

일정체적 변단면 원호형 아치의 자유진동

Free Vibrations of Tapered Circular Arches with Constant Volume

이 병 구† · 이 태 은* · 윤 희 민** · 최 종 민**

Byoung Koo Lee, Tae Eun Lee, Hee Min Yoon and Jong Min Choi

(2009년 11월 2일 접수 ; 2009년 12월 29일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Tapered Arch(변단면 아치), Circular Arch(원호형 아치), Constant Volume(일정체적), Regular Polygon Cross-section(정다각형 단면), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

This paper deals with free vibrations of the tapered circular arches with constant volume, whose cross sectional shape is the solid regular polygon. Volumes of the objective arches are always held constant regardless shape functions of the cross-sectional depth. The shape functions are chosen as the linear, parabolic and sinusoidal ones. Ordinary differential equations governing free vibrations of such arches are derived and solved numerically for determining the natural frequencies. In the numerical examples, hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints are considered. As the numerical results, the relationships between non-dimensional frequency parameters and various arch parameters such as rise ratio, section ratio, side number, volume ratio and taper type are reported in tables and figures.

1. 서 론

아치는 보, 기둥, 평면판/곡면판 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중의 하나로 다양한 구조물의 뼈대구조로 널리 이용되고 있다. 최근 건설되는 거대한 구조물도 이러한 단위구조들의 결합체이므로 단위구조의 정·동적 거동에 관한 고찰은 구조공학분야에서 매우 중요한 연구과제이다.

이 연구에서 아치는 동일한 곡선길이와 동일한 체적을 갖는 부재이다. 일정체적 부재는 단면형상 및 변단면의 형태에 따라서 동적 특성이 달라지므로 동일한 체적에서 최대의 동적 안정성을 확보할 수 있는 단면의 최적형상을 결정할 수 있다. 이는 일정체

적에서 최대의 동적강성을 가질 수 있으므로 최적설계의 개념에서도 매우 중요한 연구과제이다⁽¹⁾. 최대의 동적 안정성을 갖는 아치를 결정하기 위해서는 일정체적에서 아치의 기하적 조건에 따른 동적 특성을 먼저 고찰하여야 하며, 따라서 이 연구는 동적 최강아치를 결정하기 위하여 반드시 이루어져야 하는 선행연구이다.

이 연구와 직접 관련이 있는 아치의 자유진동 해석과 일정체적 부재의 거동해석에 관한 연구동향을 고찰하면 다음과 같다.

Lee와 Wilson⁽²⁾은 회전관성과 축변형 효과를 고려한 변화곡률 균일단면 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산정하였다. Huang 등⁽³⁾은 전단변형을 고려한 원호아치의 자유진동 및 안정에 관한 연구에서 등분포하중을 받는 양단고정 아치의 고유진동수 및 좌굴하중을 산정하였다. Karami와 Malekzadeh⁽⁴⁾은 미분구적법을 이용한 변단면 원호

† 교신저자; 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

E-mail : bkleest@wku.ac.kr

Tel : (063)850-6718, Fax : (063)857-7204

* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

** 원광대학교 대학원 토목환경공학과

아치의 자유진동에 관한 연구에서 비대칭 변단면 및 step 변단면 원호아치의 고유진동수를 엄밀해 및 타 해석법과 비교하여 미분구적법의 우수성을 입증하였다. Tufekci와 Dogruer⁽⁵⁾은 전단변형효과와 회전관성을 고려한 균일단면 원호아치의 면의 자유진동에 관한 연구를 수행하였다. Shin 등⁽⁶⁾은 미분구적법(DQM)과 미분변환법(DTM)을 이용하여 변단면 원호아치의 자유진동 해석을 수행하였으며, Marur와 Kant⁽⁷⁾는 교축 전단효과와 일반변위성분을 고려한 고차 모델을 이용하여 sandwich 적층 아치의 자유진동에 관한 연구를 수행하였다.

Lee와 Oh⁽⁸⁾는 일정체적 기둥에 대하여 대변형 이론을 이용하여 최강기둥의 단면형상을 산정하였다. Lee 등⁽⁹⁾은 일정체적 기둥에 작용하는 압축하중에 대한 동적 개념을 이용하여 정적 최강기둥의 단면형상을 찾았다. 이 와 김⁽¹⁰⁾은 일정체적을 갖는 고정-회전 기둥의 자유진동 및 좌굴형을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 대상 부재의 동적 안정해석을 실시하였다. 이 등⁽¹¹⁾은 일정체적 단순지지 최강보에 관한 연구에서 최강보는 “보의 기하적 조건 및 하중조건에 대하여 보의 최대 거동값이 최소가 되는 단면형상을 갖는 보”로 정의하고, 정적거동이 최소가 되는 최강단면비를 제시하였다.

이상에서 고찰한 바와 같이 아치의 자유진동에 관한 연구는 여러 연구자에 의해 활발히 진행되고 있으나 일정체적 변단면 아치의 자유진동에 관한 연구는 미미한 상태이다. 특히 동적 최강아치에 관한 연구는 전혀 이루어지지 않고 있으며, 이 연구는 동적 최강아치의 결정을 위하여 반드시 선행되어야 하는 매우 중요한 연구과제이다.

이 연구에서 해석대상인 변단면 원호형 아치는 시간길이와 체적이 일정하고, 아치의 단면은 정다각형 중실단면이다. 이 연구에서 해석대상 아치의 기하조건은 다음과 같다.

- (1) 단면깊이 형상함수: 직선, 포물선, 정현 함수
- (2) 지점조건: 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정

이와 같은 일정체적 변단면 원호형 아치의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다.

수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 아치變數 즉, 높이비, 단면비, 정다각형 邊數, 체적비 및 변단면 종류 사이의 관계를 표 및 그림에 나타내었다.

2. 일정체적 곡선부재

2.1 부재의 정의

Fig. 1(a)는 시간길이 l , 높이 h , 곡률반경 ρ , 중심각 α , 원주길이 $L(= \rho\alpha)$ 인 원호형 아치 부재를 나타낸다. 아치의 선형은 직교좌표계 (x,y) 에서 정의되며, 좌단 $a(x=0)$ 로부터 임의점 (x,y) 까지 곡선길이는 s 이다. 아치는 정점에 대하여 좌우대칭이므로 정점 $(x=l/2)$ 에서 $s=L/2$ 이고, 우단 $b(x=l)$ 에서 $s=L$ 이다. 아치의 체적은 일정체적 V 를 갖는다. 단면은 정다각형 중실단면이고, (x,y) 에서 단면깊이, 단면적, 단면2차모멘트는 각각 d, A, I 이다. Fig. 1(b)는 (x,y) 에서 d 의 변화를 나타낸다. 양단 a, b 에서 $d=d_a$ 이고, 정점에서 $d=d_c$ 이다. (x,y) 에서 d 는 s/L 의 함수인 $d=d_a F(s/L)$ 로 표현되며, $F(s/L)$ 은 d 의 변화를 나타내주는 형상함수이다.

2.2 단면의 성질

단면깊이 d 의 형상함수 F 를 결정하기 위하여 좌

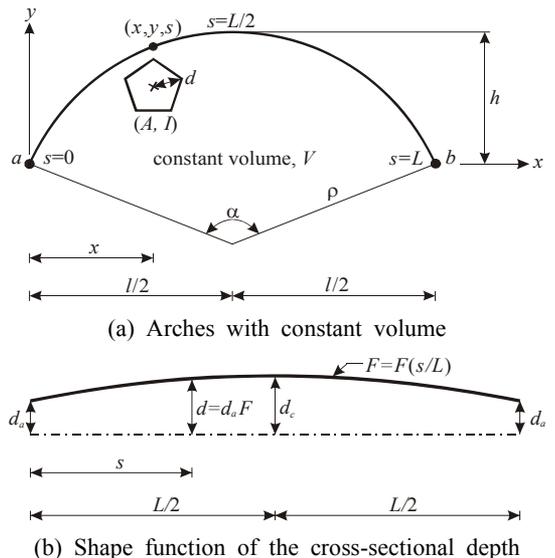


Fig. 1 Tapered Arch having regular polygon cross-section with constant volume

단의 단면깊이 d_a 에 대한 정점의 단면깊이 d_c 의 비로 정의되는 단면비 e 를 다음과 같이 도입한다.

$$e = d_c/d_a \quad (1)$$

단면깊이가 d 이고 정다각형 邊數가 $k(\geq 3)$ 인 단면의 A, I 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = c_1 d^2 \quad (2.1)$$

$$c_1 = k \sin(\pi/k) \cos(\pi/k) \quad (2.2)$$

$$I = c_2 d^4 \quad (3.1)$$

$$c_2 = (k/12) \sin(\pi/k) \cos^3(\pi/k) [3 + \tan^2(\pi/k)] \quad (3.2)$$

식 (2.2), (3.2)에서 $k = \infty$ 이면 원형단면이다.

단면깊이 d 는 변화깊이이므로 곡선길이 s 에 관한 형상함수 F 로 나타내면 다음과 같다.

$$d = d_a F \quad (4)$$

여기서 $F = F(s/L)$ 의 형상함수이다.

식 (2.1)을 이용하여 아치의 일정체적 V 를 구하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^L A ds = c_1 c_3 d_a^2 L \quad (5)$$

식 (5)에서 c_3 는 형상함수 F 에 따라서 결정되는 계수이며, 다음 절 2.3에서 결정한다.

2.3 형상함수

단면깊이 d 의 변화를 설명해주는 변단면 종류를 직선, 포물선, 정현 함수로 채택하면 식 (4)의 F 및 식 (5)의 계수 c_3 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

(1) 직선 변단면(linear taper)

$$F = 2(e-1)(s/L) + 1, 0 \leq s \leq L/2 \quad (6.1)$$

$$F = 2(e-1)(1-s/L) + 1, L/2 \leq s \leq L \quad (6.2)$$

$$c_3 = (e^2 + e + 1)/3 \quad (7)$$

(2) 포물선 변단면(parabolic taper)

$$F = -4(e-1)(s/L)(s/L-1) + 1, 0 \leq s \leq L \quad (8)$$

$$c_3 = (8e^2 + 4e + 3)/15 \quad (9)$$

(3) 정현 변단면(sinusoidal taper)

$$F = (e-1) \sin(\pi s/L) + 1, 0 \leq s \leq L \quad (10)$$

$$c_3 = e^2/2 + (4/\pi - 1)e + 1.5 - 4/\pi \quad (11)$$

식 (5)를 이용하여 단면깊이 d_a 를 일정체적 V 로 나타내면 다음과 같다.

$$d_a = [V/(c_1 c_3 L)]^{1/2} = \beta l / (\epsilon c_1 c_3)^{1/2} \quad (12)$$

위 식에서 β, ϵ 은 체적비 및 곡선길이 비이며 다음 식들과 같이 정의된다.

$$\beta = \sqrt{V/l^3} \quad (13)$$

$$\epsilon = L/l \quad (14)$$

식 (4), (12)를 이용하여 식 (2.1), (3.1)의 A, I 를 형상함수 F 로 나타내면 다음과 같다.

$$A = c_1 d^2 = [\beta^2 l^2 / (\epsilon c_3)] F^2 = c_4 F^2 \quad (15.1)$$

$$c_4 = \beta^2 l^2 / (\epsilon c_3) \quad (15.2)$$

$$I = c_2 d^4 = f [c_2 \beta^4 l^4 / (\epsilon c_1 c_3)^2] F^4 = c_5 F^4 \quad (16.1)$$

$$c_5 = c_2 \beta^4 l^4 / (\epsilon c_1 c_3)^2 \quad (16.2)$$

3. 수학적 모형

3.1 동적 평형방정식

Fig. 2는 제 2장에서 선형과 단면이 정의된 원호형 아치의 기하적 형상을 나타낸다. 양쪽 지점은 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 아치축의 임의점 (x, y) 에서 곡률반경의 경사각도는 ϕ 이고, ϕ_L 은 좌단 곡률반경과 수평축이 이루는 각도이다.

아치가 자유진동하게 되면 아치축은 동적 변위를 갖게 된다. w, v 및 ψ 는 곡률방향 변위, 접선방향 변위 및 단면회전각이며 모두 동적 양이다. 이 그림에서 체변수는 화살표 방향이 (+) 부호규약이다.

자유진동 상태에서 아치는 w, v 및 ψ 에 의하여 동적 축방향력, 전단력, 휨모멘트 N, Q, M 이 발생한다. 질량을 갖고 있는 아치의 미소요소에는 곡률

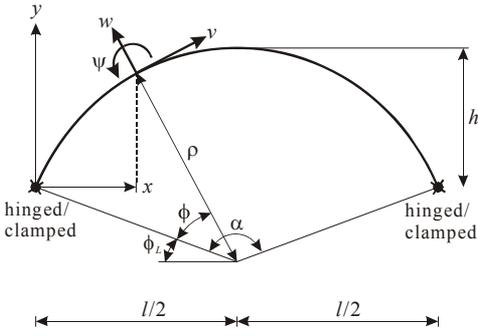


Fig. 2 Geometry of arch

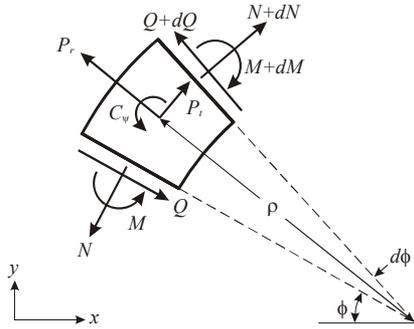


Fig. 3 Loads on arch element

방향 관성력 P_r , 접선방향 관성력 P_t 및 회전관성우력 C_ψ 가 발생한다.

Fig. 3은 아치의 미소요소에 발생하는 합응력과 관성력을 나타내며, 화살표 방향이 (+) 부호규약이다. 이 그림에서 미소요소에 작용하는 힘들의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다⁽²⁾.

$$N' + Q + \rho P_t = 0 \quad (17)$$

$$Q' - N + \rho P_r = 0 \quad (18)$$

$$M' / \rho - Q - C_\psi = 0 \quad (19)$$

위 식에서 ($'$) = $d/d\phi$ 의 미분연산자이다.

3.2 합응력 및 관성력

아치의 단면에 발생하는 N, M 및 ψ 는 w, v 를 이용하여 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다⁽¹²⁾.

$$N = (EA/\rho)(w + v') + (EI/\rho^3)(w'' + w) \quad (20)$$

$$M = -(EI/\rho^2)(w'' + w) \quad (21)$$

$$\psi = (1/\rho)(w' - v) \quad (22)$$

위 식에서 E 는 arch 재료의 탄성계수이다.

아치의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 관성력 P_r, P_t 및 C_ψ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽¹³⁾.

$$P_r = \gamma A \omega_i^2 w \quad (23)$$

$$P_t = \gamma A \omega_i^2 v \quad (24)$$

$$C_\psi = \gamma I \omega_i^2 \psi \quad (25)$$

여기서 γ 는 arch재료의 질량밀도, ω_i 는 고유각진동수, $i(=1,2,3,4,\dots)$ 는 모드번호이다.

3.3 지배미분방정식

(1) 지배미분방정식의 유도

동적 평형방정식과 합응력 및 관성력을 이용하여 일정체적을 갖는 변단면 원호형 아치의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도한다. 상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 무차원 변수들을 다음과 같이 도입한다.

$$f = h/l \quad (26)$$

$$\zeta = \rho/l \quad (27)$$

$$\xi = x/l \quad (28)$$

$$\eta = y/l \quad (29)$$

$$\lambda = s/l \quad (30)$$

$$\bar{w} = w/l \quad (31)$$

$$\bar{v} = v/l \quad (32)$$

$$C_i = \omega_i l \sqrt{\gamma/E} \quad (33)$$

위에서와 같이 길이차원의 (h, ρ, x, y, s, w, v)는 시간길이 l 로 정규화하였다. f 는 높이비, ζ 는 무차원 곡률반경, (ξ, η)는 무차원 직교좌표계, λ 는 무차원 곡선길이, (\bar{w}, \bar{v})는 무차원 변위, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (20), (21)에 식 (15.1), (16.1)을 대입하고 이렇게 얻어진 N, M 을 식 (17)~(19)의 동적 평형방정식에 대입한다. 식 (17), (18)에서 식 (19)를 이용하여 Q 를 소거하고 식 (26)~(33)의 무차원 변수들을 이용하면 일정체적 변단면 원호형 아치의 자유진동을 지배하는 식 (34), (35)의 무차원 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\bar{w}'''' = a_1 \bar{w}'''' + (a_2 + C_i^2 a_3 - 2) \bar{w}''$$

$$\begin{aligned}
 &+(a_1 - C_i^2 a_4) \bar{w}' + (a_2 + a_5 + C_i^2 a_6 - 1) \bar{w} \\
 &+(a_5 - C_i^2 a_3) \bar{v}' + C_i^2 a_4 \bar{v}
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\bar{v}'' = (C_i^2 a_7 - 1) \bar{w}' + a_8 \bar{w} + a_9 \bar{v}' + C_i^2 a_{10} \bar{v} \tag{35}$$

위의 상미분방정식에서 계수 $a_1 \sim a_{10}$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = -8F^{-1}F' \tag{36.1}$$

$$a_2 = -12F^{-2}F'^2 - 4F^{-1}F'' \tag{36.2}$$

$$a_3 = -\zeta^2 \tag{36.3}$$

$$a_4 = 4F^{-1}F'\zeta^2 \tag{36.4}$$

$$a_5 = -s_r^2 F^{-2} \zeta^2 \tag{36.5}$$

$$a_6 = s_r^2 F^{-2} \zeta^4 \tag{36.6}$$

$$a_7 = s_r^{-2} F^2 \tag{36.7}$$

$$a_8 = -2F^{-1}F' \tag{36.8}$$

$$a_9 = -2F^{-1}F' \tag{36.9}$$

$$a_{10} = -s_r^{-2} F^2 - \zeta^2 \tag{36.10}$$

여기서 $s_r (= \sqrt{c_4/c_5})$ 은 세장비이며 다음 식과 같다.

$$s_r = (c_1/\beta) \sqrt{\epsilon c_3/c_2} = l/\sqrt{I_a/A_a} \tag{37}$$

(2) 경계조건

회전지점에서 변위 w , v 및 식 (21)의 휨 모멘트 M 은 발생하지 않는다. 따라서 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{w} = 0 \tag{38}$$

$$\bar{v} = 0 \tag{39}$$

$$\bar{w}'' = 0 \tag{40}$$

고정지점에서 변위 w , v 및 식 (22)의 단면회전 각 ψ 는 발생하지 않는다. 따라서 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{w} = 0 \tag{41}$$

$$\bar{v} = 0 \tag{42}$$

$$\bar{w}' = 0 \tag{43}$$

(3) 곡률항 및 단면항

위에서 유도한 상미분방정식은 ϕ 에 관한 미분방정식이므로 계수 $a_1 \sim a_{10}$ 에 포함되어 있는 F, F', F'' 는 독립변수인 ϕ 항으로 나타내어야 한다. 이를 위하여 먼저 원호형 아치의 무차원 곡률반경 ζ , 중심각 α 및 곡선길이 비 ϵ 를 다음과 같이 산정한다.

$$\zeta = (4f^2 + 1)/(8f) \tag{44}$$

$$\alpha = 2 \tan^{-1} [f/(0.25 - f^2)] \tag{45}$$

$$\epsilon = \zeta \alpha \tag{46}$$

위 식들에서 높이비 f 는 입력변수이다.

이제 변단면 종류에 따라서 결정되는 식 (6), (8), (10)의 형상함수식 F 에 포함된 독립변수 s/L 는 다음과 같이 독립변수인 ϕ 항으로 나타낼 수 있다.

$$s/L = \rho \phi / (\epsilon l) = (\zeta/\epsilon) \phi \tag{47}$$

이상에서 나타난 식 (44)~(47)을 이용하면 계수 $a_1 \sim a_{10}$ 에 포함되어 있는 형상함수 F 를 ϕ 항으로 계산할 수 있다. F 의 1계, 2계 미분 F', F'' 는 미분구적법⁽¹⁴⁾을 이용하여 산정하였다.

계수 $a_1 \sim a_{10}$ 에 포함되어 있는 s_r, ζ 은 식 (37), (44)로 계산할 수 있고 식 (37)에서 체적비 β 는 입력변수이다.

아치축의 무차원 선형좌표 (ξ, η) 는 다음과 같이 독립변수인 ϕ 항으로 나타낼 수 있다.

$$\xi = 0.5 - \zeta \cos(\phi + \phi_L) \tag{48.1}$$

$$\phi_L = (\pi - \alpha)/2 \tag{48.2}$$

$$\eta = [\zeta^2 - (\xi - 0.5)^2]^{1/2} + f/2 - 1/(8f) \tag{49}$$

원호형 아치의 기하적 형상을 정의해주는 무차원 변수(f, e, k, β , 변단면 종류)를 입력하면 위의 식 (44)~(49)를 이용하여 계수 $a_1 \sim a_{10}$ 및 아치의 무차원 선형식 (ξ, η) 를 산정할 수 있다.

4. 수치해석 예 및 토의

4.1 수렴해석 및 검증

이상의 해석이론을 이용하여 일정체적 변단면 원호형 아치의 무차원 고유진동수 C_i 를 산출할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 FORTRAN어로 개발하였다. 변단면 종류(직선/포물선/정형), 지점조건(회전-회전/

회전-고정/고정-고정), 높이비 f , 단면비 e , 정다각형 변수 k , 체적비 β 를 입력하고 아치의 C_i 를 산정하였다.

이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법⁽¹⁵⁾을 이용하였고, 미분방정식의 고유치인 C_i 는 행렬값 탐사법을 결합한 Regula-Falsi법⁽¹⁵⁾을 이용하여 산출하였다.

수치해석 예를 보이기 전에 수렴해석을 실시하였다. Fig. 4는 상미분방정식의 수치적분에서 중심각 α 의 분할개수에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 수렴해석 결과를 나타낸다. 아치조건은 이 그림의 상단에 표시되어 있다. 수렴해석 결과 α 의 분할개수($\alpha/\Delta\alpha$)가 약 40인 경우 제 4모드까지의 C_i 는 모두 유효숫

자 4자리까지 수렴하였다. 이후의 모든 수치해석 예에서는 분할개수를 50으로 C_i 를 산출하였다.

4.2 수치해의 검증

이 연구의 이론 및 수치해석 방법을 검증하기 위하여 이 연구와 SAP2000에서 산정한 고유진동수를 Table 1에 나타내었다. SAP2000의 해석에서는 아치를 50개의 보 요소로 모형화하여 고유진동수를 산정하였다. 고유진동수 산정에 이용한 아치조건은 다음과 같다.

- 포물선형 변단면, 정사각형 단면($k=4$)
- $l=1$ m, $h=0.3$ m($f=0.3$; $\alpha=2.162$; $\epsilon=1.225$)
- $d_a=0.0336$ m, $d_c=0.0504$ ($e=1.5$)
- $V=0.0025$ m³($\beta=0.05$; $s_r=103$)
- $E=6.89 \times 10^{10}$ N/m², $\gamma=2680$ kg/m³(알루미늄)

이상의 수치들을 식 (33)에 대입하면 고유진동수 $F_i = \omega_i / (2\pi) = (l/2\pi) \sqrt{E/\gamma} C_i = 807.0 C_i$ (Hz)로 산정되어 C_i 값을 F_i (Hz)값으로 환산할 수 있다.

이 표에서 두 F_i 의 차이는 평균 0.54%를 보이고 있어 이 연구의 이론전개 및 수치해석 방법의 타당성을 검증할 수 있었다.

4.3 변수연구

Table 2는 $f=0.3$, $e=1.5$, $k=4$, $\beta=0.05$ 인 아치의 지점조건별 무차원 고유진동수 C_i 를 나타낸다. 이 표에서 $C_1 \sim C_3$ 는 휨 모드(flexural mode)가 지배적인 모드이며, 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전 지점

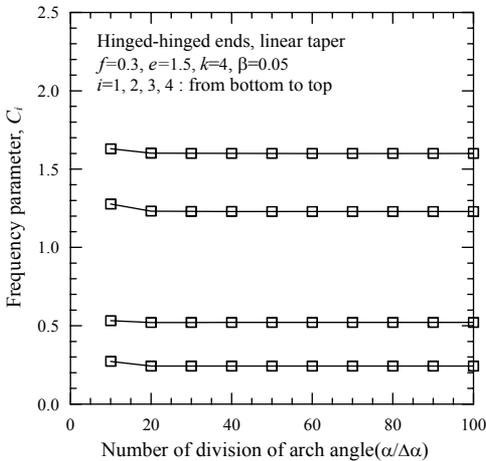


Fig. 4 Convergence analysis

Table 1 Comparison of natural frequencies F_i between this study and SAP2000

End constraint	i	Natural frequencies, F_i (Hz)		Error(%)*
		This study	SAP2000	
Hinged - hinged	1	201.4	199.1	1.14
	2	490.5	486.0	0.92
	3	994.1	991.3	0.28
	4	1256.6	1256.0	0.05
Hinged - clamped	1	250.7	247.1	1.44
	2	549.8	544.5	0.96
	3	1092.0	1088.5	0.32
	4	1256.8	1256.1	0.06
Clamped - clamped	1	304.7	300.9	1.25
	2	607.4	602.2	0.86
	3	1197.7	1195.4	0.19
	4	1256.8	1256.2	0.05

* Error(%)=|1-SAP2000/This study|×100

Table 2 Effect of end constraint on non-dimensional natural frequencies C_i *

Taper type	End constraint**	Non-dimensional natural frequencies, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Linear	H-H	0.2425	0.5210	1.2291	1.6001
	H-C	0.3046	0.6004	1.3538	1.5997
	C-C	0.3822	0.6684	1.5012	1.5996
Parabolic	H-H	0.2495	0.6078	1.2319	1.5572
	H-C	0.3106	0.6813	1.3531	1.5574
	C-C	0.3776	0.7527	1.4842	1.5574
Sinusoidal	H-H	0.2470	0.6031	1.2293	1.5605
	H-C	0.3090	0.6772	1.3518	1.5606
	C-C	0.3774	0.7490	1.4857	1.5606

* $f=0.3$, $e=1.5$, $k=4$, $\beta=0.05$

** H : hinged, C : clamped

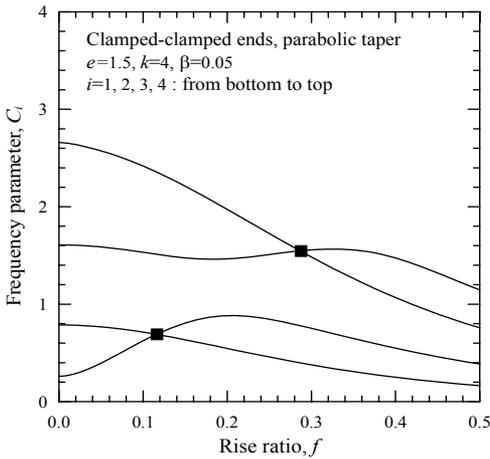


Fig. 5 $C_i - f$ curves

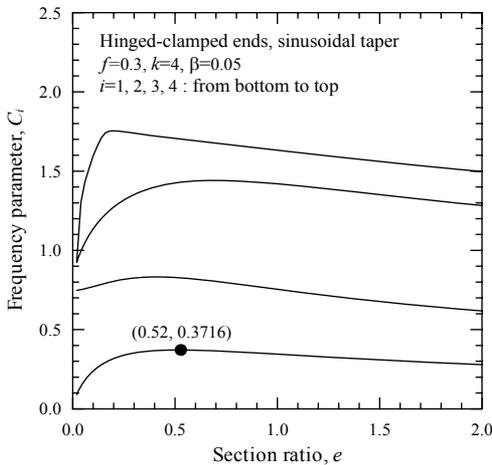


Fig. 6 $C_i - e$ curves

조건 순서로 크다. 여기에서 C_4 는 확장모드(extensional mode)가 지배적인 모드이기 때문에 지점조건과는 상관없이 거의 동일한 값을 나타낸다.

Fig. 5는 고정-고정 지점조건, 포물선 변단면, $e=1.5, k=4, \beta=0.05$ 인 아치의 높이비 f 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. 일반적으로 f 값이 큰 높은 아치에서 C_i 값은 더 작은 경향을 보인다. 이 그림에서 ■로 표시된 f 값에서는 제 1, 2모드와 제 3, 4모드의 C_i 가 같은 값을 나타내 하나의 C_i 에서 2개의 진동형이 존재할 수 있다는 것을 알 수 있다.

Fig. 6은 회전-고정 지점조건, 정현형 변단면, $f=$

Table 3 Effect of side number k on non-dimensional natural frequencies C_i^*

Condition	k	Non-dimensional natural frequencies, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Linear taper, hinged-hinged	3	0.2605	0.5569	1.3167	1.6272
	4	0.2425	0.5210	1.2291	1.6001
	5	0.2390	0.5140	1.2119	1.5938
	6	0.2379	0.5118	1.2066	1.5917
	∞	0.2370	0.5100	1.2022	1.5899
Parabolic taper, clamped-clamped	3	0.4055	0.8000	1.5825	1.5874
	4	0.3776	0.7527	1.4842	1.5574
	5	0.3722	0.7432	1.4642	1.5518
	6	0.3705	0.7403	1.4580	1.5501
	∞	0.3691	0.7378	1.4528	1.5486
Sinusoidal taper, hinged-clamped	3	0.3318	0.7222	1.4435	1.5886
	4	0.3090	0.6772	1.3518	1.5606
	5	0.3045	0.6682	1.3335	1.5549
	6	0.3031	0.6654	1.3278	1.5531
	∞	0.3020	0.6631	1.3231	1.5516

* $f=0.3, e=1.5, \beta=0.05$

0.3, $k=4, \beta=0.05$ 인 아치의 단면비 e 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. e 가 증가하면 C_i 는 증가하다가 정점에서 최대치를 보인 후에 다시 감소한다. 따라서 C_i 값이 최대가 되는 e 값이 존재한다. 예로서 이 그림에 ●로 나타낸 $e=0.52$ 에서 $C_1=0.3716$ 으로 최대치가 된다. 이 e 값에서 제 1고유진동수는 최대가 되며, 동적 최강아치의 단면비가 된다.

Table 3은 $f=0.3, e=1.5, \beta=0.05$ 인 아치의 정다각형 변수 k 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. k 가 증가하면 C_i 값은 감소한다. 물리적으로 가장 중요한 제 1모드의 C_1 을 살펴 보면 정3각형단면($k=3$)은 원형단면($k=\infty$)보다 평균 9.9%, 정4각형단면($k=4$)보다는 평균 7.4% 더 크게 나타나 정3각형단면이 동역학적으로 가장 유리한 단면이다. 정5각형단면($k=5$)과 원형단면의 C_1 값은 평균 0.84%의 차이를 보여 정5각형단면 이상의 단면은 원형단면으로 대체하여도 무리가 없을 것으로 사료된다.

Fig. 7은 회전-회전 지점조건, 직선 변단면, $f=0.3, e=1.5, k=4$ 인 아치의 체적비 β 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸다. β 가 증가함에 따라 C_i 는 증가하다가 감소하는 경향을

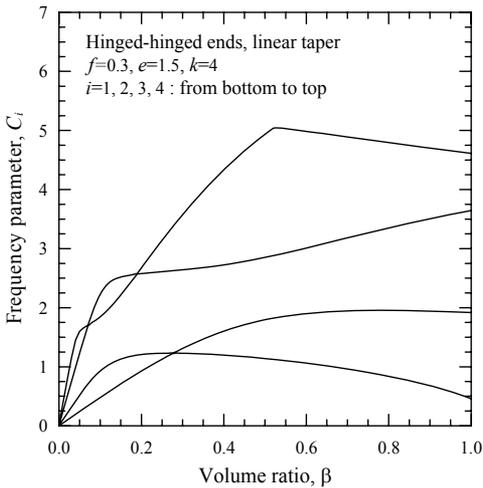


Fig. 7 $C_i - \beta$ curves

나타낸다. 따라서 β 값 즉 체적이 증가하면 C_i 도 증가하지만 C_i 값을 증가시키기 위하여 무조건 체적을 증가시킬 필요는 없다

5. 결 론

이 논문은 정다각형 중실단면을 갖는 일정체적 변단면 원호형 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 단면깊이의 형상함수는 선형, 포물선, 정현 함수로 채택하였으며, 아치의 체적은 형상함수에 상관없이 모두 일정하다. 이러한 아치의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예제에서 지점조건은 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 지점으로 채택하였다. 이 연구로부터 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 높이비 f 가 증가하면 일반적으로 무차원 고유진동수 C_i 는 감소한다.
- (2) 단면비 e 가 증가하면 C_i 는 증가하다가 최대치를 보인 후에 감소하며, 최대치의 C_i 값을 갖는 e 값이 존재한다.
- (3) 정다각형 변수 k 가 증가하면 C_i 는 감소하고, 정3각형단면에서 가장 큰 C_i 값을 갖는다.
- (4) 정5각형단면 이상의 단면은 원형단면으로 대체하여도 공학적인 큰 차이는 없다.

(5) 체적비 β 가 증가하면 C_i 는 증가하다가 최대치를 보인 후에 감소한다.

이 연구에서 고찰한 바와 같이 일정체적 변단면 아치는 특정 조건에 대하여 최대의 고유진동수를 나타내는 동적 최강아치의 단면비를 갖는다. 동적 최강아치는 최적설계의 개념에서도 매우 중요한 연구과제이므로 다양한 조건에서 동적 최강아치의 결정에 관한 후속연구가 진행되어야 한다.

후 기

이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구(KRF-2008-313-D01036)의 일부이며 재단당국에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Haftka, R. T., Grödal, Z. and Kamat, M. P., 1990, Elements of Structural Optimization. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.
- (2) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1990, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 36, Issue 1, pp. 75~89.
- (3) Huang, C. S., Nieh, K. Y. and Yang, M. C., 2003, "In-plane Free Vibration and Stability of Loaded and Shear-deformable Circular Arches," International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, pp. 5865~5886.
- (4) Karami, G. and Malekzadeh, P., 2004, "In-plane Free Vibration Analysis of Circular Arches with Varying Cross-sections Using Differential Quadrature Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 274, No. 3-5, pp. 777~799.
- (5) Tufekci, E. and Dogruer, O. Y., 2006, "Out-of-plane Free Vibration of a Circular Arch with Uniform Cross-section," Journal of Sound and Vibration, Vol. 291, pp. 525~538.
- (6) Shin, Y. J., Kwon, K. M. and Yun, J. H., 2008, "Vibration Analysis of a Circular Arch with Variable Cross-section Using Differential Trans-

formation and Generalized Differential Quadrature,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 309, pp. 9~19.

(7) Marur, S. R. and Kant, T., 2008, “Free Vibration of Higher-order Sandwich and Composite Arches,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 310, pp. 91~109.

(8) Lee, B. K. and Oh, S. J., 2000, “Elastica and Buckling Loads of Simple Tapered Columns with Constant Volume,” International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, Issue 18, pp. 2507~2518.

(9) Lee, B. K., Carr, A. J., Lee, T. E. and Kim, I. J., 2006, “Buckling Loads of Columns with Constant Volume,” Journal of Sound and Vibrations. Vol. 294, Issues. 1-2, pp. 381~387.

(10) Lee, B. K. and Kim, S. K., 2006, “Dynamic Stability Analysis of Clamped-hinged Columns with

Constant Volume,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 10, pp. 1074~1081.

(11) Lee, B. K., Lee, T. E. and Kim, Y. I., 2009, “Strongest Simple Beams with Constant Volume,” Transactions of the Korea Society for Civil Engineering, Vol. 29, No. 2A, pp. 155~162.

(12) Borg, S. F. and Gennaro, J. J., 1959, Advanced Structural Analysis. Van Nostrand, USA.

(13) Chopra, A. K., 2001, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc., USA.

(14) Shu, C., 2000, Differential Quadrature and Its Application in Engineering, Springer Verlag, UK.

(15) Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., 1969, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, USA.