아니라 $b=1$이 되어야 한다. 마찬가지로 $a=-4$일 때, $b=8$이 된다. 즉, $a$와 $b$의 값은 서로 관련이 있는 것이다.

학생이 제시한 풀이에서 3×③+④을 하여 구한 잘못된 결론 $-11 \le 3a+b \le 11$은 두 변수 $a$와 $b$의 관련성에 대해 전혀 인식하지 못한 결과이다. 연구자의 조언에서 제시된 ②+③을 하여 구한 잘못된 결론 $-4 \le 3a+b \le 4$ 또는 (①+②)−④를 하여 구한 잘못된 결론 $-6 \le 3a+b \le 6$ 역시도 마찬가지로 변수 $a$와 $b$의 관련성에 대해 전혀 인식하지 못했기 때문이다. 두 변수의 관련성을 인식하지 못한 학생은 $a$가 최솟값 $-4$가 될 때 $b$ 역시도 최솟값 1이 될 수 있고, $a$가 최댓값 1가 될 때 $b$ 역시도 최댓값 8이 될 수 있다고 생각하여 풀이에서와 같은 잘못된 결론에 도달하게 된 것이다.

나) $ab$−평면에서의 오류 진단

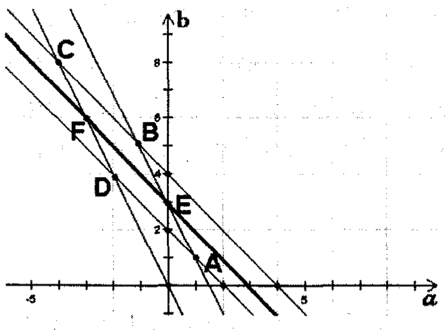
학생의 문제 풀이의 오류를 진단하기위해 해석기하학적인 방법을 사용하려고 할 때, $x$, $y$를 변수로 생각하는 것이 일반적이긴 하나 $a$, $b$를 변수로 생각하는 것 또한 일반성을 위배하지는 않는다. 따라서 이제 $a$, $b$를 변수로 생각하여 학생의 풀이에서 제시된 답과 교사의 조언에서 제시된 답을 다음 <그래프 2>를 통해 진단해 보자.




<그래프 2>

$f(x)=ax+b$에서 $2 \le f(1) \le 4$라는 것은 $2 \le a+b \le 4$이므로 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 <그래프 2>에서 직선 $BC$와 직선 $AD$ 사이의 영역을 의미한다. 마찬가지로 $0 \le f(2) \le 3$이라는 조건은 $0 \le 2a+b \le 3$과 같으므로 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 <그래프 1>에서 직선 $AB$와 직선 $CD$ 사이의 영역을 의미한다. 따라서 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 $2 \le f(1) \le 4$와 $0 \le f(2) \le 3$을 동시에 만족하는 영역은 $\square ABCD$가 된다.

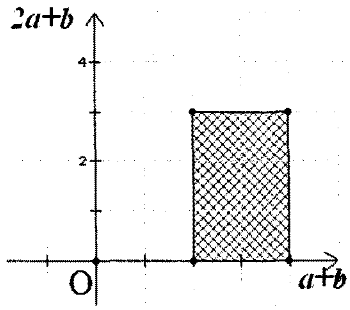
문제에서 주어진 조건을 만족하는 영역 $\square ABCD$에서 $a$는 점 $A$에서 최대가 되고 점 $C$에서 최소가 되는 반면, $b$는 점 $C$에서 최대가 되고 점 $A$에서 최소가 됨을 알 수 있다. 따라서 변수 $a$와 변수 $b$의 범위를 살펴보면 $-4 \le a \le 1$이고 $1 \le b \le 8$이다. 이는 학생의 풀이에서 제시한 결과와 다르지 않다.




<그래프 3>

$2 \le a+b \le 4$ … ①과 $0 \le 2a+b \le 3$ … ②에서 ①−②을 하여 구한 $-4 \le a \le 1$ … ③와 2×①−②을 하여 구한 $1 \le b \le 8$ … ④가 올바른 것은 $a+b$와 $2a+b$가 연관성이 없기 때문이다. $a+b=3$라고 하자. 그러면 $a+b=3$을 만족하는 $(a,\ b)$는 <그래프 3>의 직선 $EF$ 위의 점이 된다. 이제 $2a+b=k$라 두면 $b=-2a+k$이므로 $k$는 <그래프 3>에서 기울기가 $-2$인 직선

의 $y$절편을 의미한다. 한편 직선 $b=-2a+k$는 직선 $EF$을 지나야 하고 또 $0 \le 2a+b \le 3$이므로 직선 $b=-2a+k$는 선분 $EF$를 지나야 한다. 그런데 직선 $b=-2a+k$는 선분 $EF$의 모든 점을 지나므로 직선 $b=-2a+k$의 $y$절편 $k$는 0 이상 3 이하의 어떠한 값도 될 수 있다. $a+b$의 값이 3이 아닌 경우에도 위와 같은 설명이 가능하다. 따라서 $2a+b$의 값은 $a+b$의 값과 관계없이 0 이상 3 이하의 어떠한 값도 취할 수 있음을 알 수 있다. 이러한 사실을 다음 <그래프 4>에 표현해 보면 다음과 같다.




<그래프 4>

이에 반해 $3\times$③+④를 하여 구한 $-11 \le 3a+b \le 11$이나 ②+③을 하여 구한 $-4 \le 3a+b \le 4$ 또는 (①+②)−④를 하여 구한 $-6 \le 3a+b \le 6$은 두 변수 $a$와 $b$가 서로 관련이 있기 때문에 타당하지 않은 결과이다. 점 $A$에서 변수 $a$는 최대가 되지만 변수 $b$는 최소가 되고, 점 $B$에서 변수 $a$는 최소가 되지만 변수 $b$는 최대가 된다. 즉, 변수 $a$와 변수 $b$는 서로 관련이 있는 것이다. 이러한 사실은 <그래프 2>의 $\square ABCD$가 <그래프 4>와 같은 각 변이 축에 평행한 직사각형이 아니라는 사실로부터 직관적으로 유추될 수 있다.

하지만 두 변수의 관련성을 인식하지 못한 학생은 $a$가 최솟값 $-4$가 될 때 $b$ 역시도 최솟값 1이 될 수 있고, $a$가 최댓값 1가 될 때 $b$ 역시도 최댓값 8이 될 수 있다고 생각하여 풀이에서와 같은 잘못된 결론에 도달하게 된 것이다.

2) 오류에 대한 해석기하적 지도

연구자의 조언에서 학생은 자신의 풀이에 대해 무엇인지는 모르지만 잘못이 있다는 것을 인식하였다. 하지만 끝내 자신의 풀이에서 오류를 찾지 못해 다음과 같이 지도하였다.

연구자 : 자 그럼 어디가 잘못된 것인지 찾아볼까?
학 생 : 예.
연구자 : 주어진 문제에서 $f(x)=ax+b,\ 2 \le f(1) \le 4,\ 0 \le f(2) \le 3$이라는 조건에서 좌표 평면에 나타내 보면 다음과 같지. (<그래프 1>을 그려줌)

학 생 : 그래요.
연구자 : 그러면 $f(0)$의 범위를 어떻게 구하면 될까?
학 생 : 함수 $f$가 $2 \le f(1) \le 4$와 $0 \le f(2) \le 3$를 만족해야 하고, $f(0)$는 $y$절편을 나타내므로… (잠시 후)… 점 $B$와 점 $C$를 지날 때 제일 크고, 점 $A$와 점 $D$를 지날 때 제일 작아요.
연구자 : 그렇구나. 한번 구해 볼까?
학 생 : $1 \le f(0) \le 8$가 되는군요.
연구자 : 그럼, 이번에는 $f(3)$을 구해 볼까?
학 생 : 같은 방법으로 하면 되니까. 점 $B$와 점 $C$를 지날 때 제일 작고, 점 $A$와 점 $D$를 지날 때 제일 커요. 그래서 $-4 \le f(3) \le 4$군요.
연구자 : 그래, 그런데 앞서 제시한 풀이에서의 정답과 지금의 정답이 왜 차이가 날까?
학 생 : (자신의 풀이와 지금의 풀이를 비교한 후) 저는 $a$, $b$에 대해 고민하지 않았는데, 지금 보니 $a$와 $b$는 함수 $f$에 의해 연관[4]이 있는 것 같아요.
연구자 : 그렇지. 너의 풀이는 그 점을 간과해서 그런 거야.
학 생 : 선생님 알긴 알겠는데. 조금 이상한데요.
연구자 : 뭐가 그렇지?
학 생 : 그럼, 왜 제가 구한 답과 지금 풀이한 답을 비교해보면, $f(0)$의 범위는 맞고 $f(3)$의 범위는 다를까요. 틀리면 다 틀리고 맞으면 다 맞아야 하는 거 아닌가요?
연구자 : 그렇구나. 그건 조금 있다 다시 생각하기로 하자.
연구자 : 조금 전 우리는 좌표 평면을 $xy-$평면으로 생각하고 풀었는데 다른 방법은 없을까?
학 생 : 그거야 $a$와 $b$를 변수로 생각해서 $ab-$평면으로 해서 그리면 되지요.
연구자 : 그래 맞다. 그럼 이런 종류의 부등식 문제는 쉽게 풀이 할 수 있겠니?
학 생 : 예, 변수들의 연관성을 따져보고, 그래프를 그리면 되겠군요.
연구자 : 그래. 그렇단다.

연구자의 지도를 통해 학생은 자신의 풀이에서의 오류가 무엇인지를 파악하였으며, 오류의 원인에 대해 알게 되었으며, 이와 같은 오류의 교정을 통해 학생은 그래프를 이용한 부등식의 문제풀이가 유용함도 알게 되었다.

아울러 $ab-$평면에서 $\square ABCD$의 모든 변이 각각 $a$축과 $b$축에 평행한 직사각형이라면 변수 $a$의 값에 관계없이 $b$의 값이 결정될 수 있어 $a$의 범위가 나타나는 부등식과 $b$의 범위가 나타나는 부등식 사이의 연산이 가능하고, 그 이외의 경우에는 $a$의 값과 $b$의 값의 관련성으로 인하여 $a$의 범위가 나타나는 부등식과 $b$의 범위가 나타나는 부등식 사이의 연산이 가능하지 않음을 주지시킬 필요가 있다.

### 나. 대수적 접근에 따른 오류의 진단 및 지도

#### 1) 학생이 범한 오류의 진단-대수적 해석

대수적 입장에서 보면 $a$의 값과 $b$의 값이 서로에게 영향을 미치지 않는다면 학생의 풀이에서 전

4) 본 연구에서는 종속적 혹은 독립적인 용어의 사용으로 학생의 혼란을 야기시킬 수 있으므로 학생의 용어를 그대로 사용함.

혀 오류를 찾지 못할 것이다. 하지만 연구의 문제에서는 분명 $a$의 값과 $b$의 값이 서로에게 영향을 미치고 있다. 만약 $a=1$이라고 하면, $2 \le a+b \le 4$는 $1 \le b \le 3$이 되고 $0 \le 2a+b \le 3$은 $-2 \le b \le 1$이 되므로 $b=1$이다. 마찬가지로 $a=-2$라고 하면, $2 \le a+b \le 4$은 $4 \le b \le 6$이 되고 $0 \le 2a+b \le 3$은 $4 \le b \le 7$이 되므로 $b=4$이다. 즉, $a$의 값에 관계없이 $b$의 값이 결정되는 것이 아니라 $a$의 값에 따라 $b$의 값이 결정된다는 것이다. 이와 같이 $a$의 값과 $b$의 값이 서로 관련이 있기 때문에 학생이 제시한 풀이에서 오류가 발생한 것이다.

이러한 문제는 비단 변수에만 나타나는 것이 아니라 식에서도 야기된다. 연구에서 제기된 문제에서 보면 $2 \le f(1)(=a+b) \le 4$와 $0 \le f(2)(=2a+b) \le 3$에서 사실 $f(1)$과 $f(2)$는 서로에게 영향을 미치지 않는다. 그래서 $-4 \le a(=f(2)-f(1)) \le 1$와 $1 \le b(=2(f(1)-f(2)) \le 8$의 값은 타당성을 갖는다. 하지만 $-4 \le a \le 1$와 $1 \le b \le 8$는 $2 \le f(1)(=a+b) \le 4$와 $0 \le f(2)(=2a+b) \le 3$의 두 식의 연산[5]에 의해 나타나는 것으로 밀접한 연관성을 갖는다. 그래서 $f(3)$의 범위를 $-4 \le a \le 1$와 $1 \le b \le 8$의 두 식의 연산에 의해 구하게 되면 잘못된 결과가 나타나는 것이다.

그렇기 때문에 '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 경우, 처음에 주어진 두 식이 서로에게 영향을 미치지 않는다면' 주어진 두 식의 연산에서 얻어진 제 3의 식'은 항상 타당하다. 하지만 '주어진 두 식의 연산에서 얻어진 제 3의 식'과 처음 주어진 두 식 중 한 식과의 연산으로부터 얻어지는 식에 대한 타당성은 보장할 수 없다.

예를 들어, 연립부등식$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$이 주어져 있을 때, 두 식의 연산으로부터 생성된 식 $7 \le 3x+2y \le 12$은 타당하다. 그러나 $7 \le 3x+2y \le 12$과 $2 \le y \le 3$의 연산으로 생성된 $4 \le 3x+y \le 10$은 타당하다고 할 수 없다.

마찬가지로 '주어진 두 식의 연산에서 얻어진 제 3의 식'과 '주어진 두 식의 연산에서 얻어진 또 다른 제 3의 식'의 연산으로부터 얻어지는 식에 대한 타당성도 보장할 수 없다.

예를 들어, 연립부등식 $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$이 주어져 있을 때, 두 식의 연산으로부터 생성된 식 $7 \le 3x+2y \le 12$와 $-1 \le 2x-y \le 2$은 타당하다. 그러나 $7 \le 3x+2y \le 12$와 $-1 \le 2x-y \le 2$의 연산으로 생성된 $6 \le 5x+y \le 14$은 타당하다고 할 수 없다.

2) 오류에 대한 대수적 지도

해석기하적 방법에 의한 지도에서는 학생의 풀이에서 $f(0)$의 범위는 정확하지만 $f(3)$의 범위는 정확하지 않는지에 대한 정확한 설명이 이루지지 않았다. 그래서 다음과 같은 지도를 통해 학생이 제기한 의문이 해소되도록 지도하였다.

---

5) 주어진 두 식 혹은 두 변수에 대해 각각에 0이 아닌 상수 배 후 덧셈하는 것으로 정의하며, 이후에 나오는 두 식의 연산은 모두 이러한 연산을 의미하는 것임.

연구자 : 자, 그럼 아까 네가 제시한 의문을 다시 생각해 볼까?
학 생 : 뭐 말이지요.
연구자 : 왜 $f(0)$의 범위는 맞고 $f(3)$의 범위는 다른가 하는 것 말이야.
학 생 : 아, 그거 말이군요.
연구자 : 너의 풀이가 무엇이 잘못되었다고 했는지 기억나니?
학 생 : 예, $a$와 $b$가 연관이 있는데 연관성을 고려하지 않고 풀어서 그랬어요.
연구자 : 이 문제를 제외하고 지금까지 풀었던 연립 부등식문제는 그럼 어떻게 풀었지? 아마도 거의 연관성을 고려하지 않고 풀었을 것 같은데.
학 생 : 예. 맞아요. 그냥 지금까지 풀었던 방법으로 풀었는데……. 답은 다 맞았어요.
연구자 : 왜 그럴까?
학 생 : 확인은 안 해 봤지만 연관성이 없었을 것 같아요.
연구자 : 아마 그럴 것 같다. 그럼 연관성이 없다면 지금까지의 풀이 방법은 아무 문제가 없다는 사실을 받아들일 수 있겠네.
학 생 : 예.
연구자 : 연관성이 있다면 그래프를 그리는 방법으로 해결하면 되고 말이지.
학 생 : 예.
연구자 : 그러한 연관성은 식에도 그대로 만족 된단다. 사실 주어진 문제에서, $2 \le f(1) \le 4$, $0 \le f(2) \le 3$이라는 조건의 $f(1)$과 $f(2)$는 사실 연관성은 없단다. 만약 $f(1) = 3$이라고 한다 해도 $f(2)$ 값이 결정되지 않아 이것은 $f(1)$과 $f(2)$는 연관성이 없다는 걸 말해주는 거야.
학 생 : 알겠습니다. 마치 $f(1)$과 $f(2)$를 변수처럼 생각해서 연관성을 확인하는 군요.
연구자 : 그래, 그래서 $f(0)$의 값의 범위를 구할 때, $f(0) = b = 2f(1) - f(2)$ 임을 이용하여 구한 풀이가 타당한 값을 가지게 된거야.
학 생 : 아, 그렇구나.
연구자 : 그런데 $f(3)$의 값을 구할 때는 위에서 구한 $f(0)$의 범위를 사용하면서 연관성 있는 식을 사용해서 구해버린 거야. 그래서 답과는 틀린 결과를 얻게 된 거야.
학 생 : 아, 알겠습니다.
연구자 : 그럼 혹시 $f(3)$의 값도 연관성 없는 두 식으로 구할 수 없을까?
학 생 : (한참 생각 후) $f(3) = 3a + b = 2f(2) - f(1)$이니까. $-4 \le f(3) \le 4$입니다. 이러니까 답이 한 번에 나오는군요.
연구자 : 그래, 그래서 부등식에서는 변수 뿐 아니라 식의 연관성을 따져 보는게 중요해.
학 생 : 예, 알겠습니다. 감사합니다.

이 지도를 통해 학생은 자신의 풀이에 대한 오류뿐만 아니라, 미지수가 2개인 연립일차 부등식에서 어떠한 풀이를 선택하여야하는지, 잘못된 선택을 하였을 경우 어떠한 일이 발생하는지에 대한 이해가 이루어졌다.

다. 공리적 접근에 의한 지도방안

'미지수가 2개인 연립일차부등식'의 효율적인 지도와 학생들의 오류를 줄이기 위해 다음과 같은 정의와 정리들은 꼭 필요하다고 생각된다. 그래서 수학교과서에 다음과 같은 내용이 첨가되어 지도 된다면 학생들이 '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 학습에 많은 도움과 오류를 줄일 수 있을 것으로 판단된다.

| |
|---|
| [정의 Ⅰ] 주어진 두 변수 $x$, $y$에 대해, 변수 $y$의 값이 $x$의 값에 관계없이 결정된다면, '$x$와 $y$는 변수 독립'이라 하고, $y$의 값이 $x$의 값에 따라 결정된다면, '$x$와 $y$는 변수 종속'이라 하자. |

예1) '두 변수 $x$, $y$에 대해 $1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 4$일 때, $x+y$의 범위를 구하시오.' 라는 문제에서 각각의 변수는 그들의 값에 영향을 미치지 않으므로 $x$와 $y$는 변수 독립이다. 하지만 '두 변수 $x$, $y$에 대해 $1 \le x+y \le 2$, $2 \le 2x-y \le 4$일 때, $x-y$값을 구하라.'는 문제에서 $-\frac{2}{3} \le y \le \frac{2}{3}$임에도 불구하고 $x=1$이라면 $y=0$이 되므로 $x$와 $y$는 변수 종속이다.

| |
|---|
| [정의 Ⅱ] 주어진 두 식 $A$, $B$에 대해, 식 $B$의 값이 $A$의 값에 관계없이 결정된다면, '$A$와 $B$는 식 독립'이라 하고, $B$의 값이 $A$의 값에 따라 결정된다면, '$A$와 $B$는 식 종속'이라 하자. |

예2) '두 변수 $x$, $y$에 대해 $1 \le x+y \le 2$, $2 \le 2x-y \le 4$ 일 때, $x-y$값을 구하라.'라는 문제에서 $A=x+y$, $B=2x-y$라 두면 두 식은 서로의 값에 관계없이 결정되므로 $A$와 $B$는 식 독립이다. 하지만 문제에서 주어진 두 부등식의 연산에 의해 얻어진 식 $0 \le x-2y \le 3$에서 $C=x-2y$라 두면 식 $A$와 $C$는 식 $B$로 인하여 서로의 값에 영향을 미치게 되므로 $A$와 $C$는 식 종속이다.

| |
|---|
| [정의 Ⅲ] 부등식에서 두 변수 $x$, $y$(혹은 두 식 $A$와 $B$)에 각각 0이 아닌 상수 배 후 덧셈을 하는 연산을 '대수적 연결'이라 하자. |

예3) '두 변수 $x$, $y$에 대해 $1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 4$일 때, $2x+y$의 범위를 구하시오.'라는 문제의 풀이를 위해 $1 \le x \le 2$ ⋯ ①, $2 \le y \le 4$ ⋯ ②라 하면, $2x+y$의 식은 ①×2+②로의 연산이 필요하다. 이 때의 연산은 대수적 연결이다.

[정리 Ⅰ] 부등식에서 두 변수 $x$, $y$(혹은 두 식 $A$와 $B$)에서 대수적 연결에 의해 나온 식은 원래의 변수(혹은 식)와는 종속이다.

[정리 Ⅱ] 두 변수 $x$, $y$(혹은 두 식 $A$와 $B$)가 독립일 때, $a \le x \le b$이고 $c \le y \le d$(각각 $a \le A \le b$이고 $c \le B \le d$)이면 대수적 연결에 의한 풀이는 타당하다.
즉, $ha+kc \le hx+ky$(혹은 $hA+kB$) $\le hb+kd$이고,
$ha-kd \le hx-ky$(혹은 $hA-kB$) $\le hb-kc$이다.
(단, $a$, $b$, $c$, $d$는 상수이며 $h$, $k$는 양인 상수)

'미지수가 2개인 연립일차부등식'을 지도할 때, 문제에서 주어진 조건 속에서 두 변수 (혹은 두 식) 사이의 관계를 검토하는 것이 무엇보다 필요하다. 변수(혹은 식)가 독립이라면 우리는 대수적 연결에 의한 풀이를 시도할 수 있기 때문이다. 하지만 종속이라면 단순한 대수적 연결로는 풀이를 완성할 수 없으며 앞에서 소개한 해석기하적 방법 혹은 대수적 방법 등 새로운 풀이법을 시도하여야 한다.

예를 들면, $3 \le x \le 5$, $2 \le 2x-y \le 4$의 두 식으로부터 $x-y$의 범위를 구하는 경우에 주어진 조건 $3 \le x \le 5$와 $2 \le 2x-y \le 4$에서 두 식 $x$와 $2x-y$가 식 독립인지 식 종속인지를 살펴보아야 한다. 만약 두 식이 식 독립이라면 위의 [정리 Ⅱ]에 의한 풀이법을 시도할 수 있을 것이고, 식 종속이라면 그래프를 이용하는 해석기하적 접근이 더 편리한 풀이법이 될 것이다.

이러한 접근은 '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 풀이에만 국한된 것이 아니다. 다음과 같이 '$y=\cos^2 x+2\sin x-3$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.'라는 문제가 주어졌을 때, 대수적 연결에 의한 풀이 $0 \le \cos^2 x \le 1$이고 $-2 \le 2\sin x \le 2$이므로 $-5 \le \cos^2 x+2\sin x-3 \le 0$라는 결론 역시 잘못된 것이다. 왜냐하면 $\cos^2 x=1$이라면 $2\sin x$는 $-2 \le 2\sin x \le 2$ 범위의 모든 값을 취할 수 있는 것이 아니라 $2\sin x=0$이 된다. 즉 $\cos^2 x$와 $2\sin x$는 식 종속이다. 그러므로 이 문제의 풀이는 해석기하적 방법이 더 용이하다고 할 수 있다.

또 다른 예를 살펴보면, '$1 \le x \le 3$일 때, $2x$의 범위를 구하여라.'라는 문제에서 $5 \le 5x \le 15$이고 $-9 \le -3x \le -3$이므로 두 식을 더하면 $-4 \le 2x \le 12$라는 결론은 잘못된 것이다. 이는 $5x$와 $-3x$가 식 종속이기 때문이다.

## Ⅲ. 결론 및 제언

본 논문에서는 미지수가 2개인 연립일차부등식에 대해 한 학생의 오류가 있는 풀이를 통해 오류의 원인에 대해 살펴보고, 해석기하적, 대수적 접근을 통해 오류를 분석하는 과정을 통해 학생이 오류를 줄일 수 있도록 하기위한 바람직한 지도방안은 어떤 것이 있는지 살펴보았다. '미지수가 2개인

연립방정식'에서 성립하는 성질이 '미지수가 2개인 연립일차부등식'에서도 그대로 성립할 것이라는 잘못된 생각으로 인해 학생들은 '미지수가 2개인 연립부등식'의 풀이에서 앞에서와 같은 오류를 범하기 쉽다. 따라서 이러한 점을 잘 숙지하여 교사는 학생들에게 연립방정식과 연립부등식의 풀이 방법은 서로 다름을 주지시킬 필요가 있다. 연립방정식에서는 두 등식의 덧셈이 자유롭게 이루어질 수 있지만 연립부등식에서는 두 부등식의 덧셈이 항상 성립하는 것은 아님을 알려주어야 한다. 두 부등식에 나타나는 변수나 식의 관련성에 의해 두 부등식의 덧셈의 성립 여부가 결정된다는 것을 가르쳐주어야 한다. '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 경우, 처음에 주어진 두 식이 서로에게 영향을 미치지 않는다면 주어진 '두 식의 연산에서 얻어진 제 3의 식'은 항상 타당하지만, '주어진 두 식의 연산에서 얻어진 제 3식'과 처음 주어진 두 식 중 한 식 과의 연산으로부터 얻어지는 식에 대한 타당성은 보장 할 수 없다는 것을 설명해주어야 한다. 마찬가지로 처음에 주어진 두 식이 서로에게 영향을 미치지 않는다면 '주어진 두 식의 연산에서 얻어진 제 3의 식'과 '주어진 두 식의 연산에서 얻어진 또 다른 제 3의 식'의 연산으로부터 얻어지는 식에 대한 타당성도 보장할 수 없다는 것을 알려주어야 한다. 아울러 '미지수가 2개인 연립일차부등식'을 다룰 경우 대수적 기법이 변수들 사이의 관련성으로 인하여 조심스러워야 하므로 해석기하적으로 좌표평면을 도입하여 문제에 접근하는 것이 용이함을 설명해주어야 한다.

그리고 '미지수가 2개인 연립일차부등식'에서 범하기 쉬운 오류에 대한 소개가 교사용 지도서에 주의사항으로 들어갈 필요가 있으며, 아울러 공리적 접근에 나오는 두 변수 사이의 관계에 대한 세 가지 정의와 두 가지 정리가 교육내용에 추가될 필요가 있다고 사료된다.

본 연구에서는 주로 '미지수가 2개인 연립일차부등식'의 덧셈을 다루는 상황에 대해서만 살펴보았다. 앞으로 연립부등식의 곱셈과 나눗셈 연산을 다루는 연구가 진행되길 바란다.

## 참 고 문 헌

강호상 (2002). 부등식 문제해결 과정에서 발생하는 오류 유형 분석 및 지도방안 연구 : 고등학교 1학년(지수・로그・삼각)부등식 단원. 경상대학교 교육대학원 석사학위 논문.

고성순 (2009). 오류 유형 분석 및 지도방안 : 수학 이차부등식 중심으로. 목포대학교 교육대학원 석사학위 논문.

교육부 (1997). 제 7차 수학과 교육과정. 서울: 대한 교과서 주식회사.

김경목 (2008). '삼각방정식과 삼각부등식' 문제 해결 과정에서 나타나는 오류 유형 분석 연구. 강원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김부미 (2005). 수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰. 이화여자대학교 대학원 박사학위 논문.

김선주 (2005). 고등학교 극한 영역에서의 오류 분석을 통한 교정학습 지도방안. 이화여자대학교 교

육대학원 석사학위 논문.

김용호 (2001). 일차부등식의 문제 해결과정에서 발생하는 오류유형분석. 공주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김주일 (2008). 일차부등식 풀이 과정에서 발생하는 오류유형 분석 및 지도 방안. 목포대학교 교육대학원 석사학위 논문.

박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

박은혜 (2008). 일차부등식에 관한 오류 유형과 원인 분석 : 고등학교 1학년을 대상으로 한 사례연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

우현철 (2000). 이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

이경미 (2007). 일차부등식의 문제해결 과정에서 나타나는 오류와 원인 분석. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

이승미 (2009). 부등식의 영역 문제 해결 과정에서 발생하는 오류와 원인 분석 연구 : 고등학교 2학년 대상으로. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

이종희 (2002). 수학적 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. 교과교육학연구, **6(2)**. 23-36.

이현주 (2004). 고등학교 상위권 학생의 삼각함수 문제 해결 과정에 대한 사례연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

정혜선 (2007). 중학교 2학년 학생들의 일차부등식 문제 해결 과정에서 나타나는 오류 유형 분석과 교정. 순천대학교 교육대학원 석사학위 논문.

정희화 (2001). 고등학교 방정식과 부등식 문제해결 과정에서 발생하는 오류 분석 연구. 경상대학교 교육대학원 석사학위 논문.

조의행 (1990). 일차부등식의 풀이과정에서 오류분석과 그 대책에 관한 연구 : 중학교 1학년을 중심으로. 충북대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Christiansen, B., Howson, A. G. & Otte, M. (1986). *Perspectives on Mathematics Education*. Reidel Publishing Company.

NCTM (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준 [Principles and standards for school mathematics]. (류희찬 외 5인 역). 경문사.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, **10**. 163-172.

Thirosh, D (2000). Enhancing prospective teachers's knowledge of children's conception: The case of division of fraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**. 5-25.

# On the analysis and correction of error for the simultaneous inequality with two unknown quantities

**Jun, YoungBae**
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Korea
E-mail : skywine@gmail.com

**Roh, EunHwan**
Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education, Jinju 660-756, Korea
E-mail : ehroh@cue.ac.kr

**Kim, DaeEui**
The high school Affiliated with G.S.N.U., Jinju 660-701, Korea
E-mail : goodidea01@hanmail.net

**Jung, ChanSik**
Daebyeong Elementary School, Hapcheon 678-922, Korea
E-mail : jcs1988@dreamwiz.com

**Kim, ChangSu**
The middle school Affiliated with G.S.N.U., Jinju 660-701, Korea
E-mail : cupncap@gmail.com

**Kang, JeongGi**
Annam Middle School, Chang-Won 641-805, Korea
E-mail : 750-5095@hanmail.net

**Jung, SangTae**
Munseon Elementary School, Sacheon 664-160, Korea
E-mail : hwarang0130@naver.com

The purpose of this thesis is to analyze the error happening in the process of solving the simultaneous inequality with two unknown qualities and to propose the correct teaching method.

We first introduce a problem about the simultaneous inequality with two unknown qualities. And we will see the solution which a student offers. Finally we propose the correct teaching method by analyzing the error happening in the process of solving the simultaneous inequality with two unknown qualities.

The cause of the error are a wrong conception which started with the process of solving the simultaneous equality with two unknown qualities and an insufficient curriculum in connection with the simultaneous inequality with two unknown qualities. Especially we can find out the problem that the students don't look the interrelation between two valuables when they solve the simultaneous inequality with two unknown qualities. Therefore we insist that we must teach students looking the interrelation between two valuables when they solve the simultaneous inequality with two unknown qualities.

* ZDM Classification : D34, H34

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40, 97D70

* Key Words : Mathematical error, the simultaneous inequality with two unknown qualities