

Non-Gaussian Closure 기법을 적용한 비선형 교량 구조계의 파괴확률 추정 기법

A Failure Probability Estimation Method of Nonlinear Bridge Structures using the Non-Gaussian Closure Method

함대기¹⁾ · 고현무²⁾ · 박관순³⁾

Hahm, Daegi · Koh, Hyun-Moo · Park, Kwan-Soon

국문 요약 >> 비선형 이력거동을 가지는 교량 구조계에 지진하중이 작용하였을 때 파괴확률을 추정할 수 있는 기법을 제시하였다. 교량 구조계는 지진하중이 작용할 때 이중선형 이력거동을 보이는 단자유도 진동계로서 모델링하였다. 교량의 파괴는 상단의 변위 응답이 지진 지속시간 동안 정해진 한계 상태 값을 최초로 넘어설 때 발생하는 것으로 정의하였다. 지진하중에 대한 비선형 구조계의 최초통과확률을 추정하기 위하여, 단위시간 동안 한계상태를 넘어서는 빈도수를 계산하는 crossing theory를 적용하였다. 단위시간 동안의 한계상태 초과 빈도수 추정을 위하여 필요한, 비선형 구조계의 응답과 응답의 미분값 간의 결합확률밀도함수를 추정하기 위한 기법으로서, Non-Gaussian closure 기법을 제시하였다. 다양한 지반운동 특성을 가지는 다수의 인공지진 가속도 시간이력을 생성하여 교량의 동적 특성에 따른 파괴확률을 추정하였다. 제시된 기법을 사용한 결과 얻어진 파괴확률 값을 crude Monte-Carlo 시뮬레이션을 통하여 얻어진 정해 및 기존의 방법을 적용하여 얻어진 파괴확률 값과 비교함으로써 제시된 파괴확률 추정 기법의 정확성과 효율성을 검증하였다.

주요어 비선형 구조계, 파괴확률, 최초통과문제, 지진 하중, non-Gaussian closure 기법

ABSTRACT >> A method is presented for evaluating the seismic failure probability of bridge structures which show a nonlinear hysteretic dynamic behavior. Bridge structures are modeled as a bilinear dynamic system with a single degree of freedom. We regarded that the failure of bridges will occur when the displacement response of a deck level firstly crosses the predefined limit state during a duration of strong motion. For the estimation of the first-crossing probability of a nonlinear structural system excited by earthquake motion, we computed the average frequency of crossings of the limit state. We presented the non-Gaussian closure method for the approximation of the joint probability density function of response and its derivative, which is required for the estimation of the average frequency of crossings. The failure probabilities are estimated according to the various artificial earthquake acceleration sets representing specific seismic characteristics. For the verification of the accuracy and efficiency of presented method, we compared the estimated failure probabilities with the results evaluated from previous methods and the exact values estimated with the crude Monte-Carlo simulation method.

Key words Nonlinear structural system, Failure probability, First-crossing problem, Seismic excitation, Non-Gaussian closure method

1. 서론

최근 중국의 쓰촨성에서 발생한 대규모의 지진이 많은 사

망자를 유발하는 등, 근래에 이르러 지진 재해로 인한 인명 피해가 급증함에 따라 국내에서도 지진 하중의 위험성에 대한 인식이 제고되고 있으며, 구조계의 지진 하중에 대한 안전성 확보의 중요성이 크게 부각되고 있다. 최근의 교량 구조계의 내진 안전성 확보에 대한 연구에 있어서는, 다양한 지반 운동 조건에 대하여 구조물이 어느 정도의 성능을 발휘할 수 있을 것인가, 또는 어느 정도의 신뢰도를 확보하고 있는가에 주목하는 신뢰도기반 설계개념이 공학자들에게 주요 연구 대상으로 떠오르고 있다.⁽¹⁾ 즉, 설계 지반운동에 대하여 구조물의 붕괴 방지 여부를 단순히 확정적으로 판

¹⁾ 한국원자력연구원 선임연구원, 공학박사

²⁾ 정회원·서울대학교 건설환경공학부 교수, 공학박사

³⁾ 정회원·동국대학교-서울 건축공학과 조교수, 공학박사

(교신저자: kpark@dongguk.edu)

본 논문에 대한 토의를 2010년 4월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

(논문접수일 : 2009. 4. 24 / 수정일 1차: 2009. 11. 18, 2차: 2009. 11. 26 /

게재확정일 : 2009. 11. 26)

별하던 기존의 개념에서 나아가, 구조물 모델링과 지반운동의 특성상 필연적으로 개입될 수 밖에 없는 불확실성에서 비롯되는 확률적 개념을 반영함으로써, 주어진 하중에 대하여 각 주요 구조 요소가 어느 정도의 파괴확률을 가지는가를 추정하고, 이로부터 어느 정도의 내진성능을 확보하고 있는가를 정량적으로 제시하는 데에 공학자들의 관심이 집중되고 있는 것이다.

한편, 지진 하중은 구조계에 작용 가능한 대표적인 극한 하중으로서 그 위험도가 매우 크고 발생 가능성이 현저히 낮기 때문에, 보다 경제적이면서도 안전한 설계를 위하여 대부분의 교량 구조계는 지진 발생 시 비선형 연성 거동을 유발하도록 설계가 이루어지고 있다. 따라서, 지진 하중에 대한 교량 구조계의 파괴확률 추정을 위해서는 비선형 이력 거동을 보이는 구조계의 응답이 한계상태를 넘어서게 될 확률을 추정하여야 한다. 지진 하중이 작용하는 교량 구조계와 같이 구조계의 응답이 정해진 한계상태(Limit State, barrier)를 최초로 넘어서는 것을 파괴로 규정하고 이에 대한 확률을 추정하는 문제는 최초통과 문제(First-Passage Problem)로 일컬어진다. 구조계의 최초통과문제는 선형 또는 비선형 거동을 보이는 간단한 특정 구조계에 대하여 다양한 해법들이 연구된 바 있으나⁽²⁻⁵⁾, 일반적인 비선형 구조계에 대한 정해는 얻을 수 없는 것으로 알려져 있다. 특히, 파괴확률이 1/1000보다 작은 구간에서의 정확한 파괴확률의 추정을 위해서는 매우 많은 횟수의 수치적 실험을 필요로 하고 있다.^(6,7) 한편, 일반적으로 구조계의 응답의 최대값이 이루는 확률밀도함수는 대수정규분포(Lognormal Distribution)를 따른다는 사실^(8,9)로부터 적절한 개수의 입력 지반운동 시간이력을 샘플링(Sampling)하고 반복적인 시뮬레이션(Simulation)을 통해 응답의 최대값이 가지는 확률밀도함수의 형태를 2변수 확률밀도함수인 대수정규분포로 근사함으로써 복잡한 수학적 과정을 거치지 않고도 간단히 파괴확률 값을 추정하기 위한 방법이 적용되기도 하였다.^(10,11) 그러나 이 방법을 적용할 때에는 일반적인 비선형 구조계에 대하여 최대응답의 확률밀도함수가 대수정규분포를 이룬다는 데 대한 검증이 필요하며, 특히 파괴확률이 작은 부분에서 이에 대한 검증을 위해 많은 수의 시뮬레이션이 필요하게 되는 문제가 발생할 수도 있다.

파괴확률을 추정하고자 하는 목적은 그 결과를 이용하여 다양한 설계 대안들 간의 파괴확률을 정량적으로 비교함으로써 가장 효율적인 내진 대책을 선택하기 위함에 있다. 이를 위해서는 많은 횟수의 반복 계산을 필요로 하기 때문에, 보다 적은 횟수의 수치적 실험을 통해 정확한 파괴확률 값

을 추정할 수 있는 기법이 필요하다고 할 수 있다. 이 연구에서는 비선형 구조계의 파괴확률을 추정하기 위한 기법으로서 응답의 추계학적 해석을 통해 단위 시간 동안 한계상태를 넘어서는 빈도수를 계산하고, 이로부터 최초통과확률을 추정하는 기법을 제안하였다. 응답의 한계상태 초과 빈도수 추정을 위해서는 관심을 가지는 응답과 응답의 미분값 간의 결합확률밀도함수가 요구된다^{(12),(13)}. 일반적으로 선형 구조계 응답의 결합확률밀도함수는 정규분포를 이루게 되며, 따라서 선형 시스템의 응답이 특정한 한계상태를 최초로 초과할 확률을 추정하는 최초통과문제는 수학적으로 그 해가 알려져 있다. 그러나, 비선형 구조계 응답의 확률밀도함수는 정규분포를 따르지 않게 되며, 정규분포를 따르지 않는 확률밀도함수를 가지는 응답에 대하여 한계상태의 초과확률을 수학적으로 추정하는 문제의 정해를 얻을 수 있는 일반적인 기법은 알려져 있지 않다. 이 연구에서는 정규분포의 결합확률밀도함수와 고차의 모멘트 항으로서 표현되는 다항식을 이용하여 비선형 구조계 응답의 결합확률밀도함수 분포를 근사하는 Non-Gaussian closure 기법을 제시함으로써 비선형 구조계의 응답이 단위 시간 동안 한계상태를 넘어설 빈도수를 추정하고, 이로부터 최초통과확률을 추정할 수 있도록 하였다.

간단한 단자유도 구조계로 모델링된 비선형 교량 구조계에 제시된 방법을 적용하여 파괴확률을 추정하고, crude Monte-Carlo 시뮬레이션을 통하여 얻어진 정해 및 기존의 방법을 적용하여 얻어진 파괴확률 값과 비교함으로써 제안된 기법이 적은 횟수의 시뮬레이션을 통해 보다 정확한 파괴확률 값을 제공할 수 있음을 확인하였다. 교량 구조계의 지진하중에 대한 응답 특성은 지반운동 특성 및 교량 구조계의 동적 특성에 따라 민감하게 변화하기 때문에, 특정 지반운동 특성을 반영할 수 있는 인공지진 가속도 시간이력을 다수 생성하여 파괴확률 추정을 수행하였다. 파괴를 정의하기 위한 한계상태는 교각상단의 변위 응답으로 하였으며, 한계 상태 값의 변화에 의해 파괴확률 값이 1/1000보다 작은 구간에서도 제시된 기법이 정확한 파괴확률 값을 추정하는가의 여부도 검증하였다.

2. Non-Gaussian closure 기법을 적용한 파괴확률 추정 기법

이 연구에서 제안하는 파괴확률 추정 기법은 일반적으로 알려진 최초통과 문제의 해법이라 할 수 있는 Rice's formula⁽¹²⁾를 이용하되, 그 정해가 알려져 있지 않은 비선형 응답의 결합확률밀도함수의 추정을 위하여 정규분포 확률밀도함수

에 다항식(Polynomial)을 통한 근사식을 이용하는 Non-Gaussian closure 기법을 적용한 방법이다.

그림 1과 같이 표현되는 구조계의 응답($y(t)$)에서, 응답(y)이 어떠한 한계상태(Barrier, b)를 넘어서는 평균 빈도수를 라 하면, 정규분포(Gaussian Distribution)를 따르는 응답 y 에 대해서는, 전체 지속시간(T)동안 y 가 b 를 한번이라도 넘어설 확률, 즉 파괴확률을 다음의 식 (1)과 같은 포와송 분포를 통하여 얻을 수 있음이 수학적으로 증명된 바 있다.⁽¹⁴⁾

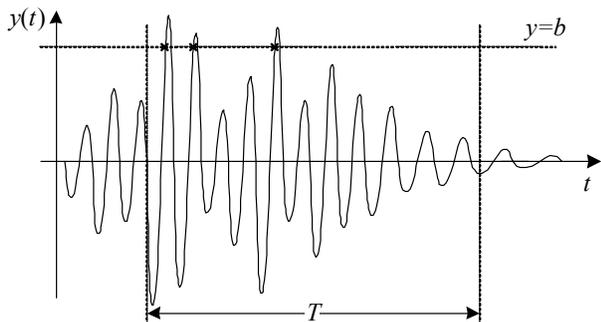
$$P(t) \rightarrow 1 - \exp(-\nu T) \text{ as } b \rightarrow \infty \quad (1)$$

응답 y 가 Gaussian 분포를 따르지 않을 경우에는 몇몇 특수한 경우에 대하여 식 (1)을 사용할 수 있음이 보고된 바 있으나⁽¹⁵⁻¹⁷⁾, 엄밀한 수학적 증명은 아직 이루어지지 않았다. 그러나, 정규분포를 따르지 않는 non-Gaussian 분포의 응답이라 하더라도 식 (1)을 사용하는 것은 안전측의 파괴 확률 값을 얻게 하기 때문에, 실용적인 관점에서 설계문제에 이를 적용하는 것은 타당하다는 것이 알려진 바 있다.⁽¹⁸⁾

파괴확률을 산출하기 위해서는 단위시간 동안 응답 y 가 한계상태 b 를 넘어서는 빈도수 ν 를 계산하여야 한다. 응답의 narrow-band process를 가정할 수 있는 경우, 즉 극값(Peak) 부분의 형태가 충분히 작은 시간간격(dt) 내에서 부드러운 곡선을 이루는 경우에, 단측(Single-Sided) 한계상태에 대한 ν 의 값은 응답의 확률분포와는 무관하게 식 (2)와 같이 Rice's formula^{(12),(13)}를 이용하여 간단히 얻을 수 있다.

$$\nu = \int_0^{\infty} \dot{y} p(b, \dot{y}) d\dot{y} \quad (2)$$

여기서, $p(y, \dot{y})$ 는 응답 y 와 \dot{y} 의 시간에 대한 1차 미분값인 \dot{y} 의 결합확률밀도함수이다. 선형 시스템일 경우, 입력의 시간 축 상에서의 확률밀도함수가 정규분포를 따른다고 하면 응답의 시간 축 상에서의 확률밀도함수도 정규분포를 따르는 것으로 알려져 있다. 따라서 응답 y 가 구조계의 변위 응



〈그림 1〉 구조계의 응답($y(t)$)이 한계상태를 넘어서는 빈도 수

답이라고 하면, $p(y, \dot{y})$ 의 값은 변위응답의 표준편차 σ_y 와 속도응답의 표준편차 $\sigma_{\dot{y}}$ 의 함수로서 간단히 계산될 수 있다. 그러나, 일반적인 비선형 시스템의 경우, 응답의 시간 축 상에서의 확률밀도함수는 정규분포를 따르지 않을 수 있으므로 일반적인 문제에서의 $p(y, \dot{y})$ 또는 $p(b, \dot{y})$ 의 정해를 얻을 수 있는 수학적 방법은 알려져 있지 않다. 이 값을 얻기 위해서는 시뮬레이션(Simulation)을 통한 반복계산을 수행하거나, 정규분포의 확률밀도함수를 이용한 근사해법을 적용하여야 한다. 이 연구에서 제안하고자 하는 근사해법은 non-Gaussian closure 기법으로서, 다항식(Hermite Polynomial, H_m)을 이용하여 정규분포를 따르지 않는 확률변수의 결합 확률밀도함수를 추정하기 위한 기법이다. 일반적으로 이차원 변수(\mathbf{y})에 대한 M 차의 non-Gaussian closure는 정규분포 확률밀도함수 $p_G(\mathbf{y})$ 를 이용하여 다음 식과 같이 표현된다.

$$p_M(\mathbf{y}) = \left[1 + \sum_{s=3}^M \frac{1}{s!} \sum_{l+m=s} b_{lm} H_{lm}(\mathbf{y} - \mathbf{m}) \right] p_G(\mathbf{y}) \quad (3)$$

여기서, $\mathbf{y}=(y, \dot{y})^T$ 라 하면, 식 (3)은 우리가 계산하고자 하는 (y, \dot{y}) 의 M 차 non-Gaussian closure와 같으며, 이는 quasi-moment b_{lm} 의 값을 시뮬레이션에 의하여 추정하고, $\mathbf{y}=(y, \dot{y})^T$ 에 대한 H_{lm} 함수를 얻음으로써 계산될 수 있다.

일반적인 다차원 변수 \mathbf{y} 에 대한 Hermite polynomial $H_{l_1, l_2, \dots, l_n}(\mathbf{y})$ 은 다음과 같이 정의된다(Bover, 1978).⁽¹⁹⁾

$$H_{l_1, l_2, \dots, l_n}(\mathbf{y}) = \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T A \mathbf{y}\right) \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^{l_i} \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T A \mathbf{y}\right) \right] \quad (4)$$

여기서, A 는 \mathbf{y} 의 공분산 행렬의 역행렬(Inverse of the Covariance Matrix)로서, $A=(\langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle)^{-1}$ 이다. $\langle \rangle$ 는 기대값을 나타낸다.

한편, quasi-moment(b_{lm})는 adjoint Hermite polynomial $G_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbf{y})$ 의 기대값과 같으며, 이는 다음 식과 같이 정의된다.

$$b_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) = \langle G_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbf{y}) \rangle = \sum_{R=0}^{R \leq K/2} (-1)^R \sum_{r_1+r_2+\dots+r_n=2R} B_{\mathbf{k}, \mathbf{r}} \left\langle \prod_{i=1}^n y_i^{k_i-r_i} \right\rangle \quad (5)$$

여기서, $K = \sum_{i=1}^n k_i$ 이며, $B_{\mathbf{k}, \mathbf{r}}$ 은 행렬 $C = A^{-1} = \langle (\mathbf{y} \mathbf{y}^T) \rangle$ 의 원소를 나타내는 함수이다.

이제 2차원 확률변수 $\mathbf{y}=(y, \dot{y})^T$ 에 대하여 3차 Hermite polynomial을 유도하는 과정은 다음과 같다. 먼저 $\mathbf{z} = A \mathbf{y}$ 라 하면,

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

이다. 한편, $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{z} = y_1 z_1 + y_2 z_2$ 이므로,

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \right) \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \right] = z_1 e^{-\frac{1}{2}(y_1 z_1 + y_2 z_2)} \quad (7)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \right] = z_2 e^{-\frac{1}{2}(y_1 z_1 + y_2 z_2)} \quad (8)$$

와 같이 되며, 이를 이용하여 $H_{3,0}(y_1, y_2)$ 와 $H_{2,1}(y_1, y_2)$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$H_{3,0}(y_1, y_2) = \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^3 \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \quad (9)$$

$$= z_1^3 - 3a_{11}z_1$$

$$H_{2,1}(y_1, y_2) = \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \quad (10)$$

$$= z_1^2 z_2 - 2a_{12}z_1 - a_{11}z_2$$

같은 방법으로 2차원 확률변수 $\mathbf{y}=(y, y)^T$ 의 모든 3차 Hermite polynomial을 정리하면 다음 식 (11)과 같으며, 2차원의 3차 adjoint Hermite polynomial은 식 (12)와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} H_{3,0}(y_1, y_2) &= z_1^3 - 3a_{11}z_1, \\ H_{2,1}(y_1, y_2) &= z_1^2 z_2 - 2a_{12}z_1 - a_{11}z_2, \\ H_{1,2}(y_1, y_2) &= z_1 z_2^2 - 2a_{12}z_2 - a_{22}z_1, \\ H_{0,3}(y_1, y_2) &= z_2^3 - 3a_{22}z_2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G_{3,0}(y_1, y_2) &= y_1^3 - 3\langle y_1^2 \rangle y_1, \\ G_{2,1}(y_1, y_2) &= y_1^2 y_2 - 2\langle y_1 y_2 \rangle y_1 - \langle y_1^2 \rangle y_2, \\ G_{1,2}(y_1, y_2) &= y_1 y_2^2 - \langle y_2^2 \rangle y_1 - 2\langle y_1 y_2 \rangle y_2, \\ G_{0,3}(y_1, y_2) &= y_2^3 - 3\langle y_2^2 \rangle y_2 \end{aligned} \quad (12)$$

4차의 Hermite polynomial은 식 (13~15)와 같이 얻어진다.

$$H_{4,0}(y_1, y_2) = \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^4 \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \quad (13)$$

$$= z_1^4 - 6a_{11}z_1^2 + 3a_{11}^2$$

$$H_{3,1}(y_1, y_2) = \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^3 \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \quad (14)$$

$$= z_1^3 z_2 - 3a_{12}z_1^2 - 3a_{11}z_1 z_2 + 3a_{11}a_{12}$$

$$H_{2,2}(y_1, y_2) = \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y_2} \right)^2 \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \right) \quad (15)$$

$$= z_1^2 z_2^2 - a_{22}z_1^2 - a_{11}z_2^2 + 2a_{12}^2 + a_{11}a_{22}$$

같은 방법으로 모든 4차의 Hermite polynomial과 adjoint Hermite polynomial을 정리하면 다음 식 (16), (17)과 같다.

$$\begin{aligned} H_{4,0}(y_1, y_2) &= z_1^4 - 6a_{11}z_1^2 + 3a_{11}^2 \\ H_{3,1}(y_1, y_2) &= z_1^3 z_2 - 3a_{12}z_1^2 - 3a_{11}z_1 z_2 + 3a_{11}a_{12}^2 \\ H_{2,2}(y_1, y_2) &= z_1^2 z_2^2 - a_{22}z_1^2 - a_{11}z_2^2 + 2a_{12}^2 + a_{11}a_{22} \\ H_{1,3}(y_1, y_2) &= z_1 z_2^3 - 3a_{22}z_1 z_2 - 3a_{12}z_2^2 + 3a_{22}a_{12}^2 \\ H_{0,4}(y_1, y_2) &= z_2^4 - 6a_{22}z_2^2 + 3a_{22}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} G_{4,0}(y_1, y_2) &= y_1^4 - 6\langle y_1^2 \rangle y_1^2 + 3\langle y_1^2 \rangle^2 \\ G_{3,1}(y_1, y_2) &= y_1^3 y_2 - 3\langle y_1 y_2 \rangle y_1^2 - 3\langle y_1^2 \rangle y_1 y_2 + 3\langle y_1^2 \rangle \langle y_1 y_2 \rangle \\ G_{2,2}(y_1, y_2) &= y_1^2 y_2^2 - \langle y_2^2 \rangle y_1^2 - \langle y_1^2 \rangle y_2^2 + 2\langle y_1 y_2 \rangle^2 + \langle y_1^2 \rangle \langle y_2^2 \rangle \\ G_{1,3}(y_1, y_2) &= y_1 y_2^3 - 3\langle y_2^2 \rangle y_1 y_2 - 3\langle y_1 y_2 \rangle y_2^2 + 3\langle y_2^2 \rangle \langle y_1 y_2 \rangle \\ G_{0,4}(y_1, y_2) &= y_2^4 - 6\langle y_2^2 \rangle y_2^2 + 3\langle y_2^2 \rangle^2 \end{aligned} \quad (17)$$

이제 적당한 횃수의 시뮬레이션을 통해 식 (12), (17)의 기대값으로부터 quasi-moment값을 산출하고, 식 (11), (16)을 식 (3)에 대입함으로써, 4차 non-Gaussian closure에 의한 비선형 시스템의 변위 및 속도 응답의 결합확률밀도함수를 얻을 수 있다. 이 연구에서는 이와 같은 과정을 반복하여 10차의 non-Gaussian closure 함수를 유도하였으며⁽²⁰⁾, 이를 식 (2)에 대입하여 한계상태 초과빈도수(ν)를 계산하면 식 (1)을 이용하여 비선형 이력거동을 가지는 구조계에 대한 파괴확률을 추정할 수 있다.

3. 단자유도 교량 구조계 및 입력 지반운동 모델링

제안된 파괴확률 추정방법을 이중선형 이력거동을 가지는 단자유도 진동계로 모델링된 교량 구조물(그림 2)에 적용하였다. 이 논문의 목적은 구조계의 비선형성으로 인해 응답의 확률밀도함수가 정규분포를 따르지 않는 경우에 대하여 파괴확률을 기존의 방법에 비해 정확하게 추정할 수 있는 기법을 제안하고자 하는 데에 있으며, 많은 횃수의 crude Monte-Carlo simulation을 통한 값과 비교하여 제안하는 기법의 정확성을 평가하는 과정이 필요하다. 따라서 계산상의 효율성을 위해 대상 구조계는 가능한 한 간단하게

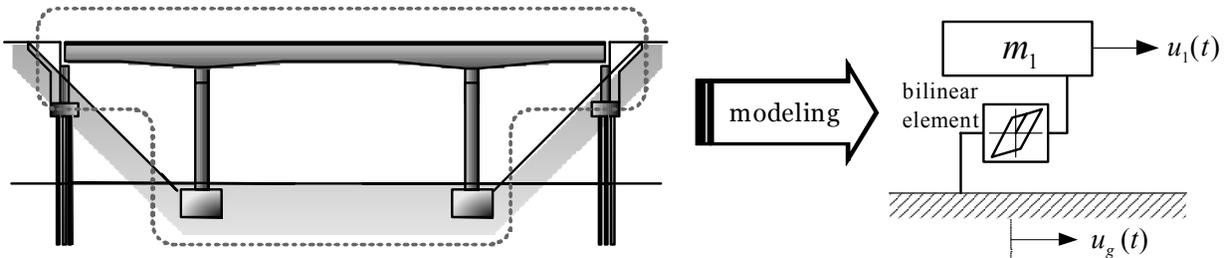
비선형 응답을 표현할 수 있도록 모델링하였다. 실제로 간단한 교량 구조물의 경우, 지진응답을 통한 확률적 분석 등을 위하여 많은 횡수의 시간이력 해석을 통한 시뮬레이션이 필요한 경우에는 단자유도 또는 적은 개수의 자유도를 가지는 집중질량모델로 모사할 수 있다.⁽²¹⁾ 교각의 초기강성은 50,000 kN/m로 하였으며, 항복 후 강성은 초기강성의 1/100, 고유진동수는 5.0 Hz, 댐핑 계수는 0.05를 사용하였다. 지반운동이 가지는 규모 및 주파수 특성에 따라 동적 응답 특성이 변화하기 때문에, 각각의 응답 특성에 대하여 제안된 기법의 정확도 및 효율성을 검증하기 위하여 다양한 지반운동 특성이 고려된 입력지반운동 특성들을 사용하였다. 일반적으로 설계 기준에서는 지진하중 특성을 반영하기 위하여 각 지역에 해당하는 지진가속도계수와 지반계수에 따라 설계응답스펙트럼을 정의하고 있다. 여기서는 우리나라의 도로교 설계기준에 명시된 1000년 재현주기의 지진에 상응하도록 인공지진 가속도 시간이력을 생성하였으며, 응답의 비선형성이 현저히 크게 나타나는 경우의 파괴확률 추정 결과를 확인하기 위하여 케이블강교량설계지침⁽²²⁾에 제시된 2400년 재현주기의 지반운동 규모도 고려하였다. 1등급 교량에 대하여 설계 지반운동 스펙트럼에 해당하는 각각의 가속도 계수(A) 값은 0.154와 0.22이다. 지반종류는 각각 견고한 지반과 연약한 지반을 대표하여 지반 종류 II와 IV를

각각 고려하였다. 입력 지반운동의 생성은 주어진 설계응답 스펙트럼에 상응하는 스펙트럼밀도함수 모델을 생성하고(고현무 등, 2000)⁽²³⁾, 이로부터 스펙트럼 표현법(Spectral Representation Method)⁽²⁴⁾에 의해 인공지진 가속도 시간이력을 생성하는 기법을 적용하였다. 그림 3 (a) 및 (b)는 각각 평균 재현주기 1000년 및 2400년에 대하여 견고한 지반과 연약한 지반에서의 인공지진 가속도 시간이력 100개를 각각 생성하고, 그로부터 얻어진 응답스펙트럼을 설계응답스펙트럼과 비교한 결과를 나타낸 그래프이다. 이를 통하여 볼 때, 생성된 인공지진파는 설계기준에 제시된 지반운동 특성을 충분히 반영하고 있는 것을 알 수 있다.

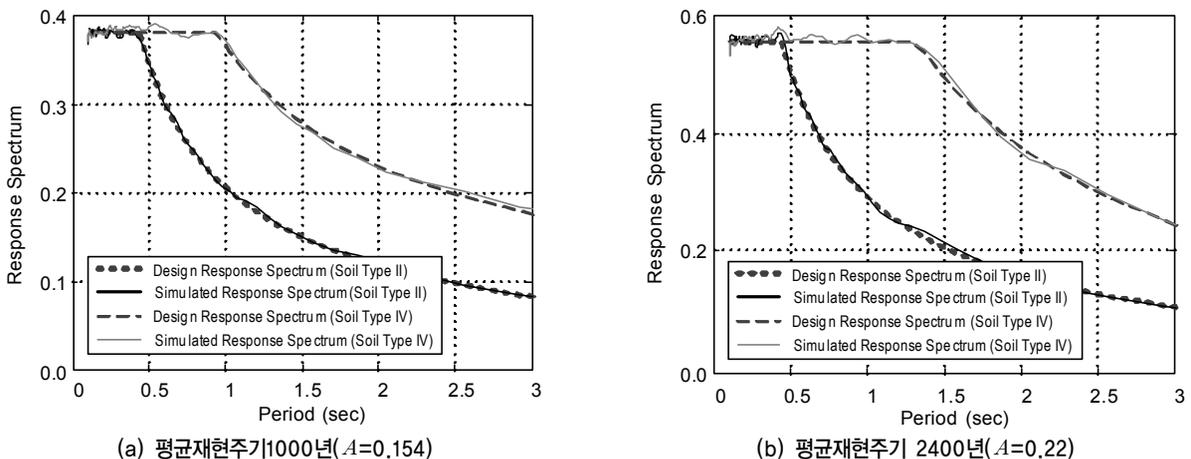
응답의 비선형성 정도에 따른 파괴확률 추정 기법의 정확도 분석을 위하여 지반운동의 규모는 국내 지진 위험도를 기준으로 1000년 재현주기 및 2400년 재현주기를 가지는 지반운동을 각각 고려하였다. 한계상태는 단자유도 진동계의 변위응답에 대하여 정의하였으며, 한계상태를 변화시켜 가면서 작은 파괴확률을 가지는 구간에서도 정확한 파괴 확률 값을 추정하고 있는지를 분석할 것이다.

4. 파괴확률 추정 결과 분석

Non-Gaussian closure 기법이 결합확률밀도함수를 정확



〈그림 2〉 교량 구조계의 단자유도 진동계 모델링



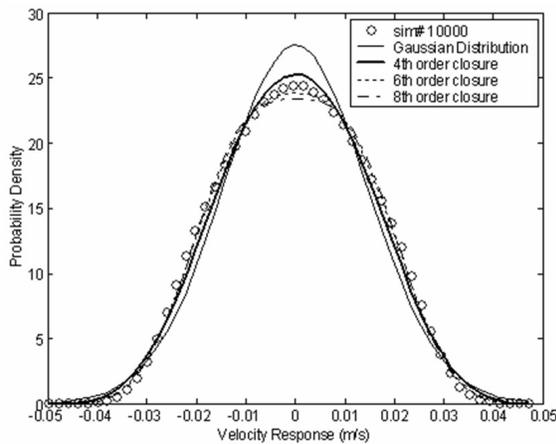
〈그림 3〉 인공지진 가속도 시간이력을 통해 얻어진 응답스펙트럼과 설계응답스펙트럼의 비교

히 추정하고 있는가를 확인하기 위하여, 지반조건 I에 해당하면서 1000년 재현주기를 가지는 규모의 지반운동에 대하여 수치 실험을 수행하였다. 뚜렷한 non-Gaussian 확률분포를 가지는 속도응답에 대하여, 8차 까지의 non-Gaussian closure 방법을 적용하여 확률분포를 추정하였으며, Gaussian 확률분포로 가정한 경우와 비교하여 그 결과를 그림 4에 나타내었다. 그래프에서 보이듯이 non-Gaussian closure 방법을 적용한 경우가 응답의 확률분포를 보다 정확하게 근사하고 있음을 알 수 있다.

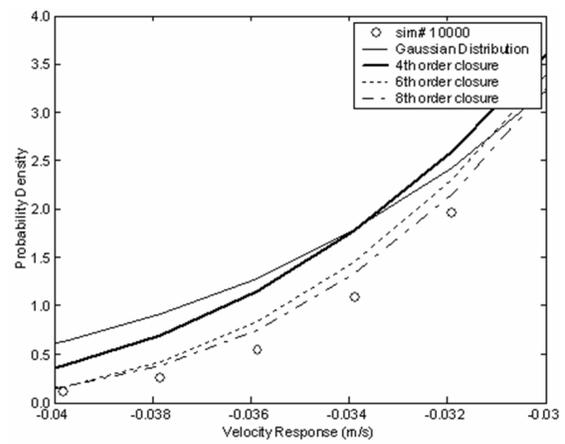
이제, 변위 및 속도 응답으로 이루어진 2차원 확률변수의 확률분포를 추정하고, 이로부터 다양한 교량 변위응답의 한계상태에 대한 초과 빈도수를 계산하여, 식 (1)을 통해 파괴 확률을 추정하였다. 그래프에서 비교 대상이 되는 정해라 할 수 있는 crude Monte-Carlo 시뮬레이션 기법에 의한 결과는 100,000회의 직접 시뮬레이션을 통하여 얻어진 결과이다. 그래프의 가로축은 파괴확률 추정을 위하여 가정한 한계상태 값을 나타낸다. 한계상태 값이 증가할수록 파괴확률 값이 줄어들어, 관심을 가지는 파괴확률 영역 또는 한계상태 영역에서의 파괴확률 추정 결과를 비교할 수 있다.

그림 5는 $A=0.22$, 지반 조건은 견고한 지반에 해당하는 지반종류 I인 경우에 대하여 파괴확률을 추정한 결과를 나타낸다. Non-Gaussian closure 기법은 최대응답이 대수정규분포를 따름을 가정하였을 때와 동일하게 200회의 시뮬레이션을 거쳤을 때 얻어진 결과이다. 제안된 기법을 사용하였을 때, 거의 정해로 볼 수 있는 100,000회의 시뮬레이션을 수행한 경우에 비교하여 매우 적은 수의 시뮬레이션을 통해서도 정해에 근사한 파괴확률 값을 얻을 수 있음을 확인하였으며, 기존의 최대응답의 대수정규분포를 가정한 경우, 또는 선형 시스템을 가정한 경우에 비해서도 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 한계상태가 커짐으로서 파괴확률이 더욱 작아진 경우 crude Monte-Carlo 시뮬레이션 결과에 대한 오차를 비교하였을 때, Non-Gaussian closure 기법을 사용한 결과가 30% 이내의 오차를 보이는 데 반하여 기존의 기법들은 각각 90%, 140% 가량의 큰 오차를 발생시키는 것을 볼 수 있다.

그림 6은 가속도 계수는 그림 5의 경우와 동일하게 $A=0.22$ 이나, 지반 조건은 연약한 지반에 해당하는 지반종류 IV인 경우에 대하여 파괴확률을 추정한 결과이다. Non-Gaussian

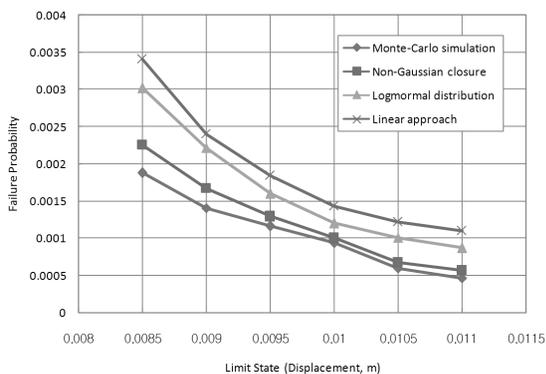


(a) 전체 확률밀도함수 추정 결과

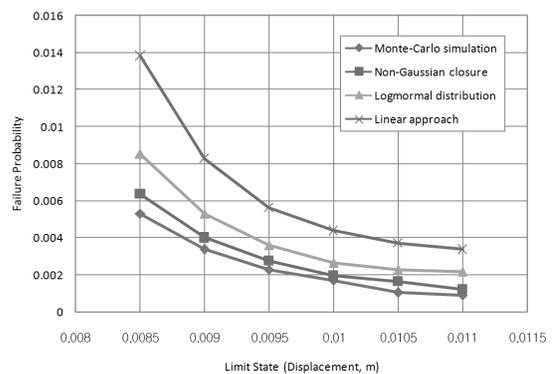


(b) 파괴확률이 작은 구간에서의 확률밀도함수 추정 결과

〈그림 4〉 지진하중이 작용하는 비선형 구조계의 속도응답 확률분포 추정



〈그림 5〉 지진하중이 작용하는 비선형 교량 구조계의 파괴확률 추정 결과 ($A=0.22$, 지반종류 I)



〈그림 6〉 지진하중이 작용하는 비선형 교량 구조계의 파괴확률 추정 결과 ($A=0.22$, 지반종류 IV)

closure 기법과 비교 대상이 된 최대응답의 대수정규분포를 가정한 경우 및 선형시스템의 최초통과확률 추정기법을 그대로 적용한 경우 모두 200회의 시물레이션을 거쳤을 때 얻어진 결과이다. 제안된 기법을 사용하였을 때, 거의 정해로 볼 수 있는 100,000회의 시물레이션을 수행한 경우에 비교하여 1/500에 해당하는 매우 적은 수의 시물레이션을 통해서도 역시 정해에 근사한 파괴확률 값을 얻을 수 있었다. 기존의 최대응답의 대수정규분포를 가정한 경우, 또는 선형 시스템을 가정한 경우에 비해서도 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 연약지반에 해당하는 지반 특성의 경우, 견고한 지반의 경우에 비하여 동일한 한계상태에 대한 파괴확률 값이 전반적으로 증가하는 것을 볼 수 있다. 또한, 한계상태가 커짐에 따른 오차 폭이 견고한 지반의 경우에 비하여 증가하는 것으로 나타났다. 이 때 제안하는 기법은 파괴확률 1/1000 부근에서 약 40% 내외의 오차를 보였으나, 기존의 기법들은 각각 120%, 250%를 상회하는 큰 오차가 발생하는 것을 볼 수 있었으며, 특히 선형 시스템의 최초통과확률 추정기법을 적용한 경우에는 더욱 큰 오차가 발생하였다. 이는 이중선형 이력거동을 가지는 교량 구조계의 비선형 거동이 견고한 지반에 비하여 크게 발생하였기 때문일 것이라 유추해 볼 수 있다.

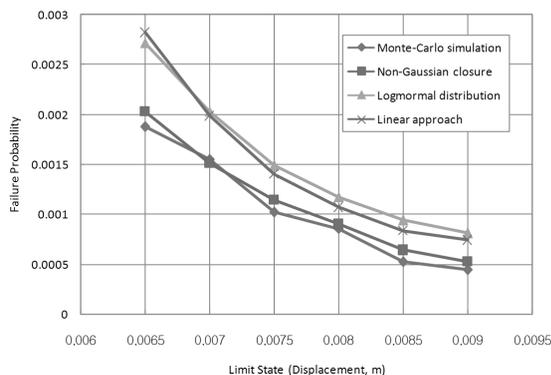
그림 7, 8은 각각 $A=0.154$ 인 경우에 대하여, 지반 조건이 견고한 지반에 해당하는 지반종류 I인 경우와 연약한 지반에 해당하는 지반종류 IV인 경우의 파괴확률 추정 결과를 나타낸다. 마찬가지로 crude Monte-Carlo 시물레이션 기법은 100,000회의 수치 해석을 수행한 결과이며, Non-Gaussian closure 기법 및 기존 기법들 모두 200회의 시물레이션을 거쳤을 때 얻어진 결과이다. 이 경우에도 제안된 기법이 정해로 볼 수 있는 100,000회의 시물레이션을 수행한 경우에 비교하여 효율적으로 정확한 결과를 얻을 수 있음을 볼 수 있다. 그림 7의 결과를 통하여 볼 때 제안된 기법은 약 20%

이내의 오차를 발생시키고 있는 데 반하여, 최대응답을 대수정규분포로 가정한 경우는 최대 80% 이상의 오차를, 응답의 정규분포를 가정하고 선형 시스템의 최초통과확률 추정 기법을 그대로 적용한 경우에는 최대 60% 이상의 오차를 보이는 것을 확인할 수 있다. 이 결과를 통하여 볼 때 선형 시스템의 기법을 그대로 적용한 경우 앞서의 가속도 계수값이 0.22인 경우에 비하여 정확도가 상대적으로 높아진 것을 알 수 있다. 이는 지반운동 규모가 줄어들어서 응답의 비선형성이 보다 적게 나타났기 때문일 것이라고 판단된다. 그러나 이 경우에도 제안하는 Non-Gaussian closure 기법을 적용한 결과가 보다 정확한 파괴확률 추정 결과를 보이는 것으로 나타났다.

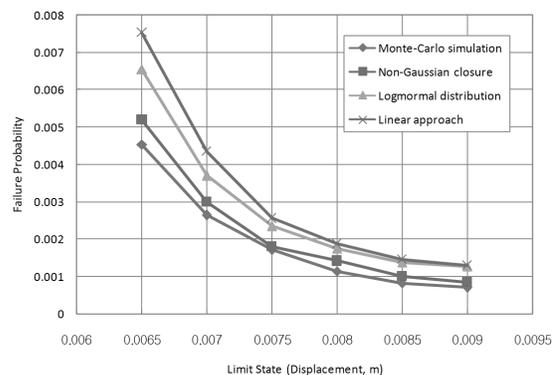
한편, 그림 8의 결과를 통하여 볼 때, 가속도 계수가 0.22인 경우에 비해서는 그 크기가 상대적으로 작지만 연약지반에 해당하는 지반 특성의 경우 견고한 지반의 경우에 비하여 파괴확률 값이 전반적으로 증가하는 것을 볼 수 있다. 이 때 제안하는 기법은 파괴확률 1/1000 부근에서 여전히 20% 내외의 오차를 보였으나, 기존의 기법들은 각각 80%이상의 큰 오차를 보이는 것으로 나타났다. 특히 선형 시스템의 최초통과확률 추정기법을 적용한 경우에는 견고한 지반의 경우에 비하여 오차의 폭이 약 20% 가량 증가하였다. 이는 이중선형 이력거동을 가지는 교량 구조계의 비선형 거동이 견고한 지반에 비하여 크게 발생하였기 때문일 것이라 유추해 볼 수 있다.

5. 파괴확률 추정 기법의 효율성 분석

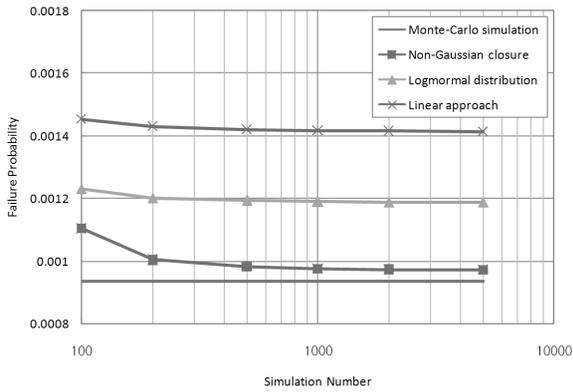
신뢰도 있는 파괴확률값을 효율적으로 추정하기 위해서는 보다 적은 수의 시물레이션을 통해 파괴확률 값을 얻을 수 있어야 한다. 그림 9에는 시물레이션 횟수에 따른 파괴확률 추정 결과 추이를 나타내었다. 그림 9의 (a)와 (b) 모두



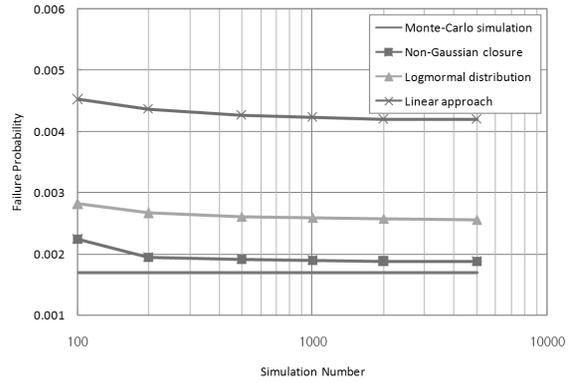
〈그림 7〉 지진하중이 작용하는 비선형 교량 구조계의 파괴확률 추정 결과 ($A=0.154$, 지반종류 I)



〈그림 8〉 지진하중이 작용하는 비선형 교량 구조계의 파괴확률 추정 결과 ($A=0.154$, 지반종류 IV)

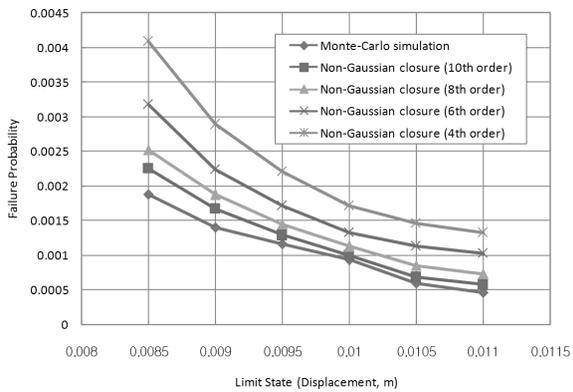


(a) $A=0.22$, 지반종류 I

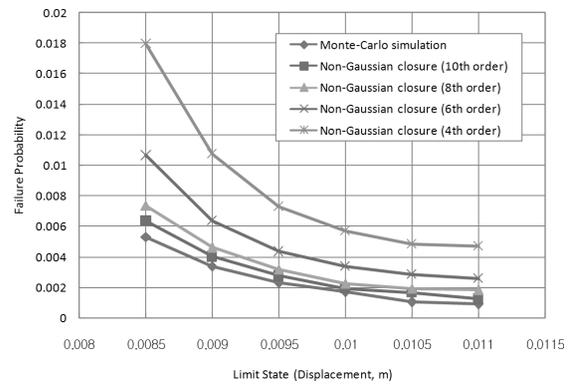


(b) $A=0.22$, 지반종류 IV

〈그림 9〉 시뮬레이션 횟수에 따른 비선형 교량 구조계의 파괴확률 추정 결과(limit state: 0.01(m))



(a) $A=0.22$, 지반종류 I



(b) $A=0.22$, 지반종류 IV

〈그림 10〉 Non-Gaussian closure 차수에 따른 비선형 교량 구조계의 파괴확률 추정 결과

가속도 계수(A)는 0.22인 경우로서, 그림 9 (a)는 견고한 지반 조건, 그림 9 (b)는 연약한 지반 조건인 경우의 결과이다. 한계상태는 두 경우 모두 0.01(m)로 설정하였다. 그림 9 (a)의 결과에서 볼 때, 제안하고 있는 기법은 다른 기법에 비하여 고차의 모멘트 정보를 필요로 하기 때문에 특정한 값으로 수렴하기 위해서는 더 많은 횟수의 시뮬레이션이 필요함을 알 수 있다. 그러나 약 200회 가량의 시뮬레이션을 거치면 거의 일정한 값을 유지하며, 1000회 이상의 시뮬레이션에서는 결과의 변동이 거의 없는 것을 볼 수 있다. 그림 9 (b)의 응답의 비선형성이 크게 나타나는 연약지반의 결과에서도, 200회 가량의 시뮬레이션을 거치면 파괴확률 추정 결과가 거의 일정한 값으로 유지되는 것을 볼 수 있다. 또한 시뮬레이션 횟수의 증가 여부에 무관하게 제안하는 방법이 기존 방법들에 비하여 정확한 결과를 보였는데, 이는 제안하는 방법이 비선형 시스템의 응답에 대한 결합확률밀도함수를 보다 실제 확률밀도함수에 근접하게 추정할 수 있기 때문인 것으로 판단된다.

그림 10은 제안하는 기법의 non-Gaussian closure 차수에 따른 파괴확률 추정 결과를 나타낸다. 그림 10의 (a)와

(b) 모두 가속도 계수(A)는 0.22인 경우로서, 그림 10 (a)는 견고한 지반 조건, 그림 10 (b)는 연약한 지반 조건인 경우의 결과이다. 그림 5 및 그림 6의 결과와 비교하여 볼 때, 8차의 non-Gaussian closure 만으로도 기존 기법에 비하여 정확한 파괴확률 값을 얻을 수 있으나, 6차 이하의 non-Gaussian closure 기법을 적용하였을 때에는 오히려 기존 기법들에 비하여 큰 오차가 발생하기도 하였다. 따라서 보다 정확한 파괴확률의 추정을 위해서는 8차 이상의 non-Gaussian closure 함수가 요구되며, 10차 이상의 non-Gaussian closure 함수를 사용하는 것이 바람직하다고 판단된다.

6. 결론

지진하중에 작용하는 비선형 교량 구조계의 파괴확률을 추정할 수 있는 기법을 제시하였다. 교량의 파괴는 상단의 변위 응답이 지진 지속시간 동안 정해진 한계 상태 값을 최초로 넘어설 때 발생하는 것으로 정의하여, 단위시간 동안 한계상태를 넘어서는 빈도수를 계산하는 crossing theory를 적용함으로써 최초통과확률을 추정하였다. 비선형 구조계의

응답과 응답의 미분값 간의 결합확률밀도함수를 효율적으로 추정하기 위하여 Non-Gaussian closure 기법을 도입하였다. 제시된 기법을 사용한 결과 얻어진 파괴확률 값을 crude Monte-Carlo 시뮬레이션을 통하여 얻어진 정해 및 최대 응답이 대수정규분포를 따름을 가정한 경우, 그리고 선형 시스템의 최초통과확률 추정 기법을 그대로 준용한 경우 얻어진 값들과 비교함으로써 제시된 파괴확률 추정 기법의 정확성과 효율성을 검증하였다. 제시된 파괴확률 추정 기법은 정해라고 볼 수 있는 crude Monte-Carlo 시뮬레이션을 적용한 경우에 비하여 약 1/500 횟수의 시뮬레이션을 수행한 경우에도 기존의 방법들에 비하여 현저히 높은 정확도를 가지는 파괴확률 값을 추정함을 확인하였다. 특히 파괴확률이 1/1000보다 작은 구간에서도 기존의 방법들에 비하여 적은 오차의 파괴확률 값을 추정할 수 있었다. 또한 선형 시스템의 최초통과확률 추정 기법을 그대로 적용한 경우에는 응답의 비선형성이 큰 경우와 작은 경우에 정확도의 차이가 크게 발생함에 반하여, 제안하는 기법은 응답의 비선형성의 크고 작음에 무관하게 파괴확률 값을 효율적으로 추정할 수 있음을 볼 수 있었다. 제안된 기법을 적용한다면 고층 빌딩, 장대 교량 등 보다 복잡한 구조계의 최초통과확률을 효율적으로 추정할 수 있게 될 것이며, 많은 횟수의 반복 계산을 필요로 하는 최적 설계 대안 도출의 문제 해결을 위한 효과적인 해법으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 연구는 서울대학교 교량설계핵심기술연구단을 통한 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업과 교육과학기술부의 재원으로 시행하는 한국과학재단의 원자력기술개발사업(연구과제 관리코드: M20702030003-08M0203-00310)으로 지원받았습니다. 이에 감사드립니다.

참고 문헌

- 교량설계핵심기술연구단, “교량해석 및 설계 선진화 - 교량의 응답제어기술 개발,” 보고서, 건설교통부, 2004.
- Schueller, G.I., and Stix, R., “A critical appraisal of methods to determine failure probabilities,” *Structural Safety*, Vol. 4, No. 4, 293-309, 1987.
- Engulund, S., and Rackwitz, R., “A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability,” *Structural Safety*, Vol. 12, No. 4, 255-276, 1993.
- Schueller, G.I., “Computational stochastic mechanics-recent advances,” *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 22-25, 2225-2234, 2001.
- Au, S.K., “Augmenting approximate solutions for consistent reliability analysis,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 22, No. 1, 77-87, 2007.
- Au, S.K., and Beck, J.L., “First excursion probabilities for linear systems by very efficient importance sampling,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 16, No. 3, 193-207, 2001.
- Koutsourelakis, P.S., “Reliability of structures in high dimensions. Part II. Theoretical validation,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, No. 4, 419-423, 2004.
- Shinozuka, M., Feng, M.Q., Lee, J., and Naganuma, T., “Statistical analysis of fragility curves,” *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 12, 1224-1231, 2000.
- Choi, E., DeRoches, R., and Nielson, B., “Seismic fragility of typical bridges in moderate seismic zones,” *Journal of Engineering Structures*, Vol. 26, 187-199, 2004.
- Casciati, F., Cimellaro, G.P., and Domaneschi, M., “Seismic reliability of a cable-stayed bridge retrofitted with hysteretic devices,” *Computers & Structures*, Vol. 86, No. 17-18, 1769-1781, 2008.
- 박진우, “사장교 지진응답 제어를 위한 에너지 소산장치의 확률론적 최적설계,” 석사학위논문, 서울대학교, 2007.
- Rice, S.O., “Mathematical analysis of random noise,” *Bell System Technology Journal*, Vol. 23, 282-332, 1944.
- Newland, D.E., *Random vibrations, spectral & wavelet analysis*, Longman Scientific & Technical, 1994.
- Cramer, H., “On the intersections between the trajectories of a normal stationary stochastic process and a high level,” *Arkiv Mathematics*, Vol. 6, 337-349, 1966.
- Dunne, I.F., and Wright, J.H., “Predicting the frequency of occurrence of large roll angles in irregular seas,” *Proceeding of the Royal Institution of Naval Architects*, Vol. 12, 233-245, 1985.
- Roberts J.B., “First passage time for oscillators with non-linear restoring forces,” *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 56, 71-86, 1978.
- Roberts, J.B., “First-passage time for oscillators with nonlinear damping,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, 175-180, 1978.
- Roberts, J.B., and Spanos, P.D., *Random vibration and statistical linearization*, John Wiley & Sons, 1990.
- Bover, D.C.C., “Moment Equation Methods for Non-Linear Stochastic Systems,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 65, 306-320, 1978.
- 함대기, “비선형 에너지 소산장치가 장착된 케이블지교량의 지진하중에 대한 최초통과확률 추정기법,” 박사학위논문, 서울대학교, 2008.
- 고현무, 송준호, “사용기간비용 최소화에 의한 지진격리교량의 경제성 평가,” *대한토목학회논문집*, 제 19권, 제 I-4호, 539-550, 1999.
- 대한토목학회, *케이블강교량설계지침*, 대한토목학회, 2007.

23. 고현무, 박관순, 송준호, “유체-구조물 상호작용을 고려한 지진격리 수조구조물의 비용효율성 평가,” 대한토목학회논문집, 제 20권, 제 2-A호, 201-215, 2000.
24. Shinozuka, M., and Deodatis, G., “Stochastic wave models for stationary and homogeneous seismic ground motion,” *Structural Safety*, Vol. 10, No. 1-3, 235-246, 1991.