

# 적응적 세분화기법을 이용한 효율적 무요소법에 관한 연구

한규택<sup>#</sup>

## A Study on the Efficient Meshfree Method Using Adaptive Refinement Analysis

Kyu-Taek Han<sup>#</sup>

(Received 19 August 2010; received in revised form 27 September 2010; accepted 7 October 2010)

### Abstract

Meshfree methods show many advantages over finite element method(FEM) in the class of problems for which the remeshing process is inevitable when the conventional FEM used, such as propagating crack problems, large deformation and so on. One of the promising applications of meshfree methods is the adaptive refinement for problems having multi-scale nature. In this study, an adaptive node generation procedure is proposed and several numerical examples are also presented to illustrate the efficiency of proposed method.

**Keywords :** Finite Element Method(유한요소법), Meshfree Method(무요소법), Adaptive Refinement(적응적 세분화)

### 1. 서론

무요소법(meshfree method)은 유한요소법(finite element method)으로 풀기 어려운 고체 및 구조역학의 비선형 문제들을 해석하기 위하여 개발되어 온 수치해석법으로 필수 경계조건의 처리가 그리 간단하지 않고 계산시간이 상대적으로 오래 걸린다는 단점에도 불구하고 요소를 필요로 하지 않는 고유한 특성으로 인하여 현재 널리 주목을 받게 된 새로운 전산역학적인 해석방법이다.<sup>[4]</sup> 이러한 무요소법은 요소간 연관성(connectivity)의 제약을 받지 않는다는 장점 때문에 균일전파와 같이 경계면이 변화하는 문

제를 중심으로 활발하게 그 적용이 연구되었다. 무요소법에서는 성장하는 균열을 따라 요소를 재생성할 필요가 없으며 불연속면 묘사도 비교적 용이하다. 일반적인 유한요소해석은 초기에 형성된 메쉬(mesh)를 해석의 진행에 따라 그대로 사용하기 때문에 불규칙하게 진행되는 균열 해석의 경우 초기 메쉬의 형상을 따라 균열이 진행될 수 밖에 없으며 이에 따라 해석이 부정확하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 적응적 메쉬 세분화기법(adaptive refinement method)이 활발하게 연구되고 있으나 메쉬의 재형성과정이 복잡하고 재형성된 새로운 메쉬에 대한 물리량을 재구성하는데 또 다른 오차가 생기게 되는 문제점이 있다. 이러한 유한요소법의 한계를 극복하기 위하여 최근 무요소법에 대한 연구가 활발하다.<sup>[2-10]</sup> 유한요소법은 절점(particle)에 인접한 요소에 의해 그 절점의 영향권이

<sup>#</sup> 교신저자 : 부경대학교 기계공학과  
E-mail: kthan@pknu.ac.kr

결정되지만 무요소법의 경우는 요소의 개념없이 그 절점을 중심으로 하는 일정한 크기의 원 또는 구가 그 절점에서의 물리량을 결정한다는 점에서 근본적인 차이가 있다. 따라서 유한요소해석에서 필수적인 메쉬를 구성할 필요가 없고 단지 절점의 좌표 값만을 필요로 하게 된다. 무요소법을 이용하여 균열의 진행 문제를 해석하는 경우 새롭게 생성되는 균열은 기존의 절점을 이동할 필요 없이 새로운 절점만을 그 위치에 추가시키면 되므로 효율적인 해석이 가능하다는 장점이 있다. 또한 무요소법은 메쉬의 개념이 없어서 절점의 생성이나 소멸이 상대적으로 자유로워 적응적 세분화 방법을 적용하기가 매우 편리하다. 적응적 세분화 방법은 수치해석의 정확성을 효율적으로 확보하기 위하여 해석오차가 상대적으로 크거나 작은 부분의 해석정밀도를 선택적으로 조정하는 해석기법 중의 하나이다.<sup>[2-7]</sup> 이 방법은 일반적으로 오차의 평가부분과 그 오차를 바탕으로 국지적인 해석의 정밀도를 조정하는 부분으로 나눌 수 있다.

본 연구에서는 무요소법의 수치 해를 향상시키기 위하여 적분영역과 지지영역의 경계를 일치시키면서 무요소법의 장점을 도입하여 임의의 위치에 절점을 추가하거나 제거할 수 있는 적응적 세분화기법을 도입하여 변형해석에 더욱 효율적인 절점보간 무요소법을 제안하고 적용사례를 통하여 그 효율성을 보였다.

## 2. 적응적 세분화기법

### 2.1 오차평가

일반적인 유한요소법에서는 요소사이에 응력의 연속성이 없는 소위 응력의 점프현상이 있어서 많은 연구자들이 좀 더 정확하고 연속적인 응력분포를 얻기 위한 연구를 하였다. 대표적인 방법이 응력 평탄화(stress smoothing)방법인데 이 방법은 해석결과 얻어진 응력의 분포를 최소자승근사법(least square approximation method)를 이용하여 절점에서의 응력으로 변환하고 이를 형상함수를 사용하여 응력분포로 이용하는 방법이다. 이 후처리된 응력분포와 원래의 응력분포의 차이로 오차를 평가하고 이를 이용하여 적응적 해석을 한다. 그러나 무요소법의 경우

는 요소 자체가 없어서 전 해석영역에서 응력의 분포가 연속이기 때문에 연속적인 응력분포 특성을 오차의 평가에 이용할 수 없다. 따라서 적응적 메쉬 세분화기법을 도입하여 오차를 평가할 수 있다. 이 방법은 무요소법에서 계산된 응력이 오차가 큰 영역에서 진동한다는 특성을 이용한 것으로 해석결과 얻어진 응력을 낮은 차수의 형상함수로 투사하는 후처리를 함으로써 가상 진동모드를 제거하고 이 때 얻어진 투영응력과 원래의 응력을 비교하여 부분오차 및 전체오차를 구할 수 있다.

### 2.2 적응적 메쉬 세분화기법

적응적 메쉬 세분화기법은 수치해석의 정확성을 효율적으로 확보하기 위하여 해석오차가 상대적으로 크거나 작은 부분의 해석정밀도를 선택적으로 조정하는 해석기법 중의 하나이다. 적응적 메쉬 세분화기법은 크게 오차 추정부분과 적응적 모델링 부분으로 나눌 수 있는데 특히 정확한 오차를 산정하는 것이 해석의 효율성을 확보하는데 있어서 매우 중요하다. 첫째는 국부부분과 전체부분의 오차를 추정하는데 중요하고 세분화가 필요하다고 판단 시 사용된다. 둘째는 오차추정에서 나온 결과를 이용하여 오차분포의 결과를 보고 판단한다. 이 두 가지의 효율성과 효과성은 적응적 절차의 수행에 있어 매우 중요하다. 사후 오차추정 기법을 수행하기 위해 해석 값과 기준 값이 필요하다. 기준 값은 후 처리법에 의해 얻어진 값이고 후 처리법은 해석과정에서 구한 해를 이용하여 더욱 향상된 해를 얻은 다음 이 해를 해석 값으로 가정하여 먼저 구한 해와의 차이를 세분화 오차로 간주하여 오차추정치를 계산하는 방법으로 비교적 믿을 수 있는 오차추정치를 구할 수 있고 실무적인 응용에도 편리한 방법이다. 무요소법에서는 응력의 요소 간 불연속성이 없고 전체 문제영역에서 부드럽기 때문에 유한요소법에서 개발된 응력 평탄화기법은 오차추정에 사용될 수 없다. 무요소법에 적합한 오차추정의 개발이 필요하다.

#### 2.2.1 격자에너지오차 추정기법<sup>[2]</sup>

격자에너지오차 추정기법은 적분격자를 이용하는 무요소법의 적응적 세분화기법에 사용된다. 이것은

무요소법이 지배방정식을 토대로 적분영역에 전체적으로 또는 국부적으로 적분격자를 이용한다는 것에 기반을 두고 해석을 수행한다. 또한 각 적분격자의 에너지 오차를 조사하고 오차를 추정한다.

일반적으로 오차를 추정하기 위해서는 정해와 근사해의 차이를 근거로 하여 수치해석하는데 영역  $\Omega$ 에서 정의된  $r$ 과 근사된  $\hat{r}$ 에서 오차지수는 다음과 같다.

$$e = L(r, \hat{r}) \quad (1)$$

여기서  $L$ 은 정해와 근사해가 적용된 연산자이고  $e$ 는 연산에 따른 오차이다. 대부분의 문제에서는 정해의 형태인  $r$ 은 사용하지 않고 근사된  $\hat{r}$ 로부터 유도된 참고값이 사용된다. 수치해석에서 변수는 변위, 변형률, 응력 또는 에너지가 될 수 있다. 격자에너지오차 추정기법은 무요소에서 적분격자의 에너지오차를 이용한다. 적분격자에 의해 계산된 변수  $r$ 은 적분격자의 변형률 에너지이고 격자에너지는 다음과 같다.

$$E = \int_{cell} \sigma \epsilon d\Omega \quad (2)$$

무요소법의 근사화에서 계산된 격자에너지  $E_{comp}$ 는 지배방정식에 의해서 적분된 가우스 적분으로부터 얻어진다.

$$E_{comp} = \sum_{i=1}^m c_i \sigma_i \epsilon_i \quad (3)$$

여기서  $m$ 은 적분을 위해 사용된 적분격자의 관심점의 개수이고  $c_i$ 는 적분에 따른 계수이다. 또한 가우스 적분에 의해 해석된 기준값  $E_{ref}$ 는 다음과 같다.

$$E_{ref} = \sum_{i=1}^n c_i \sigma_i \epsilon_i \quad (4)$$

여기서  $n$ 은 참고값에 사용된 관심점의 개수이다. 격자의 에너지오차는 다음과 같다.

$$e = |E_{comp} - E_{ref}| (n \neq m) \quad (5)$$

관심점  $n$ 의 응력과 변형률은 정해에 따라 주어진 변위에 의해 계산되므로, 관심점  $m$ 의 경우와 같은 정확도를 갖는다. 그래서 해석하고자 하는 문제영역에서 모든 격자의 격자에너지오차의 합은 전체에너지오차와 같다.

$$e_{global} = \sum_{i=1}^N e_i \quad (6)$$

여기서  $N$ 은 전체 격자의 개수이고, 일반적으로 격자에너지오차의 계산은 다음 식에 의해 구한다.

$$e_n = \frac{e}{A} \quad (7)$$

여기서  $A$ 는 격자의 면적이다.

### 2.2.2 국부 적응적 세분화기법

적응적 세분화기법에서 정해에 도달하지 않으면 다시 세분화된다. 일반적으로 전체영역을 세분화하는 것은 바람직하지 않고 높은 효율성을 위해서 단지 국부영역에 세분화기법을 적용한다. 국부영역에 쉽게 적용할 수 있는 삼각 적분격자와 밀도계수를 이용한 국부들로네 알고리즘(local delaunay algorithm)을 사용한다. 격자에너지오차 추정법에 의한 국부 오차분포에 따라 절점의 밀도계수는 변한다. 밀도계수는 격자에너지오차를 절점에너지오차로 전환시킨다. 전자는 격자의 꼭지점에 똑같이 분포되고 후자는 적분격자로부터 분포된 합을 의미한다. 또한 세분화가 필요한 곳의 위치를 결정하기 위해서 미리 절점의 상대오차 한계값을 정하고 그 한계값을 초과하는 경우에는 해당 절점의 밀도계수를 전환시킨다. 국부영역의 세분화과정은 밀도계수의 변화에 따르고 밀도계수가 국부 밀도계수를 제어하기 때문에 세분화의 정도를 결정할 수 있다.

국부 들로네 삼각화 알고리즘은 2차원의 국부영역에서 절점과 경계에 쉽게 적용될 수 있다. 절점 I의 밀도계수는 변한다. 국부 세분화과정은 Fig. 1에 도식화하였다.

첫째, 절점을 삽입한다(Fig. 1(a)). 새로운 절점은 삼각배경 격자의 루프에 의해서 생성된다. 삼각적분격자가 예약일 경우에 외접원의 중심에 절점이 삽입되고, 둔각일 경우에는 가장 긴 변의 중간에 절점이 삽입된다(Fig. 1(b)).

둘째, 국부영역을 정식화한다. 절점 I의 중심에 원을 만든다(Fig. 1(c)). 원 내부 또는 원에 교차하는 격자를 제거한다(Fig. 1(d)). 원의 반경은 블록크기이고 격자수정의 범위를 제어한다.

셋째, 들로네 삼각화 알고리즘을 사용하여 국부영

역의 삼각적분격자를 재생성시킨다(Fig. 1(e)).

넷째, 밀도계수를 다시 계산한다. 삼각적분격자의 재생성으로 모든 절점의 밀도계수는 변화된다.

만약 개선된 절점 1의 밀도계수가 전환된 밀도계수보다 크면 세분화과정은 반복된다. 반복절차과정에서 새로운 절점의 변수는 이전의 적분격자에 의해 평가되고, 해석완료시에 반복을 위해 다음 반복과정이 수행된다. 이 방법은 절점이 많은 문제영역일수록 더욱 효과적이다.

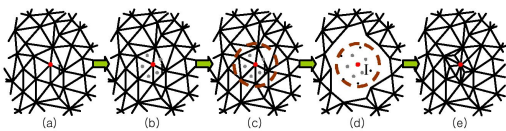


Fig. 1 Refinement process of local area

## 2.2 순차적인 적응적 기법의 전략

순차적인 적응적 방법에는 세 가지의 주요 요소가 있는데 그것은 오차지수(indicator), 모델 세분화 및 상태변수 전달 또는 보간법이다. Fig. 2는 도식적으로 순차적인 적응적 해석과정에서 사용되는 단계를 표시하고 있다.

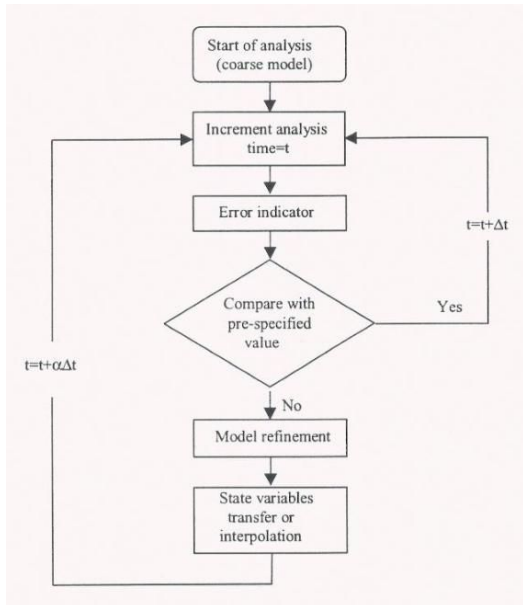


Fig. 2 Outline of progressive adaptive method

## 3. 적응모델 수치화과정

메쉬프리 형상함수를 표시하는 수식은 일반적으로 매우 복잡하지만 형상함수들의 대체적인 형태는 가중함수(weighting function)에 의하여 결정된다. 한 절점이 결정되면 그에 해당하는 가중함수는 그 절점의 위치를 중심으로 하여 그 중심점에서 가장 큰 값을 갖고 이로부터 멀어지면서 영(zero)의 값으로 접근하는 형상을 갖는다. 또한 메쉬프리 형상함수들은 같은 모양을 하고 있고, 이는 적응모델 해석에 있어서 상당한 이점을 제공한다. 새롭게 추가한 절점들에 대해 현재 존재하는 절점의 형상함수들의 매트릭스(matrix)는 재생커널근사(reproducing kernel approximation)에 있어서의 일관성(consistency)를 보장하기위해서 국부적으로 반드시 재구성되어야 한다. Fig. 3은 새롭게 추가한 절점의 형상함수에 대하여, 추가한 절점을 중심으로 형성된 영역과 기존에 존재하는 절점의 영역이 교차하는 작은 영향영역(support)내의 수정되어야 할 국부 재생커널들을 보여주고 있다.

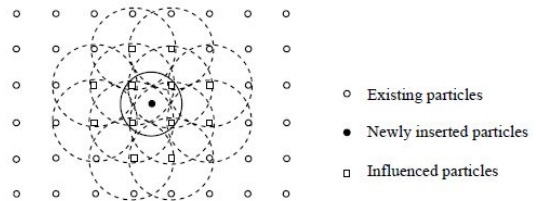


Fig. 3 Particles influenced by the newly inserted particles in adaptive refinement

Fig. 4는 보로노이 셀(Voronoi cell)의 성질을 이용하여 보로노이 셀의 정점에 추가한 절점들을 나타내고 있다.

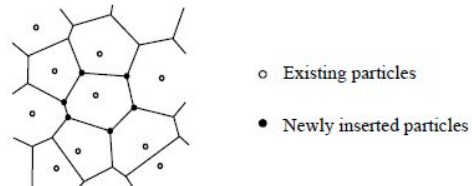


Fig. 4 Insertion of particles based on a Voronoi diagram

## 4. 해석모델 및 수치해석 예제

### 4.1 유공평판 문제

Fig. 5에서 보는 바와 같이 x축 방향으로 단일 인장하중을 받는 중앙에 원형 구멍(hole)을 가진 유공평판문제를 해석대상으로 생각하였다.

Fig. 6과 같이 적응모델의 해를 비교하기 위하여 균일하게 세분화된 모델을 생성하였다. 이때 대칭성 때문에 평판의 상단 오른쪽부분만 모델링하여 해석하였으며, 또한 탄성계수  $E=2.11 \times 10^5$ , 푸와송비 0.3인 평면변형률문제로 가정하였다.

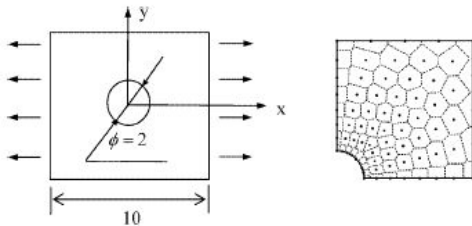


Fig. 5 Problem description of for plate with a hole

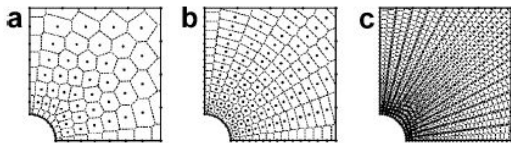


Fig. 6 Uniformly refined models

Fig. 7에 보여준 바와 같이 에너지오차 밀도지수에 근거하여 3단계의 적응세분화가 이루어졌다.

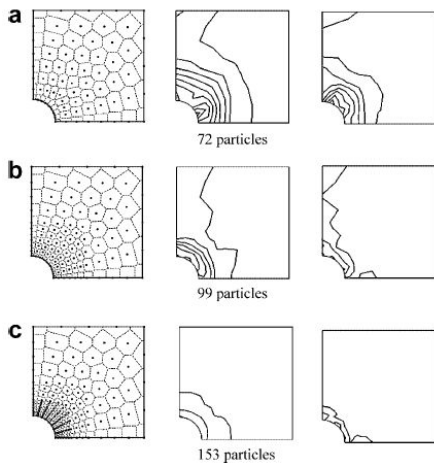


Fig. 7 a Adaptive refinement b corresponding energy error density indicator c true indicator

Fig. 8에 보인 바와 같이 균일하게 세분화된 모델(493개 입자)과 적응적으로 세분화된 모델(153개 입자)을 비교한 결과 에너지오차 밀도지수는 진에너지오차 밀도지수와 일치한다.

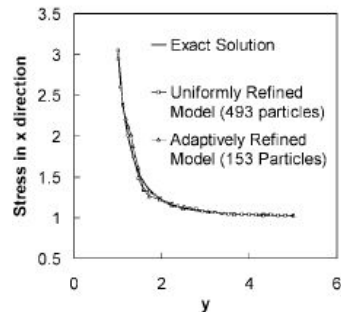


Fig. 8 Comparison of solutions of uniform and adaptive refinement model

### 4.2 L형상 요소의 적응성

Fig. 9와 같이 압력하중을 받는 탄성 L형상요소를 생각하자. 탄성계수  $E=10^5$ , 푸와송비 0.3인 평면응력 문제로 가정하였다.

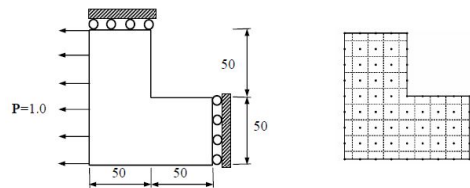


Fig. 9 L-shape domain in plane stress condition

적응모델의 해와 비교하기 위하여 Fig. 10과 같이 균일하게 세분화된 모델을 생성하였다. 또한 Fig. 11과 같이 에너지오차 밀도지수에 근거하여 3단계의 적응세분화가 이루어졌다.

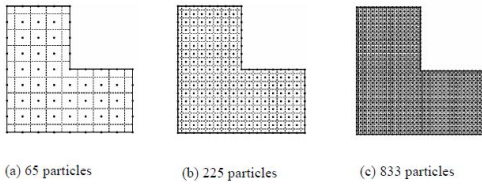


Fig. 10 Uniformly refined models

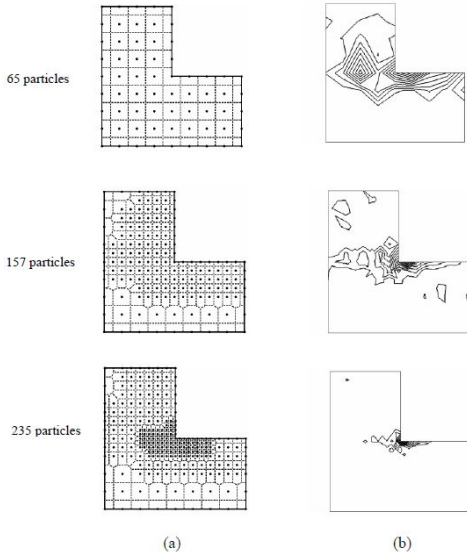


Fig.11 (a)Adaptive refinement (b)corresponding energy error density indicator

833개 절점의 균일세분화 모델과 235개 절점의 적응모델의 전단응력분포가 Fig. 12에 나타나 있으며, 그 결과는 잘 일치함을 알 수 있다.

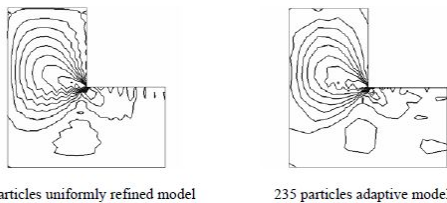


Fig. 12 Comparison of shear stress for uniform and adaptive refinement models

Fig. 13에 나타난 바와 같이 균일 세분화 모델과 적응 세분화모델의 에너지오차 norm의 비교결과 적응 세분화방법이 효율적임을 알 수 있다.

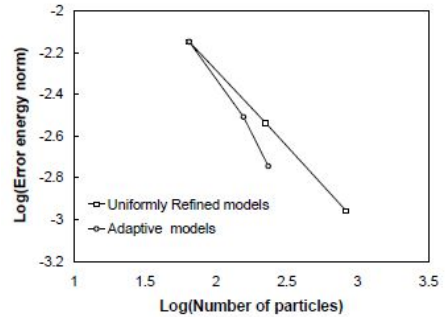


Fig. 13 Energy error norms of uniform and adaptive refinement models

## 5. 결론

본 연구에서는 무요소법의 수치 해를 향상시키기 위하여 적분영역과 지지영역의 경계를 일치시키면서 무요소법의 장점을 도입하여 임의의 위치에 절점을 추가하거나 제거할 수 있는 적응적 세분화기법을 도입하여 변형해석에 더욱 효율적인 절점보간 무요소법을 제안하고 적용사례를 통하여 그 효율성을 보였다.

무요소법의 장점을 충분히 활용하려면 먼저 절점을 효율적으로 자동배치하는 적응적 기법의 개발이 필요하며 이를 위해서는 정확한 국지오차 및 전체오차의 추정방법이 필수적이라 할 수 있다.

본 연구에 사용된 Voronoi diagram은 적응적 세분화의 기본 구조를 제공하며, 세분화기법에서 절점추가를 위한 기하학적 참조로서 뿐만 아니라 형상함수 영향영역 크기를 결정하고 이웃하는 절점의 정보를 얻는데도 유용한 것으로 판단된다.

격자에너지오차 추정법은 두 개의 다른 가우스적분에 의한 참고 격자에너지와 해석이 수행된 격자에너지의 차에 의해 측정된다. 이를 근거로 격자에너지오차에 따라 변화하는 밀도계수와 국지 들로네 삼각화 알고리즘을 유공평판 문제 및 압력하중을 받는 L형상 문제에 적용하였다.

유공평판 문제에서 원형 홀 주변에는 절점이 자동적으로 추가되었으며 적응적 세분화단계가 이루어졌다. 이 예제는 격자에너지오차 추정법이 절점대신 적분격자에 기초한다는 점에서 일반적으로 사용되는 오차추정법과는 매우 다르다. 따라서 형상함수

및 근사함수의 정확도가 좋지 않으면 오차추정법은 왜곡될 우려도 있다. 그러므로 정밀한 오차추정법과 정해에 근접한 해를 얻기 위해서는 정확한 근사함수를 선택하는 과정도 필요하다.

또한 국지오차에 근거하여 기존 절점배치에 영향을 받지 않고 절점을 연속적으로 배열할 수 있는 알고리즘의 개발도 필요하다고 판단된다.

향후 연구에서 적응적 세분화방법에 사용되는 각 계수들의 최적 값을 산정하면 좀 더 안정되고 효율적인 해석방법을 도출할 수 있을 것으로 생각한다.

## 참고문헌

1. S. Li and W. K. Liu, Meshfree Particle Methods, Springer, New York, 2004.
2. H. J. Chung and T. Belytschko, "An Error Estimates in the EFG Method," Computational Mechanics, Vol. 21, pp.91-110, 1998.
3. J. G. Wang and G. R. Liu, "A Point Interpolation Meshless Method Based on Radial Basis Functions," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 68 , pp. 1623-1648, 2002.
4. S. Jun and S. Im, "Multiple-scale Meshfree Adaptivity for the Simulation of Adiabatic Shear Band Formation," Computational Mechanics, Vol. 25 , pp. 257-266, 2000.
5. G. R. Liu and Z. H. Tu, "An Adaptive Procedure Based on Background Cells for Meshless Methods," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, pp. 1923-1943, 2002.
6. G. R. Liu, An Introduction to Meshfree Methods and their Programming, Springer, New York, 2005.
7. C. K. Choi and H. J. Chung , "An Error Estimate and Adaptive Time Stepping for Various Direct Time Integration Methods," Computers and Structure, Vol. 60, No. 6, pp. 923-944, 1996.
8. J. S. Chen, C. Pan, C. Roque and H. P. Wang, "A Lagrangian Reproducing Kernel Particle Method for Metal Forming Analysis," Computational Mechanics, Vol. 22, pp. 289-307, 1998.
9. P. Krysl and T. Belytschko, "Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method," Computational Mechanics, Vol. 17, pp. 26-35, 1996.
10. K. T. Han, "Analysis of Bulk Metal Forming Process by Reproducing Kernel Particle Method," Journal of the Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 8, No. 3, pp. 21-26, 2009.