대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 4, 529-546. Nov 2010

# 수학사 고찰을 통한 교과서의 닮음 정의에 대한 분석과 비판

최 지 선*

이 연구의 목적은 닮음 개념의 변천 과정에 대한 수학사 고찰을 바탕으로, 현재 수학 교과서에 나타난 닮음 정의를 분석하고 비판하는 것이다. 우선, 피타고라스학파의 닮음 정의, Euclid 《원론》의 닮음 정의, Clairaut의 《기하학원론》의 닮음 정의, Birkhoff와 Beatly의 《기초기하학》, SMSG의 《기하학》의 닮음 정의를 분석하고, 현재 수학 교과서에 제시된 닮음 정의를 분석하였다. 수학사 고찰 결과를 바탕으로 교과서의 닮음 정의를 세 가지 측면에서 비판적으로 논의하고, 확인된 문제점에 대한 교육적 제언을 하였다.

## Ⅰ. 서론

이 연구의 목적은 수학사 관점에서 닮음 개념이 형성되고 변화된 과정에 대한 고찰을 바탕으로, 현재 수학 교과서에 나타난 닮음 정의를 분석하고 비판하는 것이다.

수학적으로 '닮음'은 직관적으로 말하면 두 대상의 모양이 같다는 것으로, 인간은 두 사물의 모양이 같다는 것을 배우지 않아도 그리고 '닮음'이라는 수학적 용어를 알지 못해도 직관적으로 알 수 있다(Freudenthal, 1983). 그리하여 인류 초기에서부터 닮음을 직관적으로 파악했다(Maor, 2004; Joseph, 1991). 하지만 학문으로서의 수학에서는 닮음을 엄밀하게 정의할 필요가 있으며, 수학적 명제와 증명의 타당성을 학습하는 중학교 수학과 교육과정에서 닮음이 무엇인가를 정의할 필요가 있다. 학문으로서의 수학에서 닮음은 각의 크기를 보전하면서 어떤 거리공간을 그 공간을 재척도한 거리공간으로 보내는 공형등거리사상이다(최지선, 2008).

하지만 처음으로 닮음을 학습하는 중학교 학생들에게 이러한 학문적 정의를 도입할 수는 없다. 중학교 학생들의 학습수준에 적합하도록 그리고 학생들이 이전에 학습했던 지식을 바탕으로 이해할 수 있는 방식으로 닮음을 정의해야 한다. 이러한 이유에서 닮음에 관한 교육적 논의가 있어왔다. Freudenthal(1983; 1991)과 Vergnaud (1983)는 닮음을 관련된 여러 가지 개념들과 연계시켜서 점진적으로 지도해야 한다고 주장하였다. 김재홍과 권석일(2003)은 Clairaut (Alexis Claude de Clairaut, 1713 - 1765)의 ≪기하학원론≫에 나타난 닮음을 고찰하였고, 김홍기(2009)는 Euclid(B.C. 300-?)의 ≪원론≫을 7차 교육과정 교과서에 나타난 닮음 정의와 비교하였다. 또 임재훈과 박교식(2009)은 중학교 수학 교과서에 제시된 닮음 정의를 분석하여 2가지로 분류하였다.

한편, 닮음 개념과 관련된 경험적 연구들은 학생들이 닮음 개념을 충실하게 이해하지 못하고, 수와 수의 연산을 사용하는데 집중함을 보여준다. 예를 들어, 닮은 도형의 변의 길이 사이에 덧셈의 차이가 있다고 판단하는 경향이 있다

* 중흥중학교, everii@hanmail.net

(Vollrath, 1977; Hart, 1981; Karplus, Pulos & Stage, 1983; Hart, 1984; Lesh, Post & Behr, 1988; Chazan, Hillyer, Schoen, Simon, Yerushalmy & Zodhiates, 1988; Kaput & West, 1994). 또, 닮은 도형의 넓이의 비는 길이의 비와 비례한다고 잘못 판단하는 경향도 발견되었다(Tirosh & Stavy, 1999; De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002). 이러한 경향들은 닮음 개념을 이해하기 보다는 비례식으로 표현되는 알고리즘을 사용하기 때문이다. 그런데 닮음에서 제시되는 비례식은 오랜 역사를 거치면서 그 의미와 범위가 변화되어왔다.

현재 교과서에 제시된 닮음 정의는 수학사의 자취를 내포하고 있어서, 닮음 정의에 대한 분석은 수학사 관점에서 비판적으로 고찰할 수 있다. 특히, 실수 공리의 성립 이후에 닮음의 정의 방식이 크게 변모하였다. 그러나 현재까지 수학사에서 닮음 정의의 변화를 분석하여 그 결과를 바탕으로 교과서의 닮음 정의를 비판적으로 고찰한 연구는 이루어지지 않았다. 이에 본 연구는 닮음의 정의를 실수 공리가 없었던 시대와 실수 공리가 성립된 이후의 시대로 구분하여 닮음의 정의를 역사적으로 고찰하고, 이를 바탕으로 현재 수학 교과서에 나타난 닮음의 정의 방식을 분석하고, 교육적인 관점에서 비판하고자 한다.

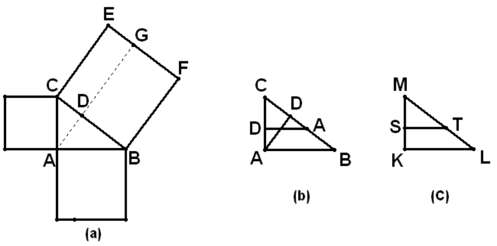
## II. 실수 공리가 없었던 시대의 닮음 정의

실수 개념은 19세기 말에 성립된 것으로, 그 이전에는 기하학에서 실수를 다루는 것이 만만치 않은 문제이었다. 실수 개념이 없었던 과거에는 어떻게 비례를 정의하느냐에 따라서 닮음을 다르게 정의하였다. 이 절에서는 비례의 정의에 따라서 3가지 방식으로 닮음의 정의를 살펴보겠다.

첫째, "통약가능성"을 가정하여 비례를 정의했던 피타고라스(Pythagoras, B.C. 570-495) 학파의 닮음 정의이다. "통약가능성"이란 두 선분을 공통으로 측정할 수 있는 단위선분이 항상 존재한다는 것으로, 수학적으로 옳지 않은 가정이다. 피타고라스는 통약가능성을 가정하여 Euclid 《원론》Ⅵ권의 모습으로 닮음을 정의하였다(Muller, 1981). 즉, "닮은 다각형이란 두 다각형의 대응각들이 서로 같고, 그 각을 끼고 있는 대응변들의 길이가 비례"하는 것이다(Heath, 1952, p.99). 여기에서 '비례'(예, $a:b=c:d$)는 한 선분의 길이($a$)가 다른 선분의 길이($b$)의 배수, 부분 중의 하나, 부분 중의 여럿인 것과 같은 방식으로 어떤 선분의 길이($c$)가 또 다른 선분의 길이($d$)의 배수, 부분 중의 하나, 부분의 여럿이라는 것을 의미한다. 그리고 두 량의 비(예, $a:b$)의 값을 두 수의 몫으로 받아들였다(Roche, 1998). 다시 말해, 두 선분의 통약가능성을 가정하고 있다.

피타고라스 학파는 닮은 삼각형들의 대응각의 크기가 서로 같다는 직관적인 사실을 이용하여, 통약가능성을 가정하고도 많은 기하 명제들을 발견하고 증명하였다. 예를 들어, 닮은 삼각형의 대응변의 길이가 비례한다는 사실을 다음과 같이 발견하였다. <그림 Ⅱ-1>와 같이, 각 $A$가 직각인 삼각형 $ABC$의 꼭짓점 $A$에서 대변에 수선을 그어서 그 대변과 만나는 점을 $D$라고 하면, 삼각형 $ABC$, $DBA$, $DAC$는 모두 닮은 도형이다. 삼각형 $DCA$의 위치를 점 $D$의 위치가 변 $AC$위로 위치하게, 그리고 점 $A$의 위치가 변 $BC$ 위에 위치하게 바꾸면 <그림 Ⅱ-1 (b)>와 같이 된다. 꼭짓점을 혼동하지 않기 위해서 꼭짓점의 이름을 <그림 Ⅱ-1 (c)>과 같이 바꾸면 $MK$에 대

한 $MS$의 길이를 분수 $\frac{m}{n}$으로 표현할 수 있고, $ML$에 대한 $MT$의 길이는 분수 $\frac{m}{n}$이 된다. 즉, $\frac{MS}{MK}=\frac{MT}{ML}=\frac{m}{n}$이다(Gould, 1962). 이 외에도 닮은 삼각형을 이용하여 피타고라스 정리를 증명하였다(Eves, 1969).




<그림Ⅱ-2> 피타고라스학파의 추론과정 (Gould, 1962)

둘째, "통약불가능성"을 포함한 일반적인 비례를 정의한 이후에 닮음을 정의한 Euclid의 《원론》에 제시된 닮음 정의이다. "통약불가능성"이란 두 선분을 공통으로 측정할 수 있는 단위선분이 항상 존재하는 것은 아니라는 것이다. "통약불가능성"의 발견으로 인하여 피타고라스 학파의 비례론은 에우독소스의 비례론으로 대체되었다. 에우독소스의 비례론은 피타고라스 학파의 비례론을 일반화한 것으로 오늘날의 실수 공리에 해당한다. 만약 두 개의 선분 $(A,B)$와 또 다른 두 개의 선분 $(P,Q)$가 통약가능하고, 이 네 개의 선분들이 비례할 필요충분조건은 적당한 양의 정수 $m,n$에 대하여 $mA=nB \rightarrow mP=nQ$이 성립하는 것이다. 여기에 $(A,B)$이나 $(P,Q)$이 통약불가능한 경우를 포함하여 비례한다는 필요충분조건이 만족시키기 위해서 $mA>nB \rightarrow mP>nQ$ 그리고 $mA<nB \rightarrow mP<nQ$ 인 경우를 포함하였다.[2] 이 당시에 두 량의 비의 값은 사용되지 않았다. 통약불가능한 경우에 그 비의 값을 나타낼 수 있는 방법이 존재하지 않았기 때문에, 당시 사람들은 비는 '두 량의 관계'로 파악했을 뿐이지 '하나의 값' 또는 '하나의 수'로 받아들이지 않았다. 따라서 예를 들어, 두 개의 선분 $(A,B)$가 $2\cdot A=1\cdot B$을 만족하면 두 개 선분의 비는 $1:2$라는 관계를 의미하는 것이지, 선분 $B$가 선분 $A$의 2배를 의미하는 것은 아니었다. 비의 값을 하나의 값이나 수로 받아들이게 된 것은 17세기 후반에 이르러서야 가능해졌기 때문에 (Roche, 1998), 무려 2000여년이나 비를 두 량의 관계로만 사용하였다. Euclid 《원론》에서 닮음을 정의하기 위해 도입된 개념 순서를 도식화하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

| 비 정의 | ⇒ | 비례 정의 | ⇒ | 닮음 정의 |
|---|---|---|---|---|

<표 Ⅱ-1> Euclid 《원론》에서 닮음을 정의하기 위해 도입된 개념 순서

한편, 그리스 사람들은 이 일반화된 새로운 비례론이 복잡하기 때문에 이를 사용하기 보다는 기하학에서 이 비례론을 최소한으로 사용하였다(Boyer, 1959). 그 단적인 모습은 당시의 수학이 집대성된 Euclid 《원론》에 나타났다. 《원론》의 초반부는 비례를 사용하지 않는 기하를 정리하였고, 비례를 사용하지 않을 수 없는 기하는 비례론에 관한 Ⅴ권 이후에 제시하였다. Ⅵ권에 제시된 닮음의 정의는 일반화된 비례론을 사용하였다. 그런데 《원론》에서 조차도 일반화된 비례론이 너무 복잡했기 때문에 효율적으로 사용하지 않았다. Ⅵ권의 닮음 이

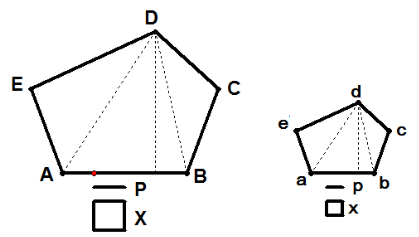
2) 원론의 비례의 정의는 다음과 같다. "4개의 양이 있는데, 첫째와 둘째의 비, 셋째와 넷째의 비가 같다는 말은, 첫째와 셋째에 같은 수를 곱해 그 곱을 취하고, 둘째와 넷째에 다른 어떤 수를 곱해 그 곱을 취했을 때, 전자들이 후자들보다 각각 더 크거나, 전자들이 후자들과 각각 크기가 같거나, 전자들이 후자들보다 각각 더 작게 됨을 의미한다(Heath, 1952)."

론은 에우독소스의 비례론이 성립하기 이전에 체계화되었다. 이 일반화된 비례론은 Ⅵ권의 모든 정리들을 증명하는데 사용된 것이 아니라, 오직 첫 번째 정리의 증명에만 사용되었다 (Mueller, 1981).

셋째, 통약가능한 량에 제한된 비례를 직관적으로 정의함으로써 닮음을 정의하고, 이후에 비례를 통약가능하지 않은 량으로 일반화하고 이를 이용하여 다시 닮음을 정의한 17세기 Clairaut의 《기하학원론》에 나타난 정의이다. Euclid《원론》의 정의가 오랫동안 군림하였으나, 17세기 Clairaut는 기하학을 교육적인 목적으로 집필하면서 닮음을 다른 방식으로 정의하였다. 우선, 도형의 길이를 측정하는 단위에 초점을 두어 닮음이 무엇인가를 직관적으로 설명한 후에 정의하였다(Clairaut, 2005, pp.30-31).

> 측정하려는 도형 $ABCDE$를, 예컨대 변 $AB$가 100미터라면 변 $ab$는 100밀리미터, 변 $BC$가 45미터라면 변 $bc$는 45밀리미터로 하는 보다 작은 닮은 도형 $abcde$로 표현하고, 이어서 축소된 도형 $abcde$의 넓이가 60000제곱밀리미터라면 도형 $ABCDE$의 넓이는 60000제곱미터가 틀림없다는 생각이 즉시 떠오른다.

> 두 도형 $ABCDE$, $abcde$가 닮음이라면, 큰 쪽의 각 $A,B,C,D,E$가 작은 쪽의 각 $a,b,c,d,e$와 같아야 하고, 작은 쪽의 변 $ab,bc,cd$ 등은 큰 쪽의 변 $AB,BC,CD$ 등이 부분 $P$를 포함하는 만큼 부분 $p$를 포함해야 한다.




<그림 Ⅱ-3> Clairaut의 《기하학원론》에 제시된 닮은 도형

이 정의의 뒷부분을 "비례"를 이용하여 "변 $AB,BC,CD$ 등은 변 $ab,bc,cd$ 등에 비례해야 한다" 혹은 "변 $AB$와 $ab$의 비는 $BC$와 $bc$의 비와 같다" 등과 같이 형식적으로 재진술한다. Clairaut의 닮음 정의에서 말하는 "비례"는 어떤 선분이 단위길이를 몇 번 포함하는가라는 통약가능성을 가정하고 있다. 예를 들어, 선분 $AB$는 잘 선택된 단위길이 $P$에 의해서 7번으로 측정가능하면, 선분 $ab$도 잘 선택된 단위길이 $p$에 의해서 7번으로 측정가능하다. Clairaut는 이와 같이 통약가능성을 가정한 상태에서 닮음을 정의하고, 책의 후반부에 통약가능하지 않은 경우로 닮음 정의를 일반화한다. Clairaut가 이와 같이 닮음을 두 부분으로 나누어 정의한 것은, 《원론》처럼 닮음을 엄밀하게 정의하는 것보다 "주어진 크기와 찾고자하는 미지의 크기 사이의 관계를 결정하면서 알려지지 않는 진리를 발견하는 방법을 찾는 것(Clairaut, 2005, ⅹⅲ)"이 더 중요하다고 생각했기 때문이었다. 그리하여 그는 위와 같은 직관적인 정의를 이용하여 닮은 삼각형에서 성립하는 정리들을 증명해 나간다. Clairaut의 《기하학원론》에서 닮음을 정의하기 위해 도입된 개념 순서를 도식화하면 <표 Ⅱ-2>과 같다.

확대 축소 ⇒ 비례 의미 ⇒ 통약가능한 비례 정의 ⇒

닮음 정의 ⇒ 통약불가능한 비례 정의 ⇒ 닮음 정의

<표 Ⅱ-2> Clairaut의 《기하학원론》에서 닮음을 정의하기 위해 도입된 개념 순서

이제까지 살펴본 세 개 정의는 어떻게 비례를 정의할 것인가라는 관점에 따라 다르다. 첫 번째 피타고라스의 닮음 정의는 통약불가능성

을 배제하고 있다. 두 번째 Euclid 《원론》의 정의는 오늘날 실수 공리에 해당하는 비례론을 정의한 이후에 닮음을 정의하고 있다. 엄밀하고 형식적인 정의이다. 세 번째 Clairaut의 정의는 통약가능성을 가정하고 닮음을 정의하고, 두 선분의 관계를 통약불가능성으로 확장하는 방법을 사용하였다. 이 세 개의 정의로부터 다음 두 가지 사실을 도출할 수 있다. 첫째, 실수 공리가 없던 시대에는 통약불가능성을 어떻게 다룰 것인가가 큰 문제이었다. 《원론》에서는 일반화된 비례를 정의한 이후에 닮음을 정의하였으나, 실제로는 복잡한 비례를 사용하는 것을 최소한 것은 그 단적인 모습을 보여준다. 또한 Clairaut는 통약불가능성을 가능한 뒷부분에 배치하였다. 둘째, 통약불가능성을 언급하지 않아도 닮음을 전개할 수 있다는 사실이다. 피타고라스의 경우에 통약가능성을 가정하고도 닮음에 관한 많은 정리를 도출하였다. 또한 Clairaut는 통약가능성을 전제로 닮음에 관한 일반적인 원리를 도출할 수 있었다.

## III. 실수 공리 성립 이후의 닮음 정의

에우독소스의 비례론은 미적분의 발달로 인한 기하학에 대한 내적인 조직화의 요구에 따라, 19세기 데데킨트(Julius Wilhelm Dedekind, 1831-1916), 바이어슈트라스(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897), 칸토어(Georg Cantor, 1845-1918) 등에 의해서 실수 공리로 형식화되었다(Otte, 1990; Boyer & Merzbach, 2000). 그리고 실수 공리를 이용하여 기하학의 공리체계들이 구성되었다. 그 중에서 학교기하에 가장 큰 영향을 미친 것은 Birkhoff의 공리계이었다(Fehr, 1963). 실수 공리와 그 연산으로부터 공리를 구성하는 것으로부터 시작되는 Birkhoff 공리계는 다음과 같다(Birkhoff, 1932).

공리1. (선분 측정 공리) 임의의 적선 $l$의 점 A, B, …는 모든 점 A, B, …에 대하여 $|x_B - x_A| = d(A, B)$인 실수 $x$와 일대일대응 시킬 수 있다.

공리2. (점-선 공리) 주어진 두 점 P, Q (P$\neq$Q)를 지나는 직선은 오직 하나 있다.

공리3. (각 측정 공리) 임의의 점 O를 지나는 반직선 $l, m$, … 은 A$\neq$O와 B$\neq$O이 각각 직선 $l$과 $m$의 점일 때, 그 차이 $a_m - a_l \pmod{2\pi}$가 $\angle$AOB인 실수 $a \pmod{2\pi}$와 일대일대응 시킬 수 있다.

공리4: (닮음 공리) 두 삼각형 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 그리고 어떤 상수 $k > 0$ 에 대해서
$d(A', B') = kd(A, B)$, $d(A', C') = kd(A, C)$
그리고 $\angle B'A'C' = \pm \angle BAC$ 이면,
$d(B', C') = kd(B, C)$, $\angle C'B'A' = \pm \angle CBA$,
$\angle A'C'B' = \pm \angle ACB$이다.

여기에서 네 번째 공리는 닮음을 정의하는 명제이다. 이전에 닮음 정의보다 조건이 최소화된 것으로, 두 삼각형에서 대응하는 두 쌍의 대변이 비례하고 그 끼인 각이 같으면 두 삼각형은 닮음임을 정의한다. 이 공리의 의미에 대하여 Birkhoff는 어떤 도형을 "임의의 비 $k$로 기하학적 도형을 확대하거나 줄일 수 있다(Birkhoff, 1932)"라고 설명했다. "임의의 비 $k$"는 실수 범위의 '비의 값'을 의미한다. 실수 공리에 근거함으로써 '비례'는 두 수의 비의 값이 같음을 의미하게 된 것이다.

이 공리계의 핵심적인 장점은 통약불가능성을 언급하지 않아도 된다는 점이다. 《원론》에서는 합동인 삼각형으로부터 닮음인 삼각형을 유도하기 위해서는 두 선분의 길이가 통약불가능한 경우를 다루어야만 했다. 반면 닮음 정의를 공리로 받아들이면, 합동 삼각형은 닮은 삼각형의 특수한 경우로 쉽게 증명되기 때문에 통약불가능성을 언급할 필요가 없게 된다

(Birkhoff & Beatley, 1959). 그리고 이러한 장점은 무리수를 포함한 실수의 정의 덕분이었다. 학교수학은 이 공리계에 큰 영향을 받았고, 가장 대표적인 교재로 Birkhoff & Beatley의 《기초기하학》과 SMSG의 《기하학》이 있다. 이 두 교재는 현재의 학교수학과 밀접한 관계가 있으므로 이하에서 살펴보겠다.

Birkhoff는 자신이 구성한 새로운 공리계에 따른 기하 교재를 구성하여 실제 가르쳐보고, 그 유용성을 확신한 후, 동료 Beatly와 함께 《기초기하학》을 집필하였다. 이 교재는 논증기하학을 학습하는 고등학교 학생들을 대상으로 하였다. 이 교재의 궁극적 목적인 '논리적 사고 함양' 즉, 최소한의 공리로부터 기하학의 구조를 이해하고 논증할 수 있는 사고력을 함양하기 위해서 공리적 전개 방법을 사용하였다 (Birkhoff & Beatly, 1959, 서문). 《기초기하학》에서 '원리(Principle)'라고 명명하였으나, 실제로 '공리'로 제시된 5개 명제는 다음과 같다.

원리1: 직선의 측정. 직선 위의 두 점은 수치화 가능하기 때문에 두 수의 차이가 거리를 측정한다.
원리2: 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 존재한다.
원리3: 각 측정. 모든 평각은 수치화 가능하기 때문에 두 수의 차이가 각을 측정한다.
원리4: 모든 평각은 같은 측정값을 갖는다.
원리5: 두 삼각형에서 한 각의 크기가 같고 그 각을 끼고 있는 변이 비례하면, 두 삼각형은 닮았다.

원리 5는 닮음과 관련된다. 즉, 닮음 정의를 공리로 제시하였다. 여기에서 '비례'는 두 실수의 몫에 해당하는 비의 값이 같음을 의미한다. 《기초기하학》에서는 이 공리를 도출하기 전에 우선 닮음을 다음과 같이 정의한다.

만약 두 기하 도형의 모든 대응하는 각의 크기가 같고 모든 대응하는 길이가 비례하면, 그 두 기하 도형은 닮았다.

이 정의 이후에 "닮음 비율(factor of proportionality)"을 정의한다. 예를 들어, 어떤 오각형 ABCDE의 모든 변의 길이가 주어진 오각형 A′B′C′D′E′의 대응하는 변의 길이의 3배라면 '3'를 "닮음 비율"이라고 한다. 이 닮음 비율은 두 실수의 몫에 해당하는 비의 값이 같음을 의미한다. 즉, 닮음 비율이 3이면, $AB=3A'B'$, $BC=3B'C'$, $CD=3C'D'$ 혹은 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AD}{A'D'}=3$이다. 닮음 비율은 비례식의 비례상수에 해당한다. 실수 공리에 근거하여 '비의 값'을 자유롭게 사용하게 됨으로써, '비례'한다는 것은 $f(x)=ax$를 만족하는 비례상수 $a$가 존재함을 의미하게 되었고, '비례'는 문자 조작을 통해서 해결할 수 있게 되어 비례의 대수적 특성이 강해지게 되었다. 그리고 비례를 이용하여 닮음을 공리로 제시한다. 닮음 공리를 제시하기 위해 도입된 개념의 순서를 도식화하면 <표 Ⅲ-1>와 같다.

| 닮음 정의 | ⇒ | 닮음 비율 | ⇒ | 비례 | ⇒ | 닮음 공리 |
|---|---|---|---|---|---|---|

<표 Ⅲ-1> Birkhoff & Beatley의 《기초기하학》에서 닮음 공리를 제시하기 위해 도입된 개념 순서

Birkhoff 공리계의 영향을 받았을 뿐만 아니라 해외 여러 나라에 큰 영향을 끼친 기하 교재는 '새수학' 운동의 일환으로 Yale 대학에서 집필된 SMSG의 《기하학》이다. 10학년 학생들을 위한 이 교재는 닮음 정의를 제시하기 전에, 학생들에게 닮음에 대한 직관적인 의미를 전달하기 위하여 '도형의 확대나 축소에 의한 대응관계'를 도입한다. 그리고 도형을 확대나 축소할 때의 변의 길이의 관계를 '비례'로 정의하고, 이 비례를 이용하여 닮음을 형식적으로 다음과 같이 정의한다(SMSG, 1960, pp.359-365).

> 대강 이야기하면, 두 기하학적 도형은 그 모양이 완전히 동일하지만 크기가 같을 필요가 없다면, 닮았다. 예를 들면, 두 원은 닮았다. 두 정사각형은 닮았다. 두 정삼각형은 닮았다. 두 선분은 닮았다. 아래 두 삼각형의 변의 길이가 나타나 있다. 이 그림은 매우 특별한 관련을 나타낸다. 이 관계를 설명하는 한 가지 방법은, 대강 이야기하면, 왼쪽 삼각형은 "확대"될 수 있거나 오른쪽 삼각형은 "축소"될 수 있다. 따라서 두 삼각형은 대응관계에 의해서 관련된다. 물론, 이 대응관계는 오른쪽 삼각형의 대응변이 모두 2배라는 점에서, 합동은 아니다. 이런 종류의 대응을 닮음이라고 부른다. 정확한 정의는 나중에 제시할 것이다.
>
> 두 삼각형의 변의 길이를 $a$, $b$, $c$와 $a'$, $b'$, $c'$은 매우 특별한 관련성을 갖는다. 둘째 열은 첫째 열의 대응하는 수보다 정확하게 2배이다. 또는 첫째 열은 둘째 열의 반이다.
>
> $a'=2a$, $b'=2b$, $c'=2c$ 또는
>
> $a=\frac{1}{2}a'$, $b=\frac{1}{2}b'$, $c=\frac{1}{2}c'$
>
> 또는 다른 방법은 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=2$
>
> 또는 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{1}{2}$. 이런 방법으로 관련된 자연수열을 비례라고 부른다.
>
> (비례) 정의: 0이 아닌 수열 $a,b,c$와 $p,q,r$이 $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$ 이거나 $\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}$이면 비례한다.
>
> 두 삼각형의 꼭짓점 사이의 대응이 주어졌다. 대응각은 같고, 대응변의 길이가 비례이면, 이 대응을 닮음이라고 하고, 두 삼각형을 닮았다고 한다.

도형을 확대하거나 축소한다는 직관적인 이미지를 이용하여 닮음 비율, 즉, '2배'라는 개념을 도입하고, 이를 수학적으로 '비례'로 정의한다. 그리고 '비례'를 이용하여 닮음을 다시 정의한다. 닮음을 정의하게 도입된 개념의 순서를 도식화하면 <표 Ⅲ-2>와 같다.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 확대<br>축소 | ⇒ | 닮음<br>비율 | ⇒ | 비례<br>정의 | ⇒ | 닮음<br>정의 |

<표 Ⅲ-2> SMSG 기하 교재에서 닮음을 정의하기 위해 도입된 개념 순서

이렇게 정의된 닮음을 이용하여 관련된 정리를 비례식으로 증명한다. 닮은 삼각형을 정의한 이후의 연습문제는 변의 길이를 여러 가지로 바꾸어가면서 미지수를 찾는 문제들이 대부분이다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 실수 공리 성립 이후에 Birkhoff 공리계의 영향을 받아서, 학교수학에서 닮음을 정의하는 방식이 변화되었다. 《기초기하학》에서는 기존의 닮음 정의와 동일한 형태의 닮음 정의를 제시한 다음에 닮음 비율과 비례를 대수적으로 설명하여, 닮음 공리로 정련시켰다. SMSG 기하 교재는《기초기하학》과 유사한 형태이나, 닮음 공리를 제시하는 과정을 삭제하고 도형의 확대나 축소 맥락을 도입하여 직관적이고 시각적인 이미지를 첨가하였다. 실수 공리 성립 이전과 비교하여 변화된 큰 두 개의 특징은 다음과 같다. 첫째, 비례의 의미를 설명하는 방식이 변화되었다. 실수 공리가 성립하기 이전에는 변들의 길이가 갖는 배수 관계를 통해서 비례의 의미를 설명하였다. 그러나 실수 공리 성립 이후에는 비례는 비례상수가 존재함을 의미하고, 비례식은 비례상수를 사용한 대수식이 되었다. 그리하여 닮음 비율을 정의하고 닮음 비율을 이용하여 비례를 정의한다. 둘째, 통약불가능성을 다루지 않아도 된다. 실수 공리를 통해서 수학적 엄밀성을 확보하였기 때문이다. 그리하여 합동을 이용하여 닮음을 설명하기 위하여 통약가능한 경우와 통약불가능한 경우를 분리해서 설명할 필요가 없게 되었다. 반대로 닮음을 정의함으로써 합동을 그 특수한 경우로 다루게 되었다.

## Ⅳ. 수학 교과서에 나타난 닮음 정의에 대한 분석

앞서 살펴본 5가지 닮음의 정의를 살펴보았

다. 이들은 실수 공리의 도입 여부에 따라서 비례 정의와 닮음 정의가 달라졌다.

우리나라 7차 교육과정 전에는 닮음을 초등학교 고학년에서 구체적인 활동을 중심으로 그리고 중학교 2학년에서 심화하여 지도하였다. 하지만 7차 교육과정에 이르러 전체 교육과정의 내용을 축소하면서 중학교 2학년에서만 지도하고 있다. 현행 2007 개정 교육과정에서는 닮음을 중학교 2학년에서만 도입하여 지도하고 있다. 대부분의 수학 교과서에서 도형의 확대나 축소를 제시한 다음에 바로 “닮음”이 무엇인가를 정의하고, 곧이어 닮음의 성질을 제시한다. 예를 들어, 신항균 외(2010)에서는 “한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 얻게 된 도형이 다른 도형과 합동일 때, 이들 두 도형은 서로 닮음인 관계가 있다고 하며, 닮음인 관계가 있는 두 도형을 닮은 도형이라고 한다”로 정의한다. 대부분의 교과서에서 이와 유사하게 정의한다(김원경 외, 2010; 박영훈 외, 2010; 우정호 외, 2010; 유희찬 외, 2010; 최용준 외, 2010; 정상권 외, 2010; 김홍종 외, 2010). 이것을 편의상 ‘직관적 정의’라고 하겠다. 그리고 어떤 도형(주로 삼각형이나 사각형)과 그 도형을 2배로 확대하여 얻게 된 도형을 제시하여 대응하는 각의 크기와 대응하는 변의 길이의 비를 조사한 후에, ‘평면도형에서 닮음의 성질’을 진술한다. 예를 들어, 정상권 외(2010)는 다음과 같다.

> $\triangle A'B'C'$은 $\triangle ABC$를 2배 확대한 것이다. 따라서 두 삼각형은 닮은 도형이다. (중략)
> 닮은 두 삼각형 ABC와 A′B′C′에서 대응하는 변의 길이와 대응하는 각의 크기를 눈금을 이용하여 조사하면
> $\overline{AB}:\overline{A'B'}=1:2$, $\overline{BC}:\overline{B'C'}=1:2$,
> $\overline{AC}:\overline{A'C'}=1:2$ 로 일정하고, 대응하는 각의 크기는 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$인 관계가 있음을 알 수 있다.

> 두 닮은 평면도형에서
> (1) 대응하는 변의 길이의 비는 일정하다.
> (2) 대응하는 각의 크기는 각각 같다.

그런데 여기에서 ‘닮음의 성질’은 앞서 수학사에서는 일반적으로 닮음 정의로 사용되어 온 것이다. 따라서 현행 수학 교과서에서는 ‘닮음의 성질’이라고 명명하고 있으나, 실제적으로는 닮음 정의라고 할 수 있다. 이것을 편의상 ‘형식적 정의’라고 하겠다.

형식적 정의 이후에, 대응하는 변의 길이의 비를 ‘닮음비’를 정의한다. 예를 들어, 정상권 외(2010)는 다음과 같이 정의한다.

> 닮은 두 평면도형에서 대응변의 길이의 비를 **닮음비**라고 한다. 앞의 그림에서 $\triangle ABC$를 2배 확대한 것이 $\triangle A'B'C'$이고, $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$의 닮음비는 $1:2$이다.

그리고 일반적인 닮음비 $m:n$으로 확장하지 않고, 문제를 통해서 닮음비를 다루도록 한다. 다시 말해, 확대나 축소 아이디어를 이용하여 ‘2배’와 같은 닮음 비율을 사용하고, 비례로 표현하여 닮음을 정의한다. 닮음을 정의하기 위해 도입된 개념의 순서를 도식화하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

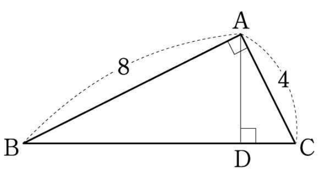
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 확대<br>축소 | ⇒ | 닮음<br>비율 | ⇒ | 비<br>례 | ⇒ | 닮음<br>정의 | ⇒ | 닮음<br>비 |

<표 Ⅳ-1> 현재 수학 교과서에서 닮음을 정의하기 위해 도입된 개념 순서

그런데 학생들은 비의 정의를 초등학교 5학년에서 그리고 비례의 정의를 초등학교 6학년에서 학습한다. 5학년에서는 ‘두 양을 비교할 때 한쪽의 양을 기준으로 다른 쪽의 양이 몇 배가 되는지를 나타내는 방법으로 비를 도입하고 비에서 기준량과 비교하는 양을 이해하게’ 하도록 한다(교육과학기술부, 2008, p.115). 6학년에서는 ‘비

의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식이 비례식이라는 것'을 알게 한다. 그리고 '미지항이 포함된 비례식에서 비례식의 내항의 곱과 외항의 곱이 같음을 활용하여 미지수를 구할 수 있게' 하도록 한다. 여기에서 활용되는 비례식은 비의 전항과 후항 사이의 전후 관계에서 미지항을 쉽게 알 수 있는 간단한 경우만 다루도록 한다(교육과학기술부, 2008, pp.124-125).

그리고 중학교 3학년에서 무리수, 실수, 피타고라스 정리를 학습한 이후에 닮음비의 전항과 후항 중에 무리수가 포함된 경우를 다룬다. 중학교 3학년 교과서에 제시된 문제를 살펴보자. <그림 Ⅳ-1>과 같이 직각을 낀 꼭짓점 A에서 대변 BC에 수선을 그어서 그 대변과 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 AD의 길이를 구하는 문제가 있다(강옥기, 정순영, 이환철, 2002, p.45). 이 문제를 해결하기 위해서는 삼각형 ABC와 삼각형 DAC가 닮은 도형임을 찾아서 대응하는 변의 길이의 비가 일정하다는 사실을 이용해야 한다. 이때 사용되는 닮음비는 $\sqrt{5}:1$이다. 피타고라스 정리를 이용하여 변 BC의 길이가 $4\sqrt{5}$임을 알고, 두 삼각형의 대응하는 각의 크기가 일정하다는 사실로부터 두 삼각형이 닮음이라는 사실을 도출한다. 그러면 중학교 2학년에서 배운 닮음의 형식적 정의를 이용하여 선분 AD의 길이를 찾을 수 있다.



<그림 Ⅳ-1> 닮음비의 항이 무리수인 경우

따라서 학생들은 초등학교 5, 6학년에서 다루었던 비의 정의와 비례식의 대수적 규칙을 이용하여 중학교 2학년에서 닮은 도형의 정의를 이해한 후에 대수식으로 문제를 해결하고, 중학교 3학년에서 닮음비의 값이 무리수인 경우를 해결하게 된다. 결국 학생들은 닮음 정의로서 공식적으로 제시된 직관적 정의보다는 주로 닮음의 성질로 제시된 형식적 정의를 통해서 닮음을 다룬다. 이와 같이, 대수적 성질을 가진 닮음 정의를 한번만 제시하고, 사용된 비의 값의 범위를 점진적으로 확대하는 방식은 현재 교과서의 닮음 정의 방식이 Birkhoff 공리계에 근거하고 있음을 말해준다.

현재 교과서의 닮음 정의가 Birkhoff 공리계에 근거하고 있다는 사실은 합동과 닮음의 관계로부터도 확인된다. 전체 교육과정 중 중학교 1학년에서 도형의 합동, 중학교 2학년에서 도형의 닮음이 나타난다. 표면상으로 볼 때, 교육과정이 합동에서 닮음으로 일반화하는 것으로 보인다. 그런데 중학교 2학년 교과서를 살펴보면, 합동을 닮음의 특수한 경우로 다루고 있음을 알게 된다. 대부분의 교과서가 유사하므로 일반적인 경우로서 신항균 외(2010)를 살펴보면, 닮음비를 정의한 이후에 '합동인 두 도형은 닮음비가 1:1인 닮은 도형이다'와 같은 문구를 제시한다. 이것은 닮음비의 값을 실수 범위에서 생각함으로써, 합동을 닮음의 특수한 경우로 다루었던 Birkhoff 공리계의 방식과 동일하다.

앞서 수학사에서 살펴본 닮음 정의에서 반드시 형식적 정의가 사용되었다는 사실을 확인할 수 있다. 도형의 확대와 축소라는 직관적 의미를 제공하였던 Clairaut의 《기하학원론》이나 SMSG의 《기하학》에서도 도형의 확대나 축소를 닮음의 의미를 설명하기 위하여 도입하였고, 닮음의 정의로는 각의 크기와 변의 길이에 대한 양화된 정보를 제공하는 형식적 정의를 제시하였다. 직관적인 의미로 닮음을 설명한 이후에, 형식적 정의를《기하학원론》에는 '형식적 정의', 《기하학》에서는 '정확한 정의'라고 표현하여 제시하였다. 현재 교과서에서는 도형의 확대나 축소 문맥을 '도형의 닮음의 정

의'로 사용하고, 전통적으로 사용되어왔던 닮음 정의를 '닮은 도형의 성질'로 제시하고 있다.

## Ⅴ. 현재 닮음 정의에 대한 비판

현재 교과서에 사용되고 있는 닮음 정의를, 두 개 정의를 제시하는 방식, 두 개 정의의 관련성, 정의에 사용된 비례 의미 측면에서 논의하겠다.

첫째, 닮음을 직관적 정의와 형식적 정의의 두 가지로 제시하는 방식에 대하여 논의해보자. 형식적 정의에서 두 도형의 대응하는 변의 비가 일정하다는 성질은 비례식으로 형식화된다. 그런데 비례식은 수와 수 사이의 연산의 성질 즉, 대수적인 성질을 가지고 있다. 이것은 도형의 확대와 축소라는 직관적인 의미의 닮음을 대수적인 비례식으로 정의하는 방식이다. 우선, 공간직관으로 파악되는 개념인 닮음을 시각적으로 제시한 이후에 형식적 정의를 제시하는 것은 개념의 형성 과정을 고려할 때 올바른 방향이다. 하지만 학생들이 직관으로 파악할 수 있는 개념을 곧바로 대수적인 정의로 형식화하는 것은 쉬운 일이 아니다. Vinner(1989)에 따르면 개념은 개념이미지와 개념정의의 측면이 있는데, 학생들은 개념이미지와 개념정의가 일치하는 올바른 개념을 형성하기 보다는 개념이미지와 개념정의가 통합되지 못하는 잘못된 개념을 형성하기도 한다. 즉, 도형의 확대와 축소라는 개념이미지와 대수식으로 제시된 개념정의가 일치하도록 하는 일은 쉬운 일이 아니다.

닮음 개념과 관련하여, 직관적 정의와 형식적 정의가 올바르게 통합되지 못하는 현상에 대한 비판을 찾을 수 있다. 1960년대 SMSG 교재 저자들은 기하학의 주제 중 본질적으로 대수적인 특징을 가진 주제들이 존재하는데 그 중 가장 대표적인 것으로 '닮은 삼각형의 비례관계'를 꼽았고(SMSG, 1960, 서문), 이에 대해 수학자 Thom은 기하를 대수로 대치하려는 시도는 교육적으로 유해하다고 비판하였다(Thom, 1971). 그에 의하면, 우리가 사용하는 사고는 일상적인 사고와 형식적인 사고가 있는데, 일상적인 사고는 일상 언어로 표현되고 형식적인 사고는 대수언어로 표현된다. 수학학습은 일상적인 사고가 형식적인 사고로 전이되는 과정인 바, 일상 언어에서 점진적으로 대수언어로 변환되어야 하는데 이를 중재하는 언어가 기하언어라고 하였다. 따라서 기하학습을 통해서 점진적으로 대수언어를 습득하고 형식적인 사고를 할 수 있도록 되어야 한다고 보았다. 이러한 측면에서 학교수학에서 기하를 대신하여 대수를 가르치는 것은 교육적으로 옳지 않다고 보았다(Thom, 1973). 그리고 수학자이며 교육학자인 Freudenthal 또한 기하를 대수로 대체하는 것은 교육적으로 바람직하지 않으며(Freudenthal, 1973), 특히 기하교육에서 닮음 개념이 대수식 또는 알고리즘으로 인해 위기에 처했다고 비판하였다(Freudenthal, 1983). 기하 개념의 경우, 심상이 먼저 구성되고 언어적 표현이 늦게 나타나지만, 산술의 경우에 언어화가 먼저 일어나서 추상화를 촉진하기 때문에, 산술 언어의 도움을 받아서 공간에 대한 경험을 기하 개념으로 형식화해야 한다는 것이다. 기하학적 경험이나 아이디어들을 점진적으로 대수적 알고리즘이 되도록 수학화해야 한다고 주장하였다. 또한 대수적 알고리즘으로 인하여 직관 혹은 통찰의 근원이 막히지 않도록 직관으로부터 알고리즘화에 이르는 단계를 반복하는 것이 중요하다고 강조하였다(Freudenthal, 1991). 이와 같은 비판은 닮음이 직관적으로 파악되는 개념이라는 것과 형식적으로 정의되어야 하는 개념이라는 것을 말해주는 동시에, 직관적 정의를 형식적 정

의로 곧바로 개념화하는 것은 교육적으로 옳지 않음을 말해주고 있다.

학생들이 직관적 정의와 형식적 정의를 올바르게 연결시키는 못하는 현상은 경험연구에서도 나타난다. De Bock, van Dooren, Janssens & Verschaffel(2002)에 따르면, 많은 학생들이 주어진 도형을 3배 확대하는 것과 주어진 도형을 수평 방향과 수직 방향의 양 방향으로 확대해야 한다는 것을 연결시키지 못하였다. 그리하여 시각적으로는 도형의 넓이가 9배 확대된 것처럼 보이지만 비례식에 근거해서 판단함으로써, 도형의 넓이가 3배 확대되었다고 주장하는 학생들이 다수 나타났다. 이 학생들은 닮음의 직관적 정의와 형식적 정의를 올바르게 연결시키지 못한 것이다.

둘째, 직관적 정의와 형식적 정의의 관련성에 대하여 논의해보자. 직관적 정의는 도형의 확대와 축소라는 직관적인 의미를 제공한다. 이것을 형식적 정의로 연결시키기 위하여, 대부분의 교과서는 2배 확대한 삼각형을 관찰하도록 한다. 이미 닮음인 관계에 있는 두 삼각형 그림이 제시되기 때문에, 학생들은 대응하는 두 도형의 대응하는 변의 길이의 비가 1:2이고, 대응하는 각의 크기가 같다는 사실을 파악할 수 있다. 그런데 교과서는 '2배'를 이용해서 주어진 도형의 각의 크기는 변하지 않게, 대응하는 변의 길이만을 2배로 늘려서 대응하는 도형을 그리기 때문에, '2배'에는 이미 대응하는 각의 크기는 변하지 않고, 대응하는 변의 길이의 비가 1:2라는 사실이 함의되어 있다. 하지만 논리적으로 그렇지 않다. 즉, '2배'에는 그 목적어가 각인지 변인지에 대한 정보가 없다. 오히려 그 역이 성립한다. 대응하는 변의 길이의 비가 1:2라는 사실로부터 처음 주어진 도형의 변의 길이를 기준으로 할 때, 확대된 도형의 변의 길이의 비의 값이 '2'가 되므로, '2배' 확대되었음을 추론할 수 있다. 따라서 직관적 정의와 형식적 정의는 순환적이다. 즉, 직관적 정의에서 사용된 확대라는 용어를 이용하여 형식적 정의를 설명하고 있지만, 직관적 정의에 이미 형식적 정의에서 제시된 성질들을 사용하고 있기 때문이다. 또한 논리적으로는 형식적 정의로부터 직관적 정의에 사용된 '2배'를 추론할 수 있기 때문이다.

직관적 정의와 형식적 정의의 순환성은 닮음 조건을 설명할 때에도 나타난다. 예를 들어, 삼각형의 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인 각의 크기가 같은 경우에 두 삼각형이 닮음이라는 'SAS 닮음 조건'의 증명을 살펴보자. 우선, $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$를 닮음비가 $1:2$인 닮은 도형이라고 한다. 그리고 $\triangle ABC$를 기준으로 $\overline{A'B'}=2\overline{AB}$, $\overline{BC'}=2\overline{BC}$, $\angle B'=\angle B$인 $\triangle A'BC'$를 그린다. 그러면 $\overline{BC'}=\overline{EF}$, $\overline{A'B'}=\overline{DE}$, $\angle B'=\angle E$이므로, $\triangle A'BC'$와 $\triangle DEF$는 삼각형의 합동조건에 의하여 합동이 되고, $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$는 닮은 도형이 된다(신항균 외, 2010, p.217). 여기에서 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비가 $1:2$임을 이용하여 $\triangle DEF$를 구성한다. 그리고 $\triangle A'BC'$를 구성하기 위해서는 '두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고'를 $\overline{A'B'}=2\overline{AB}$, $\overline{BC'}=2\overline{BC}$로 나타내었다. 이 식은 $\overline{A'B'}$의 길이가 $\overline{AB}$의 길이를 2배로 연장했음을 의미한다. 따라서 '변의 길이의 비가 같다'를 '2배' 확대했다는 것으로 표현한 것이다. 따라서 삼각형의 닮음조건을 증명 없이 도입된 두 가지 정의를 다시 순환적으로 이용하여 설명하고 있다. 학생들은 도형의 확대나 축소에 따른 각의 크기와 변의 길이가 어떻게 변하는지 또는 어떤 요소가 변할 때 불변인 량과 변하는 량은 무엇인지를 탐구할 기회를 갖지 못하고 닮음 정의를 공리적으로 받아들여야 한다.

현재와 같은 모습은 Birkhoff 공리계의 영향

을 받았다. 특히, '비례'를 정의하는 시기와 비례를 표현방법을 제외하고는 SMSG 기하 교재의 설명 방식과 동일하다. 즉, 도형의 확대와 축소라는 문맥에서 닮음 비율을 사용하고, 이것을 비례로 표현한 다음에, '비례'라는 용어를 사용해서 닮음을 정의한다. 이는 '비의 값'이 하나의 수로 표현된다는 사실과, 비례한다면 비례상수가 존재한다는 사실을 함의하고 있는 것이다. 하지만 현행 교과서의 순서에 따르면, 학생들은 초등학교 5, 6학년 때에 '비의 값'을 이용한 '비례'의 정의를 학습하고, 이것을 이용하여 닮음의 정의를 학습해야 한다. 초등학교 과정에서 학습하는 비의 값은 비례식의 비례상수와는 다르다. 하지만 학생들이 비의 값을 비례식의 비례상수로 일반화할 수 있는가의 여부와 상관없이, 현재 교과서에서는 닮음 비율과 닮음비를 순환적으로 사용하고 있는 것이다.

셋째, 닮음의 형식적 정의에서 사용된 비례에 대해서 논의해보자. 닮음 형식적 정의에서 실수 공리에 근거하여 비례와 닮음을 정의함으로써 수학적 엄밀성이 보장되었음을 살펴보았다. 또한 현재 교육과정에서는 명시적으로는 드러내지 않았지만 암묵적으로는 비례식을 실수 범위에서 사용하고 있었다. 따라서 수의 범위를 유리수와 실수로 점진적으로 확장하면서 비의 값의 범위를 실수로 확장하고, 이를 통하여 닮음 정의의 수학적 엄밀성을 확보하였다고 할 수 있다. 하지만 학교수학에서 수학적 엄밀성보다 중요한 것이 '의미'의 문제이다. 이러한 관점에서 수학자 Thom은 SMSG 교재의 닮음의 정의에 대해서 수학적 엄밀성을 위해서 '의미'의 문제를 희생하였다고 비판한 바 있다(Thom, 1973). 수학자들조차도 수학적 엄밀성이 아니라 의미에 근거해서 사고하는데 학생들이 수학적 엄밀함에 근거해서 수학적 의미를 찾는 것은 불가능하다고 보았다. 또한 수 계산이나 대수 계산은 기하학적 심상과 의미를 주는데 실패할 수 있다는 사실을 지적하면서, 학생들이 대수 계산을 통해서 기하학의 의미를 학습하는 것을 불가능하다고 보았다.

그렇다면 현재의 정의는 수학적 엄밀성을 확보하였을 뿐만 아니라 학생들에게 올바른 의미를 부여하고 있는가라는 질문을 할 수 있다. 하지만 경험 연구에 따르면 학생들이 닮음에서 비례의 의미를 올바르게 가지고 있지 않다. Lesh, Post & Behr(1988)에서, 학생들은 주어진 직사각형을 닮음비가 1:2인 도형으로 학대하는 문제를 쉽게 해결하지만, 심지어 닮음비가 1:3인 도형으로 확대하는 문제에서도 낮은 정답률을 보였다. 다른 연구에서도 닮음비가 3:5와 같은 경우에서 그 정답률이 매주 저조하였다(Hart, 1981; Hart, 1984). 이것이 의미하는 바는 비례식을 올바르게 사용하지 못하는 학생들조차도 닮음비가 1:2인 경우를 해결할 수 있다는 것이다. 하지만 현재 수학 교과서에서 닮음의 형식적 정의를 설명하기 위해서 사용되는 닮음비는 1:2인 경우가 가장 많다(신항균 외, 2010; 김원경 외, 2010; 박영훈 외, 2010; 우정호 외, 2010; 최용준 외, 2010; 정상권 외, 2010). 또한 대부분 한 가지 경우에 대한 설명을 바탕으로, 닮음의 형식적 정의를 도출하고 있다. 경험 연구 결과들을 고려할 때, 학생들이 닮음비가 1:2인 경우에 대한 학습을 바탕으로 일반적인 닮음비로 확장할 수 있을 것이라는 가정하는 것은 교육적으로 옳지 않다.

그렇다고 교과서에서 비례의 대수적 성질을 자세히 설명하지도 않는다. 현재 교육과정에서는 초등학교 6학년에서 비례식의 내항의 곱과 외항의 곱이 같다는 비례식의 성질을 학습하는 것이 전부이다. 이후에 비례식의 성질을 비례상수로 일반화하지 않고, 비례식의 성질을 사용하도록 한다. 1:2와 같이 간단한 경우만을 학습

한 학생들은 비의 값이 정수가 아닌 경우인 $3:5$ 혹은 비의 항에 무리수가 나타나는 경우인 $\sqrt{2}:\sqrt{5}$에 대해서도 비례식의 성질을 이용하여 문제를 해결하게 된다. 학생들은 비례식의 성질을 사용하면 될 뿐, 닮음비와 비례상수를 연결시키는 학습활동을 하지 않는다. 한편, 공간직관으로 파악되는 닮음은 닮음비가 $1:k$에서 $k$가 실수범위에서 연속적으로 변하는 연속량으로 나타나며(최지선, 2008), 이것은 비의 값을 하나의 수 혹은 하나의 대상으로 간주할 때에 형식화된다. 따라서 공간직관을 통해서 연속량으로 파악되는 닮음을 형식화하는 과정에서 심상 혹은 개념이미지를 강조할 필요가 있으며, 이것은 닮음비를 하나의 값으로 일반화하는 것과 관련된다. 수학사에서 보았듯이, 닮음과 관련된 추론 과정에서 통약불가능한 경우를 반드시 탐구할 필요는 없다. 피타고라스는 통약가능성을 가정하고도 기하를 전개했으며, 《원론》에서도 일반화된 비례를 거의 사용하지 않았다. 또한 Clairaut는 의도적으로 통약가능성에 제한된 비례를 이용하여 닮음을 전개하였다. 더욱이 실수 공리를 기반으로 하는 현대 학교수학에서 그러할 필요는 없다. 하지만 직관적으로 파악되는 닮음을 닮음비 그리고 닮음 비율로 형식화하는 과정에서 연속적으로 변하는 닮음 사상을 배제할 수는 없다. 따라서 현재와 같이 닮음비가 무엇이든지 간에 비례식만으로 문제를 해결하는 것은 교육적으로 옳지 않다.

## Ⅵ. 결론

닮음은 인간의 가장 기본적인 공간 직관 중의 하나이지만, 수학적으로 정의되기까지 오랜 시간이 소요되었다. 그것은 선분의 길이를 비교하는 과정에서 나타나는 통약불가능한 량에 대한 처리방법 때문이었다. 그리하여 닮음 정의는 수학사 속에서 변천되어왔다. 본고에서는 닮음 정의의 변화를 피타고라스학파의 정의, Euclid 《원론》의 정의, Clairaut의 《기하학원론》의 정의, Birkhoff 공리계의 공리, 그리고 SMSG의 《기하학》의 정의를 통해서 살펴보았다. 그 결과, 실수 공리의 존재 여부에 따라서 닮음을 정의하는 방식이 달랐다.

2007 개정 교육과정에 따른 교과서의 닮음은 도형의 확대나 축소를 이용한 직관적 정의와 도형의 각의 크기와 변의 길이의 관계를 지시하는 형식적 정의로 제시된다. 그런데 이 두 가지 정의는 서로 관련되지 않고 증명되지 않은 채로 학생들에게 제시되었다. 그리고 도형을 '2배' 확대한다는 사실과 닮음비가 $1:2$라는 사실이 순환적으로 사용되었다. 또한 닮음비가 $1:2$인 간단한 경우만을 다룸으로써 비례의 범위를 제한적으로 사용하였다. 이러한 논의를 종합하여 닮음 정의 지도에 관한 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 학생 스스로가 닮음을 정의하는 활동이 필요하다. 현재 교과서에 제시된 닮음의 직관적 정의는 학생들의 공간직관을 자극하고 닮음의 의미를 전달하는 역할을 한다. 그리고 닮음의 형식적 정의는 도형의 요소들에 대한 분석적 사고를 바탕으로 하여 요소들의 관계를 파악하는 사고활동을 요구한다. 따라서 닮음을 학습하는 학생들은 직관적인 이해를 바탕으로 하여 형식적 정의를 구성할 수 있어야 한다. 구체적으로는 초등학교 교육과정에서 닮음을 직관적으로 다룰 수 있다. 6차 교육과정 이전에는 닮음을 초등학교에서 다루어왔으나 7차 교육과정 이후에 학습내용을 축소하는 경향에 따라서 닮음이 삭제되었다. 하지만 닮음은 인간의 가장 기본적인 공간직관 중의 하나로, 초등학교 학생들이 쉽게 다룰 수 있는 소재이다.

따라서 다양한 경험을 할 수 있는 활동 중심으로 닮음을 다룰 수 있을 뿐만 아니라, 닮음과 밀접한 관련이 있는 개념인 선분의 길이, 각의 크기, 도형의 넓이 등을 학습할 수 있다. 일례로 수학화 활동을 강조한 MiC 교재에서는 학생들이 같은 모양으로 이루어진 삼각형이나 사각형을 이어 붙이는 퀼트 활동을 통하여 닮은 도형의 대응변의 길이 변화와 각의 크기 변화를 스스로 찾도록 한다(Gravemeijer, 1998). 또 다른 대안은 중학교 교육과정에서 닮음을 정의하는 활동을 할 수 있다. 닮은 다각형 중에서 닮은 도형을 찾고, 이 때 변화된 요소와 변화되지 않은 요소를 찾는 활동을 제시할 필요가 있다. 그리고 변화된 요소인 변의 길이는 어떻게 변화되었는지 그리고 그 규칙은 무엇인지를 학생 스스로 찾는 활동을 제시할 필요가 있다. 이와 같은 활동을 바탕으로 하여 닮은 도형을 스스로 정의해보는 '정의하기' 활동을 하는 것이 바람직하다. 정의하기 활동은 도형의 요소들 사이의 관계를 파악하는 사고를 바탕으로 이루어질 수 있는 바, 교과서에는 학생 스스로가 닮음의 형식적 정의를 찾아보고 개념으로 만들 수 있는 활동이 포함될 필요가 있다.

둘째, 닮음의 직관적 정의에 제시된 '2배'와 형식적 정의에 제시된 $1:2$를 관련시키는 활동이 필요하다. 직관적으로 확대나 축소하는 과정에서 사용되는 '2배'를 대응하는 변의 길이의 비에 관한 비례식으로 표현할 수 있을 뿐만 아니라, 비례상수 2로 표현할 수 있어야 한다. 즉, '$k$배 확대'를 대응하는 '변의 길이의 비 $1:k$' 나아가 '비례상수 $k$'로 형식화할 수 있어야 한다. 즉, 간단한 닮음비 $1:2$ 뿐만 아니라 $2:3$처럼 비와 값이 자연수가 아닌 경우도 다룰 필요가 있다. 또한 닮음비 $2:3$은 $1.5$배 확대임을 형식화할 필요가 있다. 이와 관련된 참고 사례로 프랑스의 교과서를 살펴볼 수 있다. 초등학교 교과서에서는 모눈종이의 크기를 이용하여 도형을 확대하거나 축소하는 활동을 하고 '확대 비율'이라는 용어를 사용한다. 중등학교 저학년 교과서에서 대응하는 각의 크기가 같은 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비가 일정한 도형을 '탈레스 삼각형'이라 명명하여 탐구하도록 한다. 그리고 중등학교 고학년 교과서에서 한편으로 탈레스 삼각형에서 나타나는 비의 값을 형식화하여 상수 $k$로 표현하고, 다른 한편으로는 대응하는 변의 길이의 비가 일정하다는 성질로 형식화한다(Blanc, et al., 1995; Blanc, et al., 1996; Bonnefond, et al., 1998; Denys, et al. 2004). 또한 MiC 교재에서도 닮은 도형의 대응하는 변의 관계를 '인수(multiplier)'로 형식화한다(Gravemeijer, 1998). '인수'는 비례식의 비례상수 역할을 한다. 한편, 영국 교과서에서는 닮음을 '척도 인수(scale factor)'로 도입하여 척도 인수를 대응변의 길이의 비와 관련짓도록 한다(McGuire & Smith, 1996; Sue Bright, et al., 2002). 이러한 사례와 같이, 비례한다는 성질을 비례상수 $k$와 관련지을 수 있는 활동이 필요하다.

셋째, 비의 값 범위를 점진적으로 확장할 수 있는 사고활동이 필요하다. 닮은 도형의 대응하는 변의 비가 일정하다는 성질을 형식화한 비례식은 대수적 특성이 강하여, 학생들이 비례의 의미를 올바르게 이해하지 않아도 비례식을 통하여 닮음과 관련된 문제들을 해결할 수 있다. 이것은 두 선분의 길이의 비를 형식화하려는 오랜 역사적 노력의 결실로서, 그 안에는 수의 확장 및 연속성에 대한 심상 등이 포함되어 있다. 하지만 학생들은 닮음에 포함된 기하학적 심상과 의미를 파악하지 않은 채로, 비례식의 내항의 곱과 외항의 곱과 같다는 대수적 규칙만을 이용하여 많은 문제를 해결할 수 있다. 비례식 항의 일부가 유리수이든 무리수이

든 간에, 연속량으로서의 닮음비와 관련짓지 않고도 문제를 해결할 수 있는 것이다. 비의 값 범위를 점진적으로 확장하는 사고활동을 통하여 연속량으로서의 닮음의 직관적 의미를 비례식을 이용한 형식적 정의로 관련시킬 수 있어야 하겠다. 구체적으로 도형을 2배 뿐만 아니라 1.5배 그리고 1.35배 확대하면 주어진 도형이 어떻게 변하는지를 개략적으로 예상하는 활동을 포함하거나 $\sqrt{2}$배 확대하면 대략 어느 정도로 확대되는가를 예상하는 활동을 제시할 수 있다. 그리고 닮음의 초점에 따라서 도형을 이동시키면 닮음 비율이 어떻게 변하는지를 기술하는 활동을 제시할 수 있다. 이와 같이 연속적으로 확대되는 도형과 닮음 비율을 관련시킬 수 있는 활동들이 필요하다.

## 참고문헌


교육과학기술부(2008). **교육인적자원부 고시 제 2006-75호 및 제2007-79호에 따른 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ)-수학,과학,실과**. 교육과학기술부.

강옥기・정순영・이환철(2002). **수학 9-나 교과서**. 서울 : 두산동아.

김재홍・권석일(2003). 도형의 '닮음'과 닮음의'활용'. **대한수학교육학회 1002년도 하계수학교육연구 발표대회 논문집**, 447-458.

김원경 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 비유와 상징.

김홍종 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 성지출판(주).

김흥기(2009). 초중등학교 수학에서 다루는 비와 닮음에 대한 고찰. **수학교육학연구, 19**(1), 1-24.

박영훈 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 천재문화.

신항균 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : (주)지학사.

우정호 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 두산동아.

유희찬 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : (주)미래엔 컬처그룹.

이준열 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 천재교육.

임재훈・박교식(2009). 우리나라 수학 교과서의 닮음 도입과 정의에 관한 비판적 논의. **수학교육학연구, 19**(3), 393-407.

정상권 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : (주)금성출판사.

최용준 외(2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 천재문화.

최지선(2008). **닮음 개념에 대한 교수학적 분석**. 서울대학교 대학원박사학위논문.

Birkhoff, G. D. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *The Annals of Mathematics, 33*(2), 329-345.

Birkhoff, G. D., & Beatly, R. (1959). *Basic geometry*. New York: Chelsea Publishing Company.

Blanc, J. P., Bramand, P., Dêbu, P., Gély, J., Peynichou, D., & Vagas, A. (1995). *Pour Comprendre les Mathemtiques, CM1*. Paris: Hachette.

Blanc, J. P., Bramand, P., Dêbu, P., Gély, J., Peynichou, D., & Vagas, A. (1996). *Pour Comprendre les Mathemtiques, CE2*. Paris: Hachette.

Bonnefond, G., Daviand, D., & Revranche, B. (1998). *Mathématiques 4e. Le nouveau Pythagore*. Paris: Hatier.

Boyer, C. B. (1959). Descartes and the geometrization of algebra. The *American Mathematical Monthly, 65*(5), 390-393.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2000). **수학의 역사・하**. (양영오・조윤동, 역). 서울: 경문사.

(영어 원작은 1968년 출판).

Chazan, D., Hillyer, J., Schoen, K., Simon, G., Yerushalmy, M., & Zodhiates, P. P. (1988). *Similarity: Exploring the understanding of a geometric concept, Technical Report*. The Educational Technology Center.

Clairaut, A. C. (2005). **기하학원론**. (장혜원, 역). 서울: 경문사. (불어 원작은 1741년 출판).

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The Predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 65-83.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L.(2002). Improper use of line reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school student's errors, *Educational Studies in Mathematics, 50*, 311-334.

Denys, B. et al. (2004). *Axiale. Mathématiques 2de*. Paris: Hatier.

Eves, H. (1969). The history of geometry. In National Council of Teachers of Mathematics (Ed.), *Historical topics for the mathematical classroom-Thirty-first yearbook* (pp. 165-192). Reston, VA: NCTM.

Fehr, H. F. (1963). Reform of instruction in Geometry. *The American Mathematical Monthly, 70*(3), 323-327.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Gould, S. H. (1962). The origin of Euclid axioms. *The Journal of the Mathematical Association, 46*(358), 269-290.

Gravemeijer, G. (1998). *Teacher guide with Reallotment*. In National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute (Eds.), Mathematics in Context, A connected curriculum for grades 5-8. Chicago: Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics:11-16*. London: Murray.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. England: NFER-Nelson.

Heath, T. L. (1952). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Chicago: ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, INC.

Joseph, G. G. (1991). *The crest the peacock: non-european roots of mathematics*. Princeton University Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning in early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Kaput, J. J., & West, M. W. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.237-287). State University of New York Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.)

*Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Maor, E. (2004). **사인 코사인의 즐거움.** (조윤정, 역). 서울 : 파스칼북스.

McGuire, P., & Smith, K. (1996). *Powerful shapes S6*. Oxford University Press.

Mueller, I. (1981). *Philosophy of Mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. The MIT Press.

Otte, M. (1990). Arithmetic and geometry: Some remarks on the concept complimentarity. *Studies in Philosophy and Education, 10*, 37-62.

Roche, J. J. (1998). *The mathematics of measure*, London: The Athlone Press.

SMSG (1960). *Geometry: Student's text, part I*. Yale University Press.

Sue Bright, et al. (2002). *Edexcel GCSE Modular Mathematics Examples and Practice Intermediate Stage*. Heinemann.

Thom, R. (1971). Modern Mathematics: an educational and philosophical error? In T. Tymoczko (Ed.) (1986), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 67-78). Birkhauser Boston, Inc.

Thom, R. (1973). Modern Mathematics: does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematics Education : Proceedings of the 2nd ICME* (pp. 194-209). Cambridge university Press.

Tirosh, D., & Stavy, R.(1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning, *Educational Studies in Mathematics, 38*, 51-66.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and procedures* (pp. 127-174). New York : Academic Press.

Vinner, S. (1989). Image and definition for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vollrath, H. (1977). The understanding of similarity and shape in classifying tasks. *Educational Studies in Mathematics, 8*(2), 211-224.

# An Analysis and Criticism on the Definition of the Similarity Concept in Mathematical Texts by Investigating Mathematical History

Choi, Ji Sun (Jeungheung middle school)

This study aims to analyze and criticize the definition of the similarity concept in mathematical texts by investigating mathematical history. At first, we analyzed the definition of Pythagoras, the definition of Euclid's 《Elements》, the definition of Clairaut's 《Elements of geometry》, the postulate of Brkhoff's postulates for plane geometry, the definition of Birkhoff & Beatly의 《Basic Geometry》. the definition of SMSG 《Geometry》. and the definition of the similarity concept in current mathematics texts. Then we criticized the definition of the similarity concept in current mathematics texts based on mathematical history. We critically discussed three issues and gave three suggestions.

* Key Words : definition(정의), similarity(닮음), proportion(비례), mathematical history(수학사), intuitive(직관적), formal(형식적).

논문 접수 : 2010. 09. 27
논문 수정 : 2010. 11. 01
심사 완료 : 2010. 11. 09