

FIR CV-EWMA 관리도

홍의표^{*†} · 강해운** · 강창욱* · 백재원**

*한양대학교 산업경영공학과

**한양대학교 산업공학과

FIR CV-EWMA Control Chart

Eui-Pyo Hong^{*†} · Hae-Woon Kang** · Chang-Wook Kang* · Jae-Won Baek**

*Dept. of Information and Industrial Engineering, Hanyang University

**Dept. of Information Engineering, Hanyang University

When the production run is short and process parameters change frequently, it is difficult to monitor the process using traditional control charts. In such a case, the coefficient of variation (CV) is very useful for monitoring the process variability. The CV control chart is an effective tool to control the mean and variability of process simultaneously. The CV control chart, however, is not sensitive at small shifts in the magnitude of CV. The CV-EWMA(exponentially weighted moving average) control chart which was developed recently is effective in detecting a small shifts of CV.

Since the CV-EWMA control chart scheme can be viewed as a weighted average of all past and current CV values, it is very sensitive to small change of mean and variability of the process.

In this paper, we propose an FIR(Fast initial response) CV-EWMA control chart to improve the sensitivity of a CV-EWMA scheme at process start-up or out-of-control process. Moreover, we suggest the values of design parameters and show the results of the performance study of FIR CV-EWMA control chart by the use of average run length(*ARL*).

Also, we compared the performance of FIR CV-EWMA control chart with that of the CV-EWMA control chart and we found that the CV-EWMA control chart gives longer in-control ARL and much shorter out-of-control ARL.

Keywords : Control chart, Coefficient of variation, EWMA, Fast Initial Response

1. 서 론

관리도는 관리한계선을 통해 공정의 품질수준 변동을 관리하고, 공정에 발생하는 이상원인의 유무를 찾아내는 통계적 도구이다. 일반적으로 $\bar{X}-R$ 관리도와 $\bar{X}-S$ 관리도가 가장 널리 사용된다.

최근 생산 공정은 과거와 비교해서 점점 첨단화, 자동화되고 있으며 고도의 정밀성을 요구한다. 또한 제품

의 생산주기가 점점 짧아지고 하나의 생산 공정에서 여러 종류의 제품을 생산하는 경우가 많아지고 있다. 이와 같이 생산주기가 짧고 제품의 종류와 규격이 빈번히 바뀌는 공정을 $\bar{X}-R$ 관리도나 $\bar{X}-S$ 관리도 같은 전통적인 슈하르트(Shewhart) 관리도로 관리하기 위해서는 공정모수가 바뀔 때마다 새로운 관리도를 사용하여 관리해야 한다. 이는 비용측면에서 매우 비효율적인 방법이다. 변동계수(coefficient of variation : CV) 관리도는 이러

한 공정을 관리할 목적으로 연구되었다[1, 7]. 하지만 CV 관리도는 현재의 표본 정보만을 관리도에 반영하기 때문에 공정의 작은 변동에는 민감하게 반응하지 못한다. 변동계수를 관리대상으로 하고 작은 변화에 민감한 공정을 관리하기 위해 CV 관리도에 지수가 중이동평균(exponentially weighted moving average : EWMA) 기법을 적용한 CV-EWMA 관리도가 제안되었다[2].

기존 CV-EWMA 관리도는 CV의 평균과 분산 추정을 위해 Reh et al.[15]가 제시한 CV의 평균과 분산 추정 방법을 사용하였다. Bao[3]은 CV의 평균과 분산 추정을 위한 새로운 추정방법을 제안하였으며 본 연구에서는 CV-EWMA 관리도의 정확성을 높이기 위해 두 추정방법에 대한 정확성을 비교 및 평가 후 더 정확한 추정방법을 선정한다. 또한, 공정이 초기 셋업 단계 이거나 불안정한 상태일 경우, EWMA 기법의 민감도를 향상시키기 위하여 CV-EWMA 관리도에 Steiner[13]가 제안한 Fast Initial Response(FIR)을 적용한 관리도를 제시하고 통계적으로 설계한다. 또한 공정의 상황에 따라 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도를 적절하게 사용하는 방법을 제안하고 그 관리도들의 수행도를 비교 평가한다.

2. 변동계수의 통계적 특성과 확률분포

2.1 변동계수의 통계적 특성

변동계수는 표본의 표준편차를 표본의 평균으로 나눈 값으로 변량의 산포도를 평균에 대비해 나타내는 상대적 개념의 통계량(statistic)이다. 이 통계량은 정규분포를 따르는 모집단에서 정의된다.

확률변수(random variable) X 가 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, 모집단의 변동계수(population coefficient of variation) γ 는 다음과 같다.

$$\gamma = \frac{\sigma}{\mu} \quad (1)$$

이 모집단으로부터 얻은 표본 X_i 가 $X_i \sim iid N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 일 때, 표본 변동계수(sample coefficient of variation) W 는

$$W = \frac{S}{\bar{X}} \quad (2)$$

이다. 여기서, \bar{X} 와 S 는 각각 표본 X_i 의 평균과 표준편차이다.

변동계수는 단위(unit)를 갖지 않기 때문에 이 통계량

을 이용하면 서로 다른 집단 간 변동의 상대적 비교가 가능하다. 이러한 특성 때문에 변동계수는 다품종 소량 생산을 하는 제조공정에서 제품의 산포관리, 의료기기의 성능평가, 실험실 측정 장비의 재현성평가, DNA 마이크로어레이 성능평가 실험 등에 유용하게 사용된다[10, 12].

2.2 변동계수의 확률분포

Iglewicz[6]는 변동계수의 정확한 확률밀도함수를 연구하였다. 서로 독립인 확률변수 $X_1, \dots, X_n (n \geq 3)$ 이 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, 표본 변동계수 W_n 의 확률밀도 함수는 다음과 같다.

$$f(W_n) = \begin{cases} f_1(W_n) & \text{if } W_n \geq 0 \\ f_2(W_n) & \text{if } W_n < 0 \end{cases} \quad (3)$$

여기서, $f_1(W_n)$, $f_2(W_n)$ 은 각각

$$f_1(W_n) = \frac{A}{(1 + W_n^2)^{n/2}} \times I_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\gamma(1 + W_n^2)^{0.5}}\right)$$

$$f_2(W_n) = \frac{(-1)A}{(1 + W_n^2)^{n/2}} \times I_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\gamma(1 + W_n^2)^{0.5}}\right)$$

이고 함수 A 와 $I_{n-1}(\cdot)$ 은

$$A = \frac{W_n^{n-2} \exp\left(-\frac{nW_n^2}{2\gamma^2(1 + W_n^2)}\right)}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}}$$

$$I_{n-1}(b) = \int_0^\infty z^{n-1} \exp(-\frac{1}{2}(z-b)^2) dz$$

이다. 여기서, $I_{n-1}(\cdot)$ 은 에어리 함수(Airy function)로서 변동계수의 확률밀도함수를 유도하는데 사용되는 함수이다. 변동계수의 정확한 분포를 이용한 확률 계산은 에어리 함수의 존재 때문에 매우 복잡하다. McKay[8]와 Vangel[142]은 변동계수를 카이제곱(χ^2) 분포에 근사한 변동계수의 근사분포에 대한 연구를 하였다. 근사분포를 사용한 확률계산은 정확한 분포를 이용한 계산과 비교하여 그 오차가 크지 않고 간편하기 때문에 현실문제에 많이 적용되고 있다.

2.3 새로운 변동계수의 평균과 분산 추정방법

Iglewicz[6]가 연구한 변동계수의 확률밀도함수는 에어리 함수를 수치적분 해야 하고, γ 가 매우 작은 값을 갖게 될 경우 $\exp(-(nW_n^2)/2\gamma^2(1+W_n^2))$ 의 값이 지수적으로 감소한다. 그러므로 변동계수의 정확한 확률밀도함수는 복잡한 형태를 갖고 계산상의 어려움이 존재한다. 이러한 이유로 변동계수의 정확한 분포를 이용해서 표본 변동계수 W 의 평균과 분산을 추정하는 것은 어려운 문제이다. 이를 해결하려면 근사적인 W 의 평균과 분산추정법이 필요하다.

Reh et al.[15]는 변동계수가 양수일 때 변동계수의 근사적인 평균과 분산 추정방법을 제시하였다. 변동계수의 근사분포에 연구는 대부분 양수로 가정한다[16]. 현실문제에서 일반적인 공정은 변동계수가 양의 값을 갖기 때문에 이 가정은 충분히 설득력이 있다. 최근, Bao[3]는 변동계수의 평균과 분산을 추정하기 위해 새로운 방법을 제시하였다. 본 절에서는 Reh et al.[15]와 Bao[3]가 추정한 표본 변동계수 W 의 평균과 표준편차를 실제로 계산하여 두 방법들의 정확도를 상호 비교 및 평가한다.

확률변수 X 가 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 인 정규분포를 따르고 양수인 경우만을 가정할 때, Reh et al.[15]와 Bao[3]가 제시한 변동계수의 평균($\hat{\mu}_W$)과 분산($\hat{\sigma}_W^2$)은 각각 식 (4), 식 (5)를 이용해 구할 수 있다. 식 (4), 식 (5)에서 γ 는 모집단의 변동계수이고 n 은 표본의 크기이다.

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{W_{Reh}} &\approx \gamma \left[1 + \frac{1}{n} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{n^2} \left(3\gamma^4 - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{7}{32} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^3} \left(15\gamma^6 - \frac{3\gamma^4}{4} - \frac{7\gamma^2}{32} - \frac{19}{128} \right) \right] \\ \hat{\sigma}_{W_{Reh}}^2 &\approx \gamma^2 \left[\frac{1}{n} \left(\gamma^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{n^2} \left(8\gamma^4 + \gamma^2 + \frac{3}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^3} \left(69\gamma^6 + \frac{7\gamma^4}{2} + \frac{3\gamma^2}{4} + \frac{3}{16} \right) \right]\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{W_{Bao}} &\approx \gamma \left(1 - \frac{0.25 - \gamma^2}{n} \right) \\ \hat{\sigma}_{W_{Bao}}^2 &\approx \frac{\gamma^2}{n} \left[0.5 + \frac{0.4375}{n} + \gamma^2 \left(1 + \frac{1+9\gamma^2}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\hat{\mu}_{W_{Bao}} - \gamma)^2 \right]\end{aligned}\quad (5)$$

<표 1> 두 추정방법에 따른 W 의 평균과 분산 추정 값 비교

γ	$\hat{\mu}_W$		$\hat{\sigma}_W$	
	Reh et al. (1996)	Bao (2009)	Reh et al. (1996)	Bao (2009)
0.01	0.00940081	0.00975010	0.00341357	0.00231865
0.02	0.01880280	0.01950080	0.00682930	0.00463879
0.03	0.02820700	0.02925270	0.01024940	0.00696191
0.04	0.03761460	0.03900640	0.01367590	0.00928950
0.05	0.04702670	0.04876250	0.01711120	0.01162300
0.06	0.05644450	0.05852160	0.02055730	0.01396400
0.07	0.06586910	0.06828430	0.02401660	0.01631400
0.08	0.07530180	0.07805120	0.02749120	0.01867440
0.09	0.08474350	0.08782290	0.03098350	0.02104670
0.10	0.09419570	0.09760000	0.03449570	0.02343250
0.11	0.10365900	0.10738300	0.03803020	0.02583320
0.12	0.11313600	0.11717300	0.04158930	0.02825040
0.13	0.12262600	0.12697000	0.04517560	0.03068560
0.14	0.13213200	0.13677400	0.04879140	0.03314030
0.15	0.14165400	0.14658700	0.05243940	0.03561610

<표 1>은 Reh et al.[15]와 Bao[3]가 추정한 표본 변동계수 W 의 평균과 표준편차를 실제 모 변동계수(γ)와 비교한 시뮬레이션 결과이다. 모 변동계수가 0.01에서 0.15까지 변할 경우 W 의 평균 추정치는 모든 경우에서 Bao[3]가 제안한 $\hat{\mu}_W$ 가 Reh et al.[15]의 $\hat{\mu}_W$ 보다 γ 에 가깝고 W 의 표준편차 추정치는 Bao[3]가 제안한 $\hat{\sigma}_W$ 가 Reh et al.[15]의 $\hat{\sigma}_W$ 보다 작은 값을 갖는다. 이 결과로부터 Bao[3]의 W 에 대한 평균과 분산 추정법이 Reh et al.[15]의 추정방법 보다 더 정확한 결과를 보임을 확인할 수 있다.

<표 1>의 결과를 따라서 본 논문에서는 Bao[3]의 방법을 이용하여 변동계수의 평균과 분산을 근사적으로 추정한다.

실제 공정에서 모집단 변동계수 γ 는 알 수 없다. Connell and Lee[5]는 γ 를 추정하는 방법으로 평균 제곱근(root mean square) 방법을 제시하였다. γ 의 추정치 $\hat{\gamma}$ 은 다음과 같다.

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\frac{\sum_i (n_i - 1) W_i^2}{\sum_i (n_i - 1)}} \quad (6)$$

여기서, n_i 는 i 번째 부분군의 크기이다. 일반적으로 관리도를 작성할 때 각 부분군의 크기는 i 와 상관없이 동일하게 설정한다.

3. CV 관리도와 CV-EWMA 관리도

3.1 CV 관리도

CV 관리도는 CV 통계량을 이용하는 공정을 모니터링하고 관리하기 위해 설계된 관리도이다[7]. 하나의 생산 공정에서 요구하는 공정모수가 자주 바뀐다면 생산되는 공정의 변화를 관리하기 위해서 전통적인 관리도는 사용할 수 없고 공정이 바뀔 때마다 새로운 관리도를 사용하여 관리해야 한다. 이러한 공정은 CV 관리도를 사용하여 관리가 가능하다[1, 7]. 또한 CV 관리도는 평균과 분산 간에 특수한 함수관계가 존재할 때 공정의 관리에 적합한 관리도이다[7]. 예를 들어 평균이 증가 또는 감소할 때 분산이 일정한 비율로 함께 증가하거나 감소한다면 표본 변동계수가 거의 일정하게 유지된다. 이런 경우 CV 관리도는 변동계수의 변화를 관리하는데 유용하게 사용된다.

CV 관리도의 관리상한선(upper control limit : UCL), 중심선(center line : CL), 관리하한선(lower control limit : LCL)은 다음과 같다.

$$UCL = \frac{\sqrt{n}}{t_L} \quad (7)$$

$$CL = \sqrt{\frac{\sum_i (n_i - 1) W_i^2}{\sum_i (n_i - 1)}} \quad (8)$$

$$LCL = \frac{\sqrt{n}}{t_U} \quad (9)$$

여기서, t_U 와 t_L 은 각각 비 중심 t분포의 백분율 상한점(upper percentage points)과 백분율 하한점(lower percentage points)이고 중심선은 Connell and Lee[5]가 제시한 평균 제곱근(root mean square) 방법으로 계산한다.

CV 관리도는 관리도를 작성할 때 각각의 부분군에서 독립적으로 변동계수 값을 계산하기 때문에 현재의 상태는 잘 표현하지만 과거 표본 정보들에서 계속 누적되어온 변동계수 변화 상태는 나타내지 못한다. 이러한 이유로 CV 관리도는 공정에서 변동계수가 크게 이동하는 경우 신속하게 그 변화를 발견하지만 변동계수의 작은 변동(Small shifts)은 잘 발견하지 못한다.

3.2 CV-EWMA 관리도

Roberts[11]는 공정 평균의 작은 변화에 민감하게 반

응하는 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average : EWMA) 기법을 연구하였다. 이 방법은 지수적으로 최근의 정보에 큰 가중치를 부여하여 공정의 변화에 민감하게 반응하도록 한 것이다. 또한 EWMA 기법은 품질특성치가 정규분포를 따라야 한다는 가정에 크게 영향을 받지 않는다[4, 9].

홍의표 외[2]는 CV 관리도에 EWMA 기법을 적용한 CV-EWMA 관리도를 제안하였다. 공정의 품질특성치가 정규분포를 따르는 경우 CV-EWMA 통계량은 식 (12)와 같이 U_t 로 나타낸다.

$$U_t = \lambda W_t + (1 - \lambda) U_{t-1} \quad (10)$$

여기서, W_t 는 시점 t 의 표본 변동계수이고 λ 는 시점 t 의 가중치이다. CV-EWMA 통계량 U_t 의 평균은 $\hat{\mu}_W$ 이고 분산은 식 (11)과 같다.

$$Var(U_t) = \hat{\sigma}_W^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}] \quad (11)$$

$\hat{\mu}_W$ 와 $\hat{\sigma}_W^2$ 를 구하기 위해 기존 CV-EWMA 관리도[2]에서는 Reh et al.[15]가 제안한 W 의 평균과 분산 추정 방법을 사용했지만 본 연구에서는 Bao[3]가 제안한 추정방법을 사용하여 CV-EWMA 관리도의 정확한 관리한계선 설계 모수를 설정하고 그 수행도를 재평가 하였다.

CV-EWMA 관리도의 관리상한선, 중심선, 관리하한선은 각각 식 (12) ~ 식 (14)과 같다.

$$UCL = \hat{\mu}_W + L \sqrt{\hat{\sigma}_W^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (12)$$

$$CL = \hat{\mu}_W \quad (13)$$

$$LCL = \hat{\mu}_W - L \sqrt{\hat{\sigma}_W^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (14)$$

여기서, L 은 CV-EWMA 관리도의 관리한계선 조정상수이다. λ 와 L 은 관리도의 수행도 비교, 평가에서 CV 관리도와 CV-EWMA 관리도의 ARL_0 (in control average run length)가 370으로 동등하게 배분될 때의 값으로 결정한다. 다시 말해서, 제 1종 과오를 범할 확률(α)을 동등하게 배분하여 λ 와 L 을 구한다.

4. FIR을 이용한 CV-EWMA 관리도

EWMA 관리도에 FIR을 적용한 관리도는 Steiner[13]에 의해 제안되었으며, 공정의 셋업 및 초기 생산 라인 가동 상태, 또는 공정이 매우 불안정 상태일 경우, EWMA 기법의 민감도를 향상시키는데 매우 유용하다. Steiner[13]은 기존 EWMA 관리도의 관리한계선에 식 (15)과 같이 변화를 주어 관리도가 처음부터 공정의 변화에 민감하게 반응하도록 하였다.

$$\pm L\sigma \left\{ \left(1 - (1-f)^{1+a(t-1)} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]} \right\} \quad (15)$$

여기서, 상수 f 와 a 는 $a = [-2/\log(1-f)-1]/19$ 의 관계가 성립하고 일반적으로 FIR을 이용한 CUSUM 관리도의 50% headstart와 같은 성능을 갖도록 f 가 0.5일 때 a 는 0.3을 많이 사용한다[9, 13].

본 논문에서는 공정 셋업 단계 또는 해당 공정이 매우 불안정 상태가 자주 발생할 때 CV의 변동을 좀 더 빠르게 탐지하기 위하여 CV-EWMA 관리도에 FIR을 적용하고 그 수행도를 평가하였다.

크게 되면 EWMA 기법을 사용하는 관리도의 효율이 떨어지고 공정의 작은 변화에 민감하게 반응하지 못한다 [9]. λ 가 0.05이하의 값이면 관리가 필요하지 않은 작은 변동까지 감지하기 때문에 이러한 경우도 문제가 된다 [9]. 보통 λ 값으로 0.1과 0.2를 많이 사용하고 미세한 변동을 관리해야 할 경우에 0.05값을 사용한다.

<표 2> 관리한계선 설계모수 λ 와 L 값($ARL_0 = 370$)

CV-EWMA(Bao)					
$n \backslash \lambda$	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25
L					
5	2.549	2.720	2.807	2.860	2.898
10	2.526	2.715	2.806	2.861	2.901
15	2.522	2.712	2.805	2.862	2.900
FIR CV-EWMA(Bao)					
$n \backslash \lambda$	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25
L					
5	2.669	2.822	2.901	2.952	2.988
10	2.648	2.817	2.899	2.952	2.989
15	2.646	2.814	2.899	2.953	2.989

5. 관리도들의 수행도 분석과 평가

관리도의 수행도는 평균 런 길이(average run length : ARL)로 평가한다. 이를 위하여 샘플 수 n 과 CV의 변동량(Shift size)에 다양한 변화를 주었다. 본 논문에서는 정확한 수행도 평가를 위하여 몬테카를로(Monte Carlo) 시뮬레이션을 100,000번 반복 수행하였으며, 개발 도구로는 수학/통계 라이브러리 IMSL과 Visual C++ 6.0을 사용하였다.

Bao[3]가 제시한 변동계수의 평균과 분산 추정방법을 사용한 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 수행도를 비교, 평가하기 위해서는 기존 Reh et al.[15]의 추정방법을 이용해 설정된 관리한계선 설계모수 λ 와 L 을 새로운 λ 와 L 로 재조정해야 한다. λ 와 L 은 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 ARL_0 가 동등하게 배분될 때의 값으로 결정한다. 본 연구에서는 λ 를 고정한 후, ARL_0 가 370이 될 때의 L 값을 관리도 조정상수로 사용하였다. CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 λ 에 따른 L 값은 <표 2>와 같다.

가중치 λ 가 작을수록 EWMA 기법을 사용하는 관리도는 공정의 변화에 민감하게 반응한다. 일반적으로 λ 는 0.05에서 0.25사이의 값을 사용한다. λ 가 0.25보다

<표 3>에서 <표 5>는 λ 가 0.1일 경우, 표본의 크기 n 과 모집단 변동계수 γ 에 따라 CV에 다양한 변화를 주었을 때의 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 수행도를 비교한 결과이다. 본 연구에서는 직접적인 수행도 비교 및 평가를 위해 표본의 크기 n 은 5, 10, 15인 경우로 설정하였으며 CV의 변동량은 5%에서 200%까지 다양한 변화에 대한 실험들을 실시하였다.

<표 3> ~ <표 5>를 통해 λ 가 0.1로 고정되었을 경우 FIR CV-EWMA 관리도의 관리도 조정상수 L 값이 CV-EWMA 관리도의 L 값보다 큰 것을 확인할 수 있다.

이는 동일한 ARL_0 값을 갖기 위해 FIR CV-EWMA 관리도의 관리한계선이 CV-EWMA 관리도의 관리한계선 보다 더 큰 조정상수 값이 요구됨을 보여주는 것이다.

λ 와 L 값이 동일하게 설정된다면 FIR CV-EWMA 관리도의 ARL_0 가 CV-EWMA 관리도의 ARL_0 보다 더 작은 값을 갖게 된다. 실제로 <표 3>에서 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 λ 와 L 값을 $\lambda = 0.1$, $L = 2.72$ 로 동일하게 설정하게 되면 FIR CV-EWMA 관리도의 ARL_0 는 270.6이 된다. 이 결과로 공정이 안정상태일 경우에는 CV-EWMA 관리도가 FIR CV-EWMA 관리도 보다 더 우수한 수행도를 보임을 알 수 있다.

<표 3> CV-EWMA and FIR CV-EWMA 관리도의 수행도(ARL , $SDRL$) 평가($n=5$)

$n = 5$	CV-EWMA(Bao)			FIR CV-EWMA(Bao)		
parameter	$\lambda = 0.1$ $L = 2.72$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.72$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.72$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.822$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.822$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.822$
Shift size(%)	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$
0	370.238 (374.948)	370.382 (374.911)	370.431 (375.023)	369.895 (474.332)	370.591 (481.313)	371.401 (476.736)
5	163.208 (164.094)	163.749 (164.778)	163.976 (165.189)	143.458 (187.981)	145.696 (192.187)	145.213 (190.477)
10	64.138 (62.379)	65.098 (63.740)	65.839 (64.278)	51.748 (68.682)	52.006 (68.679)	53.191 (70.407)
15	32.728 (30.226)	33.329 (30.687)	33.847 (31.249)	24.242 (31.750)	24.921 (32.614)	25.208 (32.541)
20	20.055 (17.582)	20.359 (18.117)	20.684 (18.377)	13.745 (17.731)	14.346 (18.442)	14.657 (18.859)
25	13.816 (11.744)	14.056 (11.962)	14.182 (12.191)	9.166 (11.553)	9.255 (11.640)	9.575 (11.941)
30	10.235 (8.599)	10.373 (8.637)	10.632 (8.788)	6.598 (8.175)	6.645 (8.209)	6.896 (8.557)
40	6.543 (5.255)	6.584 (5.320)	6.616 (5.391)	4.016 (4.639)	4.103 (4.702)	4.184 (4.851)
50	4.708 (3.660)	4.729 (3.685)	4.867 (3.692)	2.871 (3.001)	2.895 (3.030)	3.001 (3.113)
100	2.006 (1.302)	2.016 (1.306)	2.017 (1.306)	1.428 (0.894)	1.435 (0.898)	1.450 (0.927)
200	1.226 (0.510)	1.227 (0.514)	1.233 (0.515)	1.086 (0.317)	1.087 (0.319)	1.088 (0.320)

<표 4> CV-EWMA and FIR CV-EWMA 관리도의 수행도(ARL , $SDRL$) 평가($n=10$)

$n = 10$	CV-EWMA(Bao)			FIR CV-EWMA(Bao)		
parameter	$\lambda = 0.1$ $L = 2.715$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.715$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.715$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.817$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.817$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.817$
Shift size(%)	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$
0	370.548 (375.379)	370.481 (372.251)	370.703 (372.919)	370.225 (479.404)	370.562 (476.384)	370.770 (476.813)
5	97.313 (95.851)	98.329 (96.964)	98.947 (96.920)	82.482 (107.928)	83.887 (108.908)	84.150 (110.040)
10	32.203 (28.817)	32.709 (29.208)	33.306 (30.028)	23.938 (30.322)	24.093 (30.625)	24.801 (31.226)
15	16.072 (13.157)	16.275 (13.363)	16.559 (13.643)	10.830 (13.368)	11.093 (13.749)	11.256 (13.956)
20	10.002 (7.784)	10.052 (7.844)	10.262 (7.979)	6.321 (7.475)	6.435 (7.627)	6.524 (7.794)
25	6.972 (5.261)	6.991 (5.296)	7.031 (5.352)	4.210 (4.807)	4.263 (4.817)	4.318 (4.908)
30	5.251 (3.859)	5.348 (3.916)	5.379 (3.965)	3.113 (3.271)	3.188 (3.384)	3.213 (3.425)
40	3.451 (2.394)	3.490 (2.428)	3.503 (2.466)	2.070 (1.829)	2.107 (1.868)	2.128 (1.888)
50	2.541 (1.656)	2.578 (1.692)	2.606 (1.719)	1.618 (1.165)	1.624 (1.178)	1.644 (1.196)
100	1.292 (0.565)	1.293 (0.572)	1.314 (0.591)	1.087 (0.318)	1.088 (0.319)	1.090 (0.323)
200	1.022 (0.149)	1.023 (0.152)	1.023 (0.153)	1.005 (0.069)	1.005 (0.069)	1.005 (0.072)

<표 5> CV-EWMA and FIR CV-EWMA 관리도의 수행도(ARL , $SDRL$) 평가($n=15$)

$n = 15$	CV-EWMA(Bao)			FIR CV-EWMA(Bao)		
parameter	$\lambda = 0.1$ $L = 2.712$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.712$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.712$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.814$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.814$	$\lambda = 0.1$ $L = 2.814$
Shift size(%)	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$
0	370.288 (375.038)	370.287 (375.478)	370.202 (375.027)	370.680 (479.353)	370.095 (476.910)	370.802 (477.105)
5	70.881 (67.659)	71.263 (67.84)	72.587 (69.200)	58.295 (75.204)	58.393 (75.288)	59.217 (75.669)
10	21.887 (18.334)	22.300 (18.942)	22.734 (19.400)	15.629 (19.371)	15.975 (19.690)	16.188 (19.829)
15	11.142 (8.645)	11.179 (8.663)	11.239 (8.749)	7.053 (8.361)	7.194 (8.532)	7.221 (8.798)
20	6.943 (5.064)	7.009 (5.140)	7.153 (5.259)	4.156 (4.626)	4.217 (4.703)	4.257 (4.753)
25	4.891 (3.432)	4.943 (3.473)	5.047 (3.582)	2.828 (2.858)	2.894 (2.931)	2.913 (3.023)
30	3.729 (2.534)	3.755 (2.559)	3.858 (2.609)	2.177 (1.955)	2.217 (2.019)	2.256 (2.062)
40	3.001 (1.964)	3.023 (1.975)	3.053 (2.020)	1.804 (1.408)	1.830 (1.464)	1.862 (1.502)
50	2.494 (1.577)	2.516 (1.582)	2.567 (1.639)	1.559 (1.065)	1.580 (1.096)	1.606 (1.126)
100	2.155 (1.300)	2.185 (1.328)	2.210 (1.346)	1.403 (0.836)	1.421 (0.862)	1.436 (0.883)
200	1.905 (1.098)	1.916 (1.105)	1.941 (1.130)	1.299 (0.677)	1.307 (0.694)	1.311 (0.707)

변동계수에 변화를 주었을 경우의 ARL_1 은 모든 경우에서 FIR CV-EWMA 관리도가 CV-EWMA 관리도보다 작은 값을 갖는다. 이 결과로부터 CV의 변동이 존재할 때, 즉 공정이 불안정한 경우에는 FIR CV-EWMA 관리도의 수행도가 더 좋음을 알 수 있다.

공정을 효과적으로 관리하기 위해 공정의 상태에 맞는 적절한 관리도를 사용하여야 한다. 공정이 셋업 및 초기 생산라인 가동 상태이거나 매우 불안정한 상태일 경우에는 변동계수의 변화를 감지하고 관리하기 위해 FIR CV-EWMA 관리도를 사용하고 공정이 안정상태일 때는 CV-EWMA 관리도를 사용하여 관리하는 것이 효과적이다.

표본의 크기 n 에 따른 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 수행도를 평가하기 위해 <표 3>에서 <표 5>를 보면 CV의 변동량(Shift size)이 동일할 때 표본의 크기 n 이 커질수록 모든 경우에서 ARL_1 이 짧아졌다. 이 결과로 표본의 크기가 클수록 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 수행도가 커짐을 확인할 수 있다. 관리도의 효율은 표본의 크기를 늘림으로서 증가시킬 수 있다. 그러나 표본의 크기는 비용과 관련된 문제이므로 손실비용과 관리도의 효율을 함께 고려해야만 한다.

6. 결 론

생산주기가 짧고 제품의 종류와 규격이 빈번히 바뀌는 공정은 변동계수를 사용하여 관리할 수 있다. 변동계수는 표본의 표준편차를 그 평균으로 나눈 값이므로 자료의 크기나 단위에 영향을 받지 않는다. CV 관리도는 변동계수 통계량을 사용한 관리도로서 변동계수의 큰 변화에는 민감하게 반응하지만 변동계수가 미세하게 변하는 경우 그 변화를 확실하게 감지하지 못한다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 변동계수의 작은 변화에 민감하게 반응하는 공정을 관리할 수 있는 CV-EWMA 관리도가 개발되었다.

본 연구에서는 Reh et al.[15]와 Bao[3]가 제시한 표본 변동계수의 평균과 분산 추정방법을 비교하여 Bao[3]의 추정방법이 실제 모 변동계수를 더 정확히 추정함을 확인하고 Bao[3]가 제안한 추정방법을 사용하여 CV-EWMA 관리도의 정확한 관리한계선 설계 모수를 설정하고 그 수행도를 재평가 하였다. 또한, 공정이 셋업 및 초기 생산라인 가동상태이거나 매우 불안정할 경우의 관리도 적용을 위하여 FIR 기법을 적용한 CV-EWMA 관리도를 설계하고, 그 수행도를 CV-EWMA 관리도와 비교하였다. 그 결과 FIR CV-EWMA 관리도가 기존의 CV-EWMA 관

리도에 비해 더 우수한 수행도를 보임을 확인하였고 공정의 상태에 따라 알맞은 CV-EWMA 관리도와 FIR CV-EWMA 관리도의 적용방법을 제시하였다.

참고문헌

- [1] 이만식, 강창욱, 심성보; “근사분포를 이용한 CV 관리도의 통계적 설계”, *한국산업경영시스템학회지*, 27(3) : 14-20, 2004.
- [2] 홍의표, 강창욱, 백재원, 강해운; “EWMA 기법을 적용한 CV 관리도의 개발”, *한국산업경영시스템학회지*, 31(4) : 114-120, 2008.
- [3] Bao, Y.; “Finite-Sample Moments of the Coefficient of Variation,” *Econometric Theory*, 25(1) : 291-297, 2009.
- [4] Borror, C. M., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.; “Robustness of the EWMA Control Chart to Nonnormality,” *Journal of Quality Technology*, 31(3) : 309-316, 1991.
- [5] Connett, J. E. and Lee, W. W.; “Estimation of the Coefficient of Variation from Laboratory Analysis of Split Specimens for Quality Control in Clinical Trials,” *Controlled Clinical trials*, 11(1) : 24-36, 1990.
- [6] Iglewicz, B. and Myers, R. H.; “Comparisons of Approximations to the Percentage Points of the Sample Coefficient of Variation,” *Technometrics*, 12(1) : 166-169, 1970.
- [7] Kang, C. W., Lee, M. S., Seong, Y. J., and Hawkins, D. M.; “A Control Chart for the Coefficient of Variation,” *Journal of Quality Technology*, 39(2) : 151-158, 2007.
- [8] McKay, A. T.; “Distribution of the Coefficient of Variation and the Extended t Distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society*, 95(4) : 695-699, 1932.
- [9] Montgomery, D. C.; *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th Edition, John Wiley and Sons, New York, 406-408, 2001.
- [10] Nelson, L. S.; “Some Notes on Variation,” *Journal of Quality Technology*, 31(4) : 459-462, 1999.
- [11] Roberts, S. W.; “Control Chart Tests Based on Geometric Moving Average,” *Technometrics*, 1(3) : 239-250, 1959.
- [12] Shi, L. et al.; “The Micro Array Quality Control Project Shows Inter and Intra Platform Reproducibility of Gene Expression Measurements,” *Nature Biotechnology*, 24(9) : 1151-1161, 2006.
- [13] Steiner, S. H.; “EWMA Control Charts with Time Varying Control Limits and Fast Initial Response,” *Journal of Quality Technology*, 31(1) : 75-86, 1999.
- [14] Vangel, M. G.; “Confidence Intervals for a Normal Coefficient of Variation,” *The American Statistician*, 15(1) : 21-25, 1996.
- [15] Reh, W. and Scheffler, B.; “Significance Tests and Confidence Intervals for Coefficient of Variation,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 22(4) : 449-452, 1996.
- [16] Wong, A. C. M. and Wu, J.; “Small Sample Asymptotic Inference for the Coefficient of Variation : Normal and Nonnormal Models,” *Journal of Statistical Planning and Inference*, 104(1) : 73-82, 2002.