Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2010) 16(12):1208-1211
DOI:10.5302/J.ICROS.2010.16.12.1208 ISSN:1976-5622

시간 지연 시스템을 위한 가변 구조 제어기 설계

Variable Structure Control Design for Time-Delay Systems

최 한 호*
(Han Ho Choi[1])
[1]Dongguk Univ. - Seoul

Abstract: We propose a variable structure control design method for a class of multivariable uncertain state-delayed systems which can be represented by polytopic models. In terms of LMIs, we derive a sufficient condition for the existence of a linear sliding surface guaranteeing the asymptotic stability of the sliding mode dynamics. We parameterize the sliding surface by using the solution of the LMI existence condition. We also give a switching feedback control strategy guaranteeing stable sliding mode. By using a numerical example, we show that our method supplements the existing results and it can be better than the existing results.

Keywords: LMI, variable structure system, time-delay system

I. 서론

시간 지연은 여러 가지 공학 시스템에서 종종 발생하며 시스템의 안정에 심각한 장애를 초래한다. 최근 여러 연구자들이 가변구조 이론을 활용하여 시간 지연 시스템을 위한 제어기 설계 방법들을 제안하였다[2-7]. 대부분의 가변구조 제어 방법들은 [7]에 제시된 방법을 제외하고 지연된 상태 행렬을 불확실성으로 간주하여 제어기를 설계하여 어느 정도 보수성이 존재하며 특히 [7]에 제시된 방법을 제외한 기존의 방법들은 불확실성이 정합조건을 만족시키지 않거나 상태행렬 A와 입력행렬 B의 쌍 (A,B)가 제어 가능 혹은 안정 가능하지 않으면 적용이 안되는 단점을 지녔다. 본 논문에서는 폴리 토픽 모델을 갖는 상태 지연 시스템을 대상으로 고려한다. 첫 번째로 LMI를 사용하여 점근 안정도를 보장할 슬라이딩 평면의 존재조건을 유도하고 슬라이딩 평면을 매개 변수화한다. 다음으로 안정한 슬라이딩 모드를 보장하는 스위칭 궤환 제어기를 제안한다. 마지막으로 수치적인 예를 통해 기존 방법을 보완하고 보다 나을 수 있음을 보인다.

II. 대상 시스템과 예비 결과들

우리는 다음과 같은 폴리토픽 모델로 표현 가능한 동역학 방정식을 고려한다[1].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^{r}\beta_i[A_i x + A_{di}x_d] + B[u+\rho(t,x,x_d,u)] \\ x_d &= x(t-h), \quad x(t)=0,\ t<0,\ x(0)=x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$로 각각 상태, 입력을 가리키며 $\rho\in R^m$는 외란 입력을 나타낸다. $h>0$으로 시스템의 시간 지연 상수이다. β_i는 미지의 변수로 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_i = 1, \quad 1 \geqq \beta_i \geqq 0 \tag{2}$$

폴리토픽모델은 비선형 시스템을 여러 동작점에서 동정하여 얻은 상태 공간 모델의 convex interpolation으로부터 얻어질 수 있음에 유의해야 한다[1]. 또한 기존 대부분의 시간 지연 시스템을 위한 가변구조제어기 설계 방법들에서는 (1)과 같이 상태행렬과 지연행렬에 구조적인 비정합 불확실성을 갖는 시스템을 다루지 않았음에 유의해야 한다. 시스템 (1)은 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $A_i\in R^{n\times n}$, $A_{di}\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$는 상수 행렬들이다.

A2: $rank(B)=m$을 만족시킨다.

A3: $\|\rho(t,x,x_d,u)\| \leqq \phi\|u\| + \varrho(t)$를 만족시키는 상수 ϕ과 함수 $\varrho(t)$가 알려져 있다.

선형 슬라이딩 평면을 $\Omega=\{x:\sigma=Sx=0\}$로 정의하자. 여기에서 S는 $m\times n$행렬이다. 이전의 결과 [1-7]를 참조하면 S는 다음 성질을 만족시키는 것을 찾아야 함을 알 수 있다.

P1: SB는 역행렬이 존재한다. 간단함을 위해 $SB=I$로 가정하자.

P2: 슬라이딩 평면 $Sx=0$에 제한된 $(n-m)$차의 슬라이딩 모드 동역학은 점근적으로 안정하다.

결국 가정 A1-A2를 만족시키는 시스템 (1)에 대하여 성질 P1-P2를 만족시키는 $m\times n$행렬 S를 찾고 외란 ρ에도 불구하고 안정성을 보장하는 스위칭 제어기를 제안하는 것으로 문제를 설정할 수 있다.

다음의 보조정리는 제안된 방법을 유도하기 위해 사용될 것이다.

보조정리 1: 적절한 차원을 갖는 행렬 $E, Y,\ W>0$에 대하여 다음 부등식이 항상 성립한다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수: 2010. 2. 16., 수정: 2010. 10. 7., 채택확정: 2010. 11. 1.
최한호: 동국대학교 서울 전자전기공학부(hhchoi@dongguk.edu)

$$E^TY+Y^TE \leq E^TWE+Y^TW^{-1}Y$$

III. 주요 결과

정리 1: 시스템 (1)을 고려하자. 다음 LMI (3)를 모든 $i=1,\cdots,r$에 대하여 만족시키는 해 행렬 (X,Q)가 존재한다고 가정하자.

$$X>0,\ \begin{bmatrix} \Lambda_{0i} & 0 & * & * \\ 0 & -Q & 0 & * \\ h\Lambda_{2i}^T & 0 & -h\Phi^TX\Phi & 0 \\ h\Lambda_{1i} & h\Lambda_{2i} & 0 & -h\Phi^TX\Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

여기에서 $X\in R^{n\times n}$, $Q\in R^{(n-m)\times(n-m)}$은 결정 변수들이고 $\Lambda_{0i}=Q+\Lambda_{1i}+\Lambda_{2i}+\Lambda_{1i}^T+\Lambda_{2i}^T$, $\Lambda_{1i}=\Phi^TA_iX\Phi$, $\Lambda_{2i}=\Phi^TA_{di}X\Phi$이며 $\Phi\in R^{n\times(n-m)}$는 $B^T\Phi=0,\Phi^T\Phi=I$를 만족시키는 임의의 행렬이다. 그리고 $*$는 대칭 행렬의 대칭성으로부터 유추할 수 있는 행렬블록을 의미한다. 그러면 다음처럼 주어지는 슬라이딩 평면은 P1-P2를 만족한다.

$$\sigma=Sx=(B^TX^{-1}B)^{-1}B^TX^{-1}x \quad (4)$$

증명: (4)에 주어진 S는 P1을 확실히 만족시킨다. 다음처럼 변환 행렬 M과 이와 연관된 벡터v를 정의하자.

$$M=\begin{bmatrix} (\Phi^TX\Phi)^{-1}\Phi^T \\ (B^TX^{-1}B)^{-1}B^TX^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z \\ S \end{bmatrix},\ v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Zx \\ Sx \end{bmatrix}=Mx$$

위식은 $v_2=\sigma$, $M^{-1}=[X\Phi,\ B]$가 성립함을 의미한다. 위의 변환행렬을 사용하면 (1)식은 다음처럼 고쳐 써 질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{12}} \\ \overline{A_{21}} & \overline{A_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \sigma \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \overline{A_{d11}} & \overline{A_{d12}} \\ \overline{A_{d21}} & \overline{A_{d22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{d1} \\ \sigma_d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}[u+\rho]$$

여기에서 $v_{d1}=v_1(t-h),\sigma_d=\sigma(t-h)$이며 $\overline{A_{ij}}$, $\overline{A_{dij}}$는 다음처럼 정의된다.

$$\overline{A_{11}}=\sum_{i=1}^r\beta_iZA_iX\Phi,\quad \overline{A_{12}}=\sum_{i=1}^r\beta_iZA_iB$$
$$\overline{A_{21}}=\sum_{i=1}^r\beta_iSA_iX\Phi,\quad \overline{A_{22}}=\sum_{i=1}^r\beta_iSA_iB$$
$$\overline{A_{d11}}=\sum_{i=1}^r\beta_iZA_{di}X\Phi,\quad \overline{A_{d12}}=\sum_{i=1}^r\beta_iZA_{di}B$$
$$\overline{A_{d21}}=\sum_{i=1}^r\beta_iSA_{di}X\Phi,\quad \overline{A_{d22}}=\sum_{i=1}^r\beta_iSA_{di}B$$

등가 제어 방법에 따라 아래의 $u_{eq}(t)$를 구할 수 있다.

$$u_{eq}=-\overline{A_{21}}v_1-\overline{A_{22}}\sigma-\overline{A_{d21}}v_{d1}-\overline{A_{d22}}\sigma_d-\rho$$

결국 $\dot{\sigma}=\sigma=\sigma_d=0$로 놓고 $u_{eq}(t)$를 $u(t)$에 대입하면 슬라이딩 평면 $Sx=0$에 구속된 슬라이딩 모드 동역학이 다음처럼 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1=\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d21}}v_{d1} \quad (5)$$

이전 결과 [1]과 [7]을 고려하여 다음의 리아푸노프-크라소프스키 함수를 고려하자.

$$V=v_1^TPv_1+\int_{t-h}^t v_1^T(s)Qv_1(s)ds+\int_{-h}^0\int_{t+\theta}^t \dot{v}_1^T(s)P\dot{v}_1(s)dsd\theta$$

여기에서 $P=\Phi^TX\Phi>0$이다. 도함수를 구해보면 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\ 2v_1^TP(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_{d1})+v_1^TQv_1+h\dot{v}_1^TP\dot{v}_1 \\ &-v_{d1}^TQv_{d1}-\int_{t-h}^t\dot{v}_1^T(s)P\dot{v}_1(s)ds \\ =&\ 2v_1^TP(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_{d1})+v_1^TQv_1-\int_{t-h}^t\dot{v}_1^T(s)P\dot{v}_1(s)ds \\ &+h(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_{d1})^TP(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_{d1})-v_{d1}^TQv_{d1}\end{aligned}$$

뉴턴-라이브니쯔 공식 $v_1-v_{d1}-\int_{t-h}^t\dot{v}_1(s)ds=0$을 이용하여 위 식을 다음처럼 고쳐 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\ 2v_1^TP(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_{d1})-\int_{t-h}^t\dot{v}_1^T(s)P\dot{v}_1(s)ds \\ &+v_1^TQv_1-v_{d1}^TQv_{d1} \\ &+h(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_{d1})^TP(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_{d1}) \\ &+2v_1^TP\overline{A_{d11}}(v_1-v_{d1}-\int_{t-h}^t\dot{v}_1(s)ds)\end{aligned} \quad (6)$$

보조정리 1에 의해 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&2\int_{t-h}^t v_1^T(t)P\overline{A_{d11}}\dot{v}_1(s)ds \\ &\leq hv_1^T(t)P\overline{A_{d11}}P^{-1}\overline{A_{d11}^T}Pv_1(t)+\int_{t-h}^t\dot{v}_1^T(s)P\dot{v}_1(s)ds\end{aligned} \quad (7)$$

(6)과 (7)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}\leq&\ 2v_1^TP(\overline{A_{11}}v_1+\overline{A_{d11}}v_1)+v_1^TQv_1-v_{d1}^TQv_{d1} \\ &+hv_1^T(t)P\overline{A_{d11}}P^{-1}\overline{A_{d11}^T}Pv_1(t) \\ &+h(P\overline{A_{11}}v_1+P\overline{A_{d11}}v_{d1})^TP^{-1}(P\overline{A_{11}}v_1+P\overline{A_{d11}}v_{d1})\end{aligned} \quad (8)$$

[1]에 주어진 Schur complement 공식을 사용하면 (3)식이 만족되면 다음 식이 모든 $i=1,\cdots,r$에 대하여 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{0i} & 0 & * \\ 0 & -Q & 0 \\ h\Lambda_{2i}^T & 0 & -hP \end{bmatrix}+h\begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^T \\ \Lambda_{2i}^T \\ 0 \end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^T \\ \Lambda_{2i}^T \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0$$

이는 다음 식과 동치이다.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} \Lambda_{0i} & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix}+h\begin{bmatrix} \Lambda_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix} \Lambda_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ &+h\begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^T \\ \Lambda_{2i}^T \end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix} \Lambda_{1i}^T \\ \Lambda_{2i}^T \end{bmatrix}^T < 0\end{aligned} \quad (9)$$

결국 (8), (9)식은 $\dot{V}\leq-\vartheta(\|v_1\|^2+\|v_{d1}\|^2)$을 만족시키는 $\vartheta>0$ 이 존재함을 의미하고 이는 (5)이 점근적으로 안정함을

의미한다. Q.E.D.

주 1: (3)에 주어진 LMI 조건식은 다음 장의 예제에서 보여지듯이 (A_i,B)가 안정가능하지 않더라도 해가 존재할 수 있고 슬라이딩 평면을 구할 수 있다. 그러므로 본 논문에서 제안한 방법이 이전 방법보다 더 넓은 범위의 시스템에 적용 가능하다. [7]의 방법도 시스템 행렬과 입력행렬이 안정가능하지 않더라도 적용할 수 있으나 본 논문에서처럼 시스템 행렬과 지연 행렬에 불확실성이 존재한다는 가정을 사용하지 않았고 다음 조건을 만족하는 시스템에만 적용될 수 있음에 유의해야한다.

$$A = A_1 = \cdots = A_r,\ A_d = A_{d1} = \cdots = A_{dr}$$

즉 본 논문에서 제안된 방법에서는 [2]-[7] 등 기존의 방법들과 달리 시스템행렬과 지연행렬에 존재하는 불확실성을 비구조적으로 모델링하지 않고 구조적인 불확실성을 갖는 폴리토픽 모델이 사용되었으며 시스템행렬과 입력행렬 안정가능성에 대한 가정이 제거되었다. 그러므로 본 논문에서 제안한 방법이 이전 방법보다 더 넓은 범위의 시스템에 적용 가능하다.

정리 2: 시스템 (1)을 고려하자. LMI (3)를 모든 $i=1,\cdots,r$에 대하여 만족시키는 $n\times n$ 양한정 해 행렬 X가 존재하고 슬라이딩 평면이 (4)처럼 주어졌다고 가정하자. 그러면 다음의 스위칭 제어기는 슬라이딩 모드가 유한한 시간에 발생하도록 하고 전체 시스템 궤적이 0으로 수렴하도록 보장한다.

$$u = -\kappa(t)\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \tag{10}$$

여기에서 $\kappa(t)$는 다음처럼 주어진다.

$$\kappa(t) = \frac{1}{1-\phi}[\varrho(t) + \epsilon_0 + \epsilon_1\|x\| + \epsilon_2\|x_d\|] \tag{11}$$

그리고 $\epsilon_0 > 0,\ \epsilon_1 = \sum\|SA_i\|,\ \epsilon_2 = \|\sum SA_{di}\|$이다.

증명: 정리 1이 슬라이딩 모드 동역학이 안정함을 의미하므로 도달조건이 $\sigma^T\dot{\sigma} \le -\epsilon_0\|\sigma\|$를 만족시킨다는 것을 보이기만하면 충분하다. $SB=I$와 (1)를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\sigma^T\dot{\sigma} \le [(1-\phi)\kappa - \epsilon_0 + \phi\kappa]\|\sigma\| - \kappa\|\sigma\| \le -\epsilon_0\|\sigma\|$$

결국 제어 입력 (10)는 슬라이딩 모드가 유한한 시간에 발생하도록 하고 전체 시스템 응답이 0으로 수렴하도록 보장한다. Q.E.D.

주 2: 아래 (12) 혹은 (14)에 주어진 뱅뱅형태의 크기가 제한된 제어기들은 적어도 국부적인 안정성을 보장할 수 있다. 이들의 안정도 범위는 [8]을 이용하여 구할 수 있다.

$$u_j = -\kappa_j\frac{\sigma_j}{\|\sigma\|} \tag{12}$$

$$u_j = -\kappa_j sign(\sigma_j) \tag{13}$$

여기에서 $j=1,\cdots,m$이고 u_j는 j번째 채널의 입력이며 $\kappa_j > 0$는 설계변수로 그 값이 클수록 국부적인 안정도의 범위는 넓어진다[8].

IV. 수치적 예

$r=2,\ h=1$로 다음처럼 주어지는 데이타를 갖는 시간지연 시스템 (1)을 고려하자.

$$\begin{aligned} &A_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\ &A_{d1} = A_{d2} = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \rho = \sin 10t \end{aligned} \tag{14}$$

(A_1,B)나 (A_2,B)가 안정가능하지 않기 때문에 기존의 [2-6]의 방법들은 적용이 불가능하다. 그리고 [7]의 방법은 $A=A_1=A_2$라는 조건을 만족시키지 않아 위의 시스템 (14)에는 적용할 수 없음에 유의해야 한다. LMI (3)를 만족시키는 해를 LMI 최적화 알고리즘을 이용하여 다음처럼 구할 수 있다.

$$Q = 14.423,\quad X = \begin{bmatrix}41.229 & *\\-15.259 & 33.979\end{bmatrix} \tag{15}$$

그리고 다음과 같은 슬라이딩 평면을 구할 수 있다.

$$\sigma = [0.3701,\quad 1]x \tag{16}$$

그림 1은 $\beta_1 = 0.5+0.5\sin(x_2),\ \beta_2 = 1-\beta_1$, 초기조건을 $x_0 = [-1,\ 1]^T$로 하고 다음의 뱅뱅형태의 제어입력을 가했을 때의 시스템 응답을 보여준다.

$$u = -5sign(\sigma)$$

[7]의 방법과 같은 조건하에서 본 논문에서 제안된 방법이 보수성(conservativeness)이 덜함을 보이기 위해 다음의 시스템을 고려해보자.

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = A\\ &A_{d1} = A_{d2} = \begin{bmatrix}500 & 1\\0 & 500\end{bmatrix} = A_d,\\ &B = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \rho = \sin 10t \end{aligned}$$

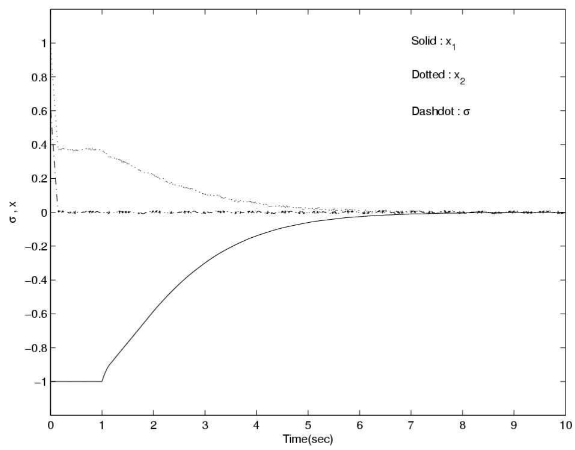

그림 1. 시뮬레이션 결과.

Fig. 1. Simulation results.

기존의 [2-6]의 방법은 (A,B)가 안정가능하지 않으므로 위의 시스템 (14)에 적용 불가능하다. $h>94.4$이면 [7]에 주어진 LMI 조건은 해가 존재하지 않아 적용할 수 없다. 그러나 본 논문에서 제안한 방법은 적어도 $h>10^{12}$이 되었을 때 비로소 해가 존재하지 않았다. 결국 본 논문에서 제안된 방법이 기존의 방법보다 좀 더 넓은 범위의 시스템에 적용가능하며 기존 방법들을 보완할 수 있음을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 시간지연이 있는 시스템을 위한 슬라이딩 모드 제어기 설계에 관하여 논하였다. 대상 시스템으로 비정합 불확실성을 상태 행렬 혹은 지연된 상태 행렬에 포함할 수 있는 폴리토픽 모델을 고려하였다. LMI를 사용하여 점근 안정도를 보장할 슬라이딩 평면의 존재조건을 유도하고 슬라이딩 평면을 매개 변수화하였으며 안정한 슬라이딩 모드를 보장하는 스위칭 궤환 제어기를 제안하였다. 마지막으로 수치적인 예를 통해 효용성을 보였다.

참고문헌

[1] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear matrix inequalities in system and control Theory," Philadelphia, SIAM, 1994.

[2] E. M. Jafarov, "Robust sliding mode controllers design techniques for stabilization of multivariable time-delay systems with parameter perturbations and external disturbances," *Int. J. Systems Science,* vol. 36, pp. 433-444, 2005.

[3] Y. Xia and Y. Jia, "Robust sliding-mode control for uncertain time-delay systems: An LMI approach," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 48, pp. 1086-1092, 2003.

[4] H.H. Choi, "Sliding-mode output feedback control design," *IEEE Trans. on Ind. Electron.*, vol. 55, pp. 4047-4054, 2008.

[5] R. El-Khazali, "Variable structure robust control of uncertain time-delay systems," *Automatica*, vol. 34, pp. 327-332, 1998.

[6] S. Oucheriah, "Dynamic compensation of uncertain time-delay systems using variable structure approach," *IEEE Trans. on Circuits Syst. I*, vol. 42, pp. 466-469, 1995.

[7] F. Gouaisbaut, M. Dambrine, and J. P. Richard, "Robust control of delay systems : A sliding mode control design via LMI," *Systems & Control Letters*, vol. 46, pp. 219-230, 2002.

[8] S. H. Zak and S. Hui, "On variable structure output feedback controllers," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 38, pp. 1509-1512, 1993.

최 한 호

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제16권 제1호 참조.