

변이성과 변이 추론의 지도를 위한 지식

고 은 성* · 이 경 화**

학교수학에서 학생들의 통계적 사고를 개발하고 향상시키기 위한 수단으로 많은 선행 연구들은 변이성에 주목하고 변이 추론을 지도할 것을 제안한다. 이 논문에서는 변이성과 변이 추론을 지도하는데 필요한 지식을 살펴보았다. 이를 위해 변이성의 근원은 무엇인지, 변이성에 대한 대처 방식은 무엇인지, 변이성의 유형에는 어떠한 것이 있는지, 변이성을 어떻게 인지하게 되는지, 변이성과 문제해결과는 어떠한 관련이 있는지 살펴보았다. 연구 결과 통계적 활동에서 변이성의 근원과 변이성에 어떻게 대처할 것인지에 대한 토론은 학생들로 하여금 다양한 유형의 변이성을 인지하도록 하고 이후 통계적 활동에 적극적으로 참여하도록 하는 동기부여가 될 수 있음을 확인하였다. 또한 자료의 표현 지도에서 변이 추론을 강조하는 것이 통계교육에 좀더 부합하는 방향임을 확인하였다. 학교수학에서 다루어지는 변이성의 유형, 그리고 문제해결과 변이성에 대한 검토는 내용요소 중심의 통계교육과정 배열에 대한 반성의 기회를 제공하였다.

1. 도입

변이성은 통계학이 존재하는 이유로, 자료에 담긴 메시지를 걸러내기 위해 정교한 통계적 방법을 개발해야만 했던 이유이기도 하다. 그러나 우리는 태어나면서부터 항상 변화하는 체계 속에 놓여있어 변이성을 어떠한 특별한 개념으로 인식하지 못한다(Wild & Pfannkuch, 1999, p. 235). 이렇게 편재하는 변이성을 다루는 것이 바로 통계적 사고이다.

확률과 통계의 궁극적인 목적은 의미있는 방식으로 변이성을 기술하는 것으로(Watson, 2006, p.218), 확률과 통계교육의 문제점을 지적하는 논의에서 변이성은 중요한 위치를 차지해왔다. 예를 들면, Moore(1990, p.99)는 자료 속의 변이

성을 경험하고 이를 통해 변이성에 대한 이해를 개발하는 것이 확률과 통계의 연결성을 조직화하는 첫 번째 단계라 언급하고 있으며, Ballman(1997)과 Biehler(1994, p.4) 역시 변이성에 대한 이해는 통계적 사고와 확률적 사고의 통합을 위해 필수적인 요소라고 주장하였다. 우정호(2000), 이영하와 허지영(2010)이 제시한 우리나라 확률과 통계교육의 문제점 역시 Moore(1990)와 Ballman(1997), Biehler(1994)가 진정한 확률과 통계교육을 위해 변이성의 이해를 중요시 한 것과 같은 맥락으로 볼 수 있다. 우정호(2000)는 우리나라 통계교육의 주요 문제점으로 초등학교와 중학교 수학에서는 전통적인 기술통계를, 고등학교 수학에서는 확률분포 이론과 그에 맞추는 통계적 추론 중심의 확률 계산법 지도가 이루어지고 있어, 통계적 사고의 기본 정신을 충실히 반

* 서울대학교 대학원, kes-7402@hanmail.net
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr

영하지 못하고 있는데, 이는 실세계의 이해와 예측을 위한 자료분석 도구로서의 통계의 실재를 가르치기보다는 지적 도전이 없는 인위적인 예를 통한 자료정리 기법과 통계치의 계산 및 확률 분포 이론이라는 수학을 가르치는데 주력하고 있다고 비판한다. 이영하와 허지영(2010)은 확률 지도의 바람직한 지도 방안으로 분포를 통한 통계적 확률을 지도할 것을 제안하는데, 이러한 지도 방법에는 궁극적으로 변이성에 대한 인식의 필요성이 내포되어 있다.

Reading과 Shaughnessy(2004, p.202)는 변이성을 변화하는 실체의 특징으로, 변이를 그 특징을 기술하거나 측정된 것으로 정의한다. 그리고 변이성을 지닌 상황에서 관찰되는 현상을 기술할 때 관여하는 인지 과정을 변이 추론으로 정의하고 있다. 예를 통해 변이성과 변이, 변이 추론의 의미에 대해 살펴보면 다음과 같다. 100개의 검은 공이 들어있는 상자로부터 10개의 공을 10회 복원 추출하는 상황과 검은 공 30개와 흰 공 70개가 들어 있는 상자로부터 10개의 공을 10회 복원 추출하는 상황을 비교해 보자. 전자의 상황에서는 10회에 걸쳐 꺼내진 결과가 모두 동일하다. 즉 변이성이 존재하지 않는다. 그래서 그 특징을 기술하거나 측정된 변이가 크게 의미가 없으며, 변이 추론이 거의 필요하지 않다. 그러나 후자의 상황에서는 10회에 걸쳐 꺼내진 결과들 사이에 차이가 존재한다. 즉 자료집합 안에 변이성이 존재하므로 결과를 예측하기 위해 그 특징을 기술하거나 측정하는 활동이 필요하므로 변이 추론을 하게 된다.

Moore(1990, p.135)는 변이성의 편재를 인식하고 자료 내의 변이성을 양화하고 모델링하는 적절한 방법을 탐색하는 것을 통계적 사고로 기술하고 있으며, Snee(1990, p.118)는 우리 주위의 모든 것에, 그리고 우리가 행하는 모든

것에 변이성이 내재하고 있음을 인지하고, 이러한 변이성을 확인하여 특징짓고, 양화하고, 제어하고, 축약함으로써 과정이나 현상을 개선할 수 있음을 인식하는 사고를 통계적 사고로 정의하고 있다. 통계적 사고에 대한 이러한 정의들은 통계적 사고에서 변이 추론이 얼마나 핵심적인 역할을 하는지 명확히 보여준다.

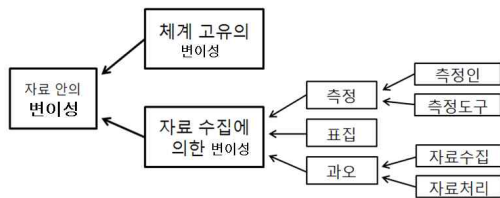
이렇듯 변이성이 통계의 핵심임에도 불구하고 지금까지 국내 수학교육연구에서는 제한된 몇몇 사례를 통해서만 변이성에 대한 개념 분석이 이루어진 정도에 그치고 있다(김영미·박영희, 2006; 송선아·이경화, 2007). 또한 교사들이 주제와 관련된 여러 가지 내용을 이해하고, 교수활동에서 다양한 방식으로 주제와 관련된 내용을 다루기 위해서는 교사를 위한 지식에 대한 연구가 필요한데(Ma, 2002) 변이성과 관련된 교사를 위한 지식에 대한 연구 역시 부족한 실정이다. 이는 변이 추론의 바람직한 지도를 위한 지식에 대한 연구의 필요성을 제기한다. 본 연구에서는 변이에 대한 추론 지도에 필요한 지식을 알아보기 위해, 변이성의 근원, 변이성에 대한 대처 방식, 변이성의 유형, 변이성의 인지 과정, 문제해결과 변이성의 관계에 대해 살펴본다.

II. 변이성의 근원

변이성은 모든 곳에, 그리고 모든 것에 존재한다(Wild, 2006, p.10; Wild & Pfannkuch, 1999, p.235). 그렇다면 이러한 변이성은 어떻게 발생하는가, 즉 변이성의 근원은 어디인가?

Wild와 Pfannkuch(1999, p.235)는 [그림 II-1]과 같이 변이성의 근원을 제시하고 있다. 그들에 따르면 하나의 체계 내에서 생산된 어떠한 두 제품도 동일하지 않다. 또한 어떠한 두 유기

체도 동일하지 않으며 동일하게 주어지는 자극에 대해 동일한 방식으로 반응하지 않는다. 각각의 유기체는 계속적으로 변화하는 하나의 체계이다. 이러한 다양한 결과들은 체계 고유의 변이성을 형성한다. 예를 들면 아주 작은 단위까지 정확하게 측정하는 도구를 이용해 혈압을 측정하더라도 매 순간마다 측정값이 다른데, 이것은 측정되는 체계, 즉 인간 내부의 변화가 자료 내의 변이성을 생성한 것이다. 자료수집 과정에서 다양한 방식으로 추가되는 변이성은 체계 내의 고유한 변이성과 함께 자료 안의 변이성을 형성하는 근원이 된다. 자료수집 과정에서 생성되는 변이성은 측정, 표집, 과오에 기인하는데, 측정을 하는 사람, 측정을 할 때 이용하는 도구, 자료를 수집하거나 처리하면서 범하는 과오에 의해 변이성이 생성되기도 한다. 또한 표집이라는 통계적 자료수집 기법에 의해 변이성이 생성되기도 한다.



[그림 II-1] 변이성의 근원

변이성의 근원을 조사하는 것이 통계적 사고에서 어떤 의미를 지니는지 살펴보자. [그림 II-2]는 Ko와 Lee(2010, 출판중)의 연구에서 학생들에게 제시한 문제이다. 동일한 물체를 9명의 학생이 각자 저울로 측정하고 이를 바탕으로 하나의 자료집합을 구성하는데, 이때 얻어진 자료집합 내에는 변이성이 존재한다. 따라서 물체의 질량을 구하기 위해서는 자료집합 내에 존재하는 변이성을 적절히 고려해야 한다. Ko와 Lee(2010)의 연구결과에 따르면 변이성의 근원

을 조사하고 적절하게 파악한 학생은 타당한 방법으로 물체의 질량을 구한 반면, 그렇지 못한 학생은 타당하지 못한 값을 물체의 질량으로 제시함을 알 수 있다. Ko와 Lee(2010)의 연구에서 어떤 학생은 “15.3을 제외한 8개의 평균을 구했어요. 왜냐하면 15.3은 다른 것들과 너무 차이가 나서 아마도 잘못 측정한 것 같아요.”라고 설명하고 있는데, 이 학생의 경우 변이성의 근원이 잘못된 측정임을 적절하게 판단하고 있다. 그래서 물체의 질량을 구하는 과정에서 15.3을 제외하고 평균을 구하는 방식으로 변이성을 적절히 처리할 수 있었다. 반면 다른 학생은 “17.6이요. 9개의 평균을 구했어요. 값이 다르니까 정확한 값을 알기 위해서는 평균을 구해야 해요.”라고 설명하고 있는데, 이 학생의 경우 자료집합 내의 변이성을 인식하여 평균을 구해야 함을 알고 있지만 변이성의 원인을 고려하고 있지 않다. 그래서 타당하지 못한 값을 물체의 질량으로 제시하고 있다. 이렇게 변이성의 원인에 대한 고려는 이후 평균을 구하는 것과 같은 통계적 활동에 주요한 영향을 미친다.

과학 시간에 9명의 학생이 동일한 물체를 저울로 측정하여 다음과 같은 측정값을 얻었다고 한다.(단위: g)

6.3	6.0	6.0	15.3	6.1
6.3	6.2	6.15	6.3	

이 물체의 무게는 얼마라고 생각하는가? 왜 그렇게 생각하는지 그 이유도 함께 설명하시오.

[그림 II-2] Ko와 Lee(2010)의 연구에서 학생들에게 제시한 문제

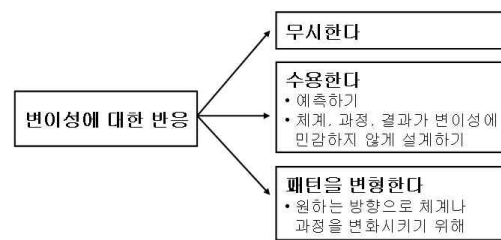
Reading과 Shaughnessy (2004, pp.217-221)는 학생들에게 노란 사탕 20개, 빨간 사탕 50개, 파란 사탕 30개가 들어있는 상자에서 10개의 사탕을 무작위로 꺼냈을 때 빨간 사탕이 몇 개 나올지 결과를 예측하고, 그렇게 예측한 이유를 설명해 보도록 하였다. 그리고 학생들의 반응을 토대로 변이성의 근원에 대한 학생들의 인식

수준을 4 수준으로 구분하였다. 수준 1의 학생들은 변이성의 근원을 외부로부터 찾았는데, 주로 물리적 측면에 주목하였다. 예를 들면, “중심을 제외한 모든 곳에 사탕이 놓여 있을 수 있어요.”와 같이 사탕이 상자의 어느 위치에 놓여있는지, “빨간색 사탕이 가운데에 놓여 있을 수 있는데 가장자리에서 사탕을 뽑았을 수도 있어요.”와 같이 그릇의 어느 부분에서 사탕을 뽑았는지, “사탕을 잘 섞으면 사탕은 골고루 퍼져 있을 거예요”와 같이 사탕을 어떻게 섞었는지 등을 변이성의 원인으로 고려하였다. 수준 2의 학생들은 변이성의 근원으로 색깔의 빈도를 고려했는데, 이것은 모집단의 구성을 고려한 것으로 볼 수 있지만 학생들은 그 효과를 충분히 반영하지 못하였다. 예를 들면, 100개 중에 빨간 사탕이 50개, 즉 50%라는 비율이 미치는 영향에 대해서는 언급하지 않은 채 단지 “빨간색 사탕이 많이 있어서요.”라고 대답했다. 수준 3의 학생들은 변이성의 근원으로 색깔의 비율을 고려하였는데, 모집단에 들어있는 빨간 사탕의 비율이 표본에 들어있는 빨간 사탕의 수에 영향을 미친다는 것을 인식하고 있었다. 예를 들면, “상자 안에 50%의 빨간 사탕이 있기 때문에 만약 10개를 꺼낸다면 10개의 50%만큼 빨간 사탕이 있을 것이라고 기대할 수 있어요.”와 같이 백분율을 사용해 설명하였다. 수준 4의 학생들은 예측 결과에 대한 자신의 생각을 설명할 때 비율과 우연(chance)을 모두 고려하였다. 예를 들면, “약 절반 정도 기대할 수 있지만, 얼마의 우연이 작용할 수도 있어요.”와 같이 모집단의 비율을 참조하여 추출되는 빨간 사탕의 개수를 예측했지만 표본집단 내의 변이성을 설명하기 위해 우연을 고려하였다. 이렇듯 변이 추론을 하는 상황에서 통계적으로 얼마나 타당한 추론을 도출하는지는 변이성의 근원을 고려하는지 여부에 영향을 받는다.

이 밖에도 Ben-Zvi(2004)는 변이성의 가능한 근원으로 사회문화적, 역사적, 유전적 영향을 언급하고 있다. 그는 학생들이 분포를 비교할 때 변이 추론에서 나타나는 특징을 조사하였다. 학생들에게 영국식 이름에서 성(姓)의 길이와 이스라엘식 이름에서 성(姓)의 길이를 비교하도록 했는데, 학생들은 변이성의 근원이 두 언어의 구조에 있다는 것을 이용함으로써 영국식 이름에서 성(姓)의 길이와 이스라엘식 이름에서 성(姓)의 길이를 비교하는 통계적 활동에서 문제를 해결할 수 있었다.

III. 변이성에의 대처

변이성은 우리의 모든 삶에, 그리고 우리가 관찰하는 모든 것에 영향을 미친다(Wild, 2006, p.10; Wild & Pfannkuch, 1999, p.235). 그렇다면 우리는 변이성에 어떻게 대처하는가? Wild와 Pfannkuch(1999)는 [그림 III-1]과 같이 변이성에 대한 우리의 대처 방식을 구분하고 있다(p.236).



[그림 III-1] 변이성에 대처하는 방식

첫째, 우리는 변이성이 존재하지 않는 것처럼 행동할 수 있다. 예를 들면, 모든 물체나 유기체가 동일한 것처럼 또는 각각이 어떤 결정론적 방식에 따라 움직이는 것처럼 행동할 수 있다. 어떤 상황에서는 이렇게 변이성을 무시하는 것이 적절한 대처 방안이 될 수 있다. 그

렇지 않다면 우리는 모든 응용수학과 이를 토대로 비옥한 발전을 이룬 많은 다른 분야를 거부해야 한다. 둘째, 우리는 변이성을 수용한다. 그래서 존재하는 변이성을 고려하고 이를 반영하여 예측을 하며, 체계나 과정, 결과가 변이성에 영향을 받지 않는 방향으로 결정을 내린다. 예를 들면, 우리는 존재하는 변이성의 패턴을 조사하고 이를 반영하여 옷이나 신발의 치수를 결정하는 것처럼 변이성을 어느 정도 극복할 수 있는 방법을 찾는다. 특히 품질관리 분야에서는 생산을 위한 설계 단계에서 변이성을 수용하는데, 과정 중에 생기는 또는 체계에 의해 생기는 변이성에 생산품이 민감하지 않도록 설계하고자 노력한다. 셋째, 현재의 상황을 좀더 원하는 방향으로 이끌고자 변이성의 패턴을 바꾸려고 시도한다. 예를 들면, 곡식의 평균 생산량을 증가시키기 위해 또는 사망률을 감소시키기 위해 조작 가능한 원인을 분리해내거나 외적 처치를 투입함으로써 변이성의 패턴을 변형하려고 시도한다. 전자는 종종 품질관리분야나 공중보건에서 사용되며, 후자는 농업이나 개별적 환자들의 처치를 목적으로 하는 의학 연구에서 사용된다.

통계학자들이 변이성의 패턴을 요약하고 모델링하는 것은 바로 이러한 예측, 설명, 통제를 위해서이다. 즉 더 나은 예측을 하거나 자료를 생성하는 메커니즘을 더 잘 이해하기 위해 변이성의 패턴을 요약하고 모델링한다. 또는 체계 내에 존재하는 변이성의 패턴을 변형할 수 있기 위해서인데, 변이성의 패턴을 요약하고 모델링하면 주관성을 감소시킬 수 있게 되어 체계에 도움이 되는 방향으로 체계 내에 존재하는 변이성을 부분적으로 변형할 수 있게 된다. 통제는 좀더 원하는 방향으로 변이성의 패턴을 변화시키는 것이다. 예측은 변이성을 수용하는데 있어 아주 중요한 요소이다. 다양한

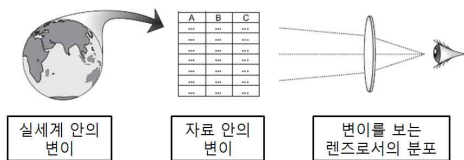
개별적인 것들이 다르게 반응하는 이유를 이해하기 위해 다양한 설명을 제시하는 것은 예측 능력을 향상시키는데 많은 도움이 되며, 또한 이것은 통제를 위해서도 필요하다. 원인과 메커니즘에 대한 설명은 기초 과학의 목표이다. 우리가 “왜”라고 묻자마자 원인을 찾고 있는 것이다. 어떤 면에서 변이성은 모호할 수 있지만, 일반적으로 우리가 원인을 밝힐 수 있도록 해주는 것은 바로 체계 안에 있는 통제되지 않는 변이성이다. 변이성의 패턴을 찾음으로써 원인을 밝힐 수 있게 된다(Wild, 2006, p.12).

통계학자들은 변수들 사이의 패턴과 규칙성을 찾음으로써 변이성의 근원을 찾는다. 아무것도 발견되지 않는다면 우리가 할 수 있는 최선의 것은 변이성의 정도를 추정하고 그것을 극복하는 방법을 찾는 것이다. 규칙성은 원인에 대응하는 것일 수도 있고 그렇지 않은 것일 수도 있다. 규칙성이 원인에 대응하는 것일 경우 우리는 쉽게 이것을 통제하거나 변형시킬 수 있다. 그러나 규칙성이 원인에 대응하는 것이 아닐 경우 이것을 쉽게 통제하거나 변형하는 것이 불가능한데, 대신 다른 어떤 관찰된 규칙성과 조작적으로 동치인 것으로 취급한다. 이렇게 함으로써 우리는 예측을 하는데 좀더 신뢰를 보장할 수 있다. 규칙성의 존재는 우리로 하여금 예측을 할 수 있게 하고 국소적으로 관련이 있는 변이성의 측정을 가능하게 한다(Wild, 2006, p.12).

IV. 자료의 표현과 변이성

변이성은 관찰가능한 실재이다(Wild, 2006, p.10; Wild & Pfannkuch, 1999, p.242). 통계적으로 반응한다는 것은 자료집합의 현상을 알아내기 위해 자료집합 내에 있는 변이성의 패턴을

조사하고 규명해서 모델링하는 것이다(Moore, 1990, p.135; Snee, 1990, p.118; Wild, 2006, p.11). 그렇다면 우리는 어떻게 변이성을 인지하게 되는가? Wild(2006, p.11)는 변수에 내재해 있는 변이성의 패턴을 분포로 정의하고 있다. 그러므로 사실상 분포는 변이성에 대해 추론하는 모든 통계적 방법의 기초가 된다. 분포라는 렌즈를 통해 변이성을 보는 것이다(그림 IV-1). 자료를 볼 때 우리는 개별적인 사례를 보는 것이 아니라 분포라는 렌즈를 통해 자료집합 전체를 보고 있는 것이다.

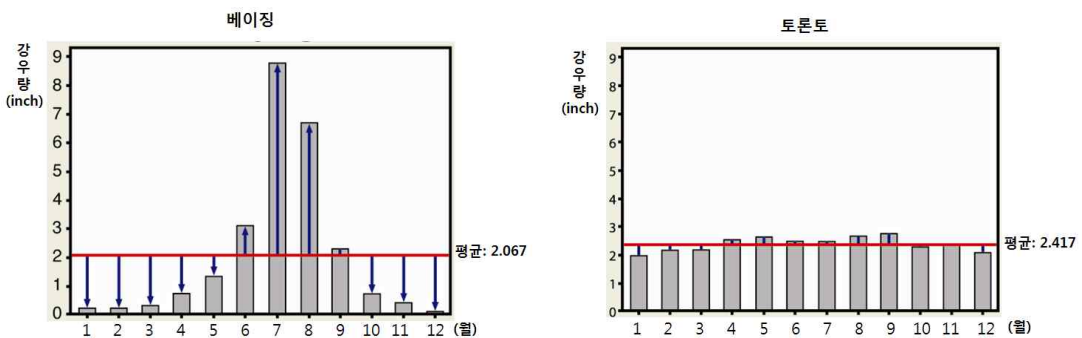


[그림 IV-1] 변이성을 보는 렌즈로서의 분포 (Wild, 2006, p.11)

분포는 자료집합을 개별적인 값들의 모임이 아니라 하나의 총체적인 집단으로 인식할 수 있도록 해주는데(Cobb, 1999, p.11), 분포의 형태는 다양한 통계적 측면에 영향을 받는다(Bakker & Gravemeijer, 2004, p.149). 예를 들면, 높은 봉우리 모양은 어떤 계급의 도수가 높다

는 것을 나타내며, 중심에서 왼쪽 또는 오른쪽으로 치우친 모양은 분포가 비대칭임을 나타낸다. 그리고 두 개의 봉우리가 있다는 것은 하나의 집단에 서로 이질적인 작은 두 집단이 존재함을 의미한다. '높은 봉우리, 왼쪽 또는 오른쪽으로 치우친, 두 개의 봉우리'와 같은 비형식적인 용어를 사용하여 분포의 형태에 대해 추론한다는 것은 학생들이 이미 분포의 여러 측면을 인식할 수 있음을 의미한다. 이와 같이 형태에 대한 추론은 분포에 대한 추론의 토대가 될 수 있다. 그러나 그 동안 통계교육에서 여러 통계치나 그래프 등의 자료의 표현에 대한 지도는 변이 추론에 주목하지 못하고 통계적 요약에 국한되어 왔다(김선희·이중희, 2003; 박영희, 2001; 황현미·방정숙, 2007).

자료의 표현은 변이 추론을 하는데 있어 중요한 역할을 한다. 다음의 예를 통해 자료의 표현이 변이 추론에 어떻게 기여하는지 살펴보자. [그림 IV-2]는 베이징과 토론토의 월별 강우량에 대한 분포를 그래프로 나타낸 것이다(Cooper & Shore, 2010, pp.4-5). 두 그래프 모두 시간에 따른 강우량의 변화를 나타내고 있다. 가로축 위에 월단위로 그려진 각각의 막대의 높이는 양적 자료를 나타낸다. 여기에서는 매월 강우량을 나타낸다. 변이성의 정도는 평균 강우량을 중심으로



[그림 IV-2] 베이징과 토론토의 월별 강우량(Cooper & Shore, 2010)

판단할 수 있다. 평균 강우량과 각각의 월 강우량의 차이가 크면 클수록 자료는 더 변화적이다. 즉 변이성이 크다. 토론토의 매월 강우량은 베이징의 매월 강우량에 비해 평균으로부터의 차이가 거의 없기 때문에 베이징에 비해 변이성이 작다고 결론내릴 수 있다.

통계에서 우리는 특정한 예에서 특정한 방법으로 수집된 특정한 개별적인 값들에 대한 독립적인 단편의 모임으로서의 자료집합에는 거의 관심을 두지 않는다. 오히려 좀더 광범위하게 적용 가능한 경향을 알아내기 위해 자료를 조사한다. 이러한 경향은 개별적인 자료 값들 자체에서 발견되는 것이 아니라 하나의 집단으로서 자료집합 내에 있는 식별 가능한 패턴에서 발견되는 것이다. 그래서 패턴에 주목하기 위해 우리의 주의를 흐트러뜨리는 세부적인 것들인 자료값 각각의 사이에서 나타나는 연결성을 보류하거나 일시적으로 무시한다. 개별적인 사례에 대한 관심을 넘어서게 될 때 관심의 대상이 되는 변수들에 대한 동일한 값을 지닌 개별적인 사례들은 구별 불가능하게 되고, 그래서 자료집합을 특정한 값들의 집합과 그에 대응되는 도수, 즉 도수분포로 집약할 수 있게 된다. 변이성의 패턴에 대한 모든 정보는 도수분포에 담기게 된다. 우리가 접하는 모든 요약 통계치와 대부분의 그래프들은 도수분포에 대한 요약 통계치와 그래프들이다. 우리는 도수분포에 포함된 변이성의 여러 패턴 양상을 발견하고 기술하기 위해 이러한 통계치들과 그래프들을 이용한다(Wild, 2006, p.11). 도수분포는 변이성을 조사하는 다양한 분포들의 하나에 불과하다. 많은 연구자들(이영하·최지안, 2008; 이영하·허지영, 2010; Bakker, 2004; Bakker & Gravemeijer, 2004; Ben-Zvi, 2004; Cooper & Shore, 2010; Reading & Reid, 2005)이 학생들이 다양한 분포를 경험함으로써 분포에 대한 추론

을 개발하는 것은 통계적 사고의 향상을 위해 중요하다고 강조하는데, 이것은 분포가 변이성을 보는 렌즈 역할을 하기 때문이다.

V. 학교수학에서 다루는 변이성의 유형

학생들이 통계적으로 사고할 수 있도록 통계 지도의 방향을 개선하려는 논의의 중심에는 항상 변이성이 있어왔다. 예를 들면, Burrill와 Elliott (2006, p.1)는 학생들이 통계적 사고를 개발할 수 있도록 하기 위해 교사는 학생들이 변이성을 이해하고, 변이성에 대해 양적으로 사고하고 추론할 수 있도록 지도해야 한다고 권고한다. Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report Pre-K-12는 통계적으로 사고하는 능력을 개발하기 위해 학생들은 통계적 문제해결과 의사결정은 자료안의 변이성을 이해하고, 설명하고, 양화하는데 영향을 받음을 학습을 통해 배워야 한다고 진술하고 있다(Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry, & Scheaffer, 2007, p.6). Franklin과 Garfield (2006, pp.347-360)는 학생들이 학교교육을 통해 경험하고 학습해야하는 변이성을 그 특성에 따라 측정변이성, 고유변이성, 유도변이성, 표집변이성, 우연변이성으로 구분하고 있다.

측정변이성은 반복된 측정값들 사이에 존재한다. 작은 자를 이용하여 아주 먼 거리를 측정하는 경우를 하나의 예로 들 수 있다. 이런 경우 측정 도구가 신뢰할 수 없는 결과를 산출하는데, 이 때 발생하는 변이성이 측정변이성에 해당된다. 또 다른 경우로는 측정되는 체계 내의 변화로 인해 변이성이 나타난다. 예를 들면, 정확한 측정도구를 이용하더라도 어떤 개인의 혈압을 측정한 결과는 매 순간마다 다르게 나타날 수 있다. Ko와 Lee(2010)가 그들의

연구에서 제시한 문제상황([그림 II-2] 참조)에서의 변이성 역시 측정변이성을 반영하고 있다. 측정변이성에 대한 인식은 과학분야에서 그 오랜 역사를 찾아볼 수 있는데, 천문학에서의 관찰 결과들이 대표적이다. 측정변이성을 해결하기 위해 관측 결과들의 적절한 결합 방법을 고안하는 과정에서 초기의 통계적 방법이 성공하고 널리 확산될 수 있는 틀을 제공하게 된다(Stigler, 2002, pp.81-84).

변이성은 모든 상황에 내재해 있다. 개별적인 자료 자체가 제각각 다르기 때문이다. 예를 들어, 동일한 속성을 여러 사람에게서 각각 측정할 때 측정결과에 있어서 어느 정도의 차이를 갖게 된다. 이렇게 서로 다른 측정결과는 어느 정도 측정 도구의 탓일 수도 있지만 대부분 이것은 개인들이 서로 다르기 때문에 생긴 결과이다. 사람들은 당연히 키, 태도, 능력이 다르며, 또한 의견, 감정적 반응 등도 서로 다르다. 이러한 속성들 중 하나를 측정한다고 할 때, 측정결과에서 반드시 변이성을 얻게 된다. 같은 종의 씨앗을 뿌렸을 때 각각의 씨앗이 동일한 환경에서 재배되었음에도 불구하고 서로 다른 크기의 콩을 생산하게 된다. 왜냐하면 어떤 두 개의 씨앗도 동일하지 않기 때문이다. 성장을 측정할 결과에서 반드시 씨앗들 사이에 변이성이 존재한다. 이러한 고유변이성에 대한 통계학자들의 관심은 아주 오랜 역사를 갖는다. 독일의 통계학자 Gustav Rumelin(1815-1889)은 변이성은 고등동물의 특성으로 자유를 반영한다고 주장한다. 인간은 자유의지를 지니고 있어 하등동물보다 변화무쌍하다. 인간이 동질적이라면 통계학은 불필요한 것으로, 따라서 사회통계학은 단순히 평균을 제시하기 보다는 변이성을 연구해야 한다는 것이다(Gould, 2010, p.10). Quetelet(1796~1874)의 평균인(Pfannkuch & Wild, 2004, p.24) 역시 인간에 내재한 고유변이

성의 인식으로부터 시작하여 이를 모델링하고자 하는 시도로 나오게 된다.

유도변이성은 처치에 의해 생긴다. 예를 들면, A 지역에 한 봉지의 콩의 씨앗을 심고, 이 지역과는 기후가 다른 B 지역에 한 봉지의 콩의 씨앗을 심는다면 A 지역에서 자란 식물들의 성장에서 관찰된 차이와 B 지역에서 자란 식물들의 성장에서 관찰된 차이는 씨앗 고유의 차이 때문일 수도 있고, 즉 고유변이성 때문일 수도 있고, 지역이 서로 다르기 때문일 수도 있다. 두 지역에 서로 다른 비료를 사용했다면 관찰된 차이는 비료로 인한 차이 때문일 수도 있다. 물론 관찰된 차이는 우리가 전혀 예상하지 못했던 다른 원인에 의한 것일 수도 있다. 좀더 세심하게 실험을 설계하면 어떠한 요인이 어떠한 영향을 주었는지 조사하는데 도움이 된다. 다른 요인들에 의해 유도된 변이성을 고유변이성과 구분하려는 이러한 기본적인 아이디어는 현대 통계학의 핵심이다. 이러한 아이디어를 통해 의학에서는 어떤 약물은 효과적이며 안전한 반면, 어떤 약물은 비효과적이거나 해로운 부작용을 낳는다고 결론을 내릴 수 있게 된다. 농업에서는 어떤 기후에서 다른 기후보다 옥수수가 더 잘 자란다, 어떤 비료가 다른 비료보다 효과적이다, 어떤 사료가 다른 사료보다 육질에 좋다 등을 보증하기 위해 이러한 아이디어를 이용한다(Pfannkuch & Wild, 2004, p.27-28).

표집변이성은 표집을 통해 모집단의 특성을 파악하는 과정에서 중요하게 고려되는 요소이다. 유권자 투표에서 특정 후보를 지지하는 모든 유권자들의 비율을 추정하기 위해 일부 유권자들을 조사한 후 그 비율을 알아내는데, 이렇게 특정 후보를 지지하는 모든 유권자들의 비율의 추정치로 일부 유권자들 중 그 후보를 지지하는 유권자의 비율을 사용하는 것은 타당

해 보인다. 그러나 동일한 크기로 다시 표본을 선택한다면 그 후보를 지지하는 유권자의 비율이 정확하게 같지는 않을 것이다. 표본 비율은 표본마다 다르게 나타날 것이다. 이것을 표집 변이성이라 한다. 그렇다면 어떤 표본에서는 비율이 0.60으로 나타나고, 또 어떤 표본에서는 비율이 0.30으로 나타난다면 어떻게? 이것은 가능한 일이지만 만약 적절한 표집기법을 사용하면 표본비율에서 이렇게 큰 차이를 보이는 것은 거의 있을 수 없다. 여론 조사 결과를 유용하게 사용할 수 있는 이유는 이 때문이다. 즉 적절한 표집기법과 표본의 크기를 이용해 표본들 사이에서 수용불가능한 차이가 거의 나올 수 없음을 보증할 수 있기 때문이다.

우연변이성에 대한 이해는 확률과 통계를 연결해 주는 중요한 요소이다. 통계에서 무작위화(randomization)를 중요하게 사용하는 경우가 두 가지가 있는데, 표집과 실험계획이 그것이다. 표집을 할 때 무작위로 선택을 하며, 실험을 계획할 때 개별적인 것들을 무작위로 서로 다른 처치집단에 배정한다. 무작위화는 선택과 배정에서 편의를 제거하는 그 이상의 역할을 한다. 무작위화는 확률모델로 나타낼 수 있는 결과에 존재하는 변이성, 즉 우연변이성을 생성한다. 우연변이성을 임의변이성(random variation)으로 명명하기도 한다(Torok & Watson, 2000, p.152). 어떤 것의 확률은 기본적인 과정이 계속적으로 되풀이 될 때 일어날 것이라 기대할 수 있는 정도를 말하는 것이다. 확률 이론은 동전을 한번 던지는 것과 관련해서는 많은 정보를 제공해주지 못한다. 확률은 동전 던지기에서와 같이 장기간의 경향(long-run behavior)에서 나타나는 결과를 예측한다. 확률은 무작위를 통해 얻은 하나의 표본으로부터의 결과에 대해서는 거의 말해주는 것이 없다. 대신 표집 과정을 여러 번 반복했을 때 표집들에서 기대

할 수 있는 변이성을 나타낸다. 확률은 무작위 배정으로 행해진 한 번의 실험에서 얻은 결과에 대해서는 거의 말해주는 것이 없다. 대신 실험을 여러 번 되풀이 했을 때 결과에서 기대할 수 있는 변이성을 나타낸다. 무작위가 존재할 때 통계학자들은 관찰된 결과가 우연 때문인지 아니면 그 밖의 다른 어떤 요인의 영향 때문인지 알고자 한다. 이것이 통계적 유의성에 근거한 판단의 의미이다.

VI. 문제해결과 변이성

통계가 수학과 다른 것은 바로 자료 안의 변이성에 초점을 맞추기 때문으로, 통계적 문제해결 결과 의사결정은 자료 안의 변이성을 어떻게 이해하고, 설명하고, 양화하느냐에 달려있다(Franklin & Garfield, 2006, p.346). 변이성에 대한 선행 연구들(Bakker, 2004; Ben-Zvi, 2004; Ben-Zvi & Sharett-Amir, 2005; Hammerman & Rubin, 2004; Pfannkuch & Wild, 2004; Reading, 2004; Reading & Reid, 2004; Reading & Reid, 2005; Reading & Reid, 2006; Wild & Pfannkuch, 1999)을 살펴보면 변이성에 대한 추론은 통계적 조사 과정의 모든 단계에서 내적으로 연결되어 나타남을 알 수 있다.

1. 문제해결 수준과 변이성

Franklin 외(2007, pp.11-12)는 통계적 문제해결 과정을 문제의 형식화, 자료의 수집, 자료의 분석, 결과의 해석 4단계로 구분하고, 각 단계에서 이루어질 수 있는 활동을 3수준(수준 A, 수준 B, 수준 C)으로 나누어 제시하고 있다. 또한 각 수준별로 학생들이 경험해야 할 변이성으로 적절한 것을 변이성의 특성에 따라 구분하고 있

<표 VI-1> 문제해결과 변이성

과정 요소	수준 A	수준 B	수준 C
변이성의 특성	<ul style="list-style-type: none"> · 측정변이성 · 고유변이성 · 유도변이성 	<ul style="list-style-type: none"> · 표집변이성 	<ul style="list-style-type: none"> · 우연변이성
문제의 형식화	<ul style="list-style-type: none"> · 통계적 문제와 비통계적 문제를 구별하기 시작함 · 교사가 흥미있는 문제를 제시 · 학급에 제한된 문제 	<ul style="list-style-type: none"> · 통계적 문제와 비통계적 문제를 좀더 잘 구별함 · 학생들이 스스로 관심있는 문제를 제시하기 시작 · 학급의 범위를 벗어나는 문제 	<ul style="list-style-type: none"> · 통계적 문제를 구별하는데 익숙함 · 학생들이 스스로 관심있는 문제를 제시 · 일반화를 추구하는 문제
자료 수집	<ul style="list-style-type: none"> · 차이 비교를 위한 설계는 다루지 않음 · 학급 구성원 전체를 대상으로 조사 · 간단한 실험 	<ul style="list-style-type: none"> · 차이 비교를 위한 설계를 인식하기 시작함 · 간단한 표본조사 · 무작위 선택을 사용하기 시작 · 비교를 목적으로 실험 · 무작위 배정을 사용하기 시작 	<ul style="list-style-type: none"> · 차이 비교를 위한 설계를 할 수 있음 · 무작위 선택을 이용한 표집설계 · 무작위를 이용한 실험설계
자료 분석	<ul style="list-style-type: none"> · 구체적인 예의 맥락에서 분포의 특정한 성질 사용함 · 하나의 그룹 내에 있는 변이성 표현하기 · 개별 대 개별 비교하기 · 개별 대 그룹 비교하기 	<ul style="list-style-type: none"> · 분석을 위해 분포의 특정한 성질의 사용법을 배움 · 하나의 그룹 내에 있는 변이성 양화하기 · 표현된 그룹 대 그룹 비교하기 · 표집오차 인정하기 · 연결성에 대한 어느 정도의 양화; 간단한 연결성을 모델 	<ul style="list-style-type: none"> · 분석을 위해 총체적 개념으로서 분포를 이해하고 사용함 · 하나의 그룹 내에 있는 측정 변이성 · 그룹 사이의 측정변이성 · 표현과 변이성의 측정치를 사용하여 그룹 대 그룹 비교하기 · 표집오차를 기술하고 양화하기 · 연결성의 양화; 연결성 모델 조정하기
결과 해석	<ul style="list-style-type: none"> · 자료 이상을 조사하지 않음 · 학급을 넘어서 일반화하지 않음 · 서로 다른 조건의 두 개체 사이의 차이에 주목하기 · 표현을 통해 연결성 관찰하기 	<ul style="list-style-type: none"> · 자료 이상을 조사하는 것에 대한 가능성 인정하기 · 표본이 모집단을 대표할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있음을 인정하기 · 서로 다른 조건의 두 그룹 사이의 차이에 주목하기 · 관찰연구와 실험연구 사이의 차이 인식하기 · 연결성의 정도 차이에 주목하기 · 연결성 모델에 대한 기본적인 해석 · 연결성과 인과성의 차이 인식하기 	<ul style="list-style-type: none"> · 일부 맥락에서 자료 이상을 조사하기 · 표본에서 모집단으로 일반화하기 · 실험 결과에서 랜덤화의 영향 인식하기 · 관찰연구와 실험연구 사이의 차이 이해하기 · 연결성 정도의 측정치 해석하기 · 연결성 모델 해석하기 · 연결성 연구의 결론과 실험 연구의 결론 구별하기

다. <표 VI-1>은 통계적 문제해결 과정과 수준, 그리고 각 수준에서 어떤 유형의 변이성을 경험하는 것이 적절한지 요약해 놓은 것이다.

이들은 수준 A에서 측정변이성, 고유변이성, 유도변이성을, 수준 B에서 표집변이성을, 수준 C에서 우연변이성을 다룰 것을 제안한다. 측정변이성, 고유변이성, 유도변이성을 핵심적으로 다루는 수준 A에서는 학급에 제한된 문제를 설정하고, 조사 대상을 학급 구성원 전체로 제한하는 활동이 주로 이루어지지만 표집변이성을 핵심적으로 다루는 수준 B에서는 학급의 범위를 벗어나는 문제를 설정함으로써 간단한 표본 조사를 실시하는 활동을 하게 된다. 그래서 표본의 크기를 결정하거나 표본의 결과를 통해 모집단의 결과를 예측할 때 표본변이성을 경험하게 된다. 그리고 우연변이성에 초점을 맞추는 수준 C에서는 무작위 선택을 이용한 표집이나 무작위 배정에 의한 실험 설계에 의해 자료를 얻고 이를 분석하고 해석하는 경험을 하게 된다.

2. 문제해결 과정과 변이성

문제의 형식화 단계에서는 변이성을 예측함으로써 통계적 문제를 차별화 시킨다. 통계적 질문을 형식화하기 위해서는 결정론적 정답을 예측하는 질문과 다양한 자료에 기반하여 정답을 예측하는 질문의 차이를 이해할 수 있어야 한다. 예를 들면, “영수의 키는 얼마인가?”라는 질문은 하나의 숫자로 답을 할 수 있다. 이것은 통계적 질문이 아니다. “한국의 중학교 1학년 남학생들의 키는 얼마인가?”라는 질문은 모든 한국의 중학교 1학년 남학생들의 키가 같다면 통계적 질문이 아닐 수도 있다. 그러나 키가 모두 다르다는 사실은 다양한 키의 측정값을 토대로 정답을 예측해야 함을 암시한다. 이

것은 통계적 질문이다. “햇빛이 식물의 성장에 얼마나 영향을 미칠까?”라는 질문을 제기한 사람은 동일한 햇빛에 노출된 동일한 유형의 두 식물의 성장이 일반적으로 같지 않다는 것을 예측해야 한다. 이것은 통계적 질문이다. 변이성의 예측은 통계적 질문과 수학적 질문의 차이를 이해하기 위한 기초가 된다.

변이 추론은 실제 상황에서 변이성을 인식하는 것에서부터 시작하는데, 이것은 자료수집 단계에서 채택하는 기법에 영향을 미친다(Pfannkuch, 2005, p.83). 자료수집 단계에서는 변이성을 인정함으로써 그 차이를 고려하여 설계를 계획한다. 자료수집을 설계하기 위해서 자료 안의 변이성을 인정해야 하며, 자료수집 설계시 대부분 변이성을 줄이고자 노력한다. 예를 들면, 무작위로 자료를 산출함으로써 계획적으로 변이성을 생성하거나 변이성의 알려진 근원을 감소시킨다(Pfannkuch, 2005, p.83). 무작위 표집은 표본과 모집단의 차이를 줄이기 위함이며, 표본 크기는 표집변이성의 효과에 영향을 미친다. 서로 다른 처치에 기인하는 그룹들 사이의 차이를 받아들이기 위해 실험설계를 한다. 그룹들로의 무작위 배정은 실험에서 조작되지 않은 요소들 때문에 발생하는 차이를 줄이기 위함이다. 어떤 실험설계는 피실험자들을 쌍으로 설정하여 초기 조건이 서로 유사한 상태에서 시작한다. 쌍둥이는 종종 의학 실험에서 쌍으로 설정이 되는데, 그래서 관찰된 차이는 피실험자들에 의한 차이라기보다는 처치에 의한 차이로 보는 것이 가능하게 된다. 차이 비교를 위한 자료수집 설계를 이해하는 것은 효과적으로 자료를 수집하기 위해 필요한 요소이다.

자료의 분석 단계에서는 지각된 패턴들을 어떻게 특성화할 수 있는지 결정해야 한다(Pfannkuch, 2005, p.83). 이 때 변이성을 고려하기 위해 분포를 사용한다. 통계 분석의 주요 목적은 자료

안의 변이성을 설명하는 것이다. 선거 조사 결과가 조사한 사람들의 42%가 95%의 신뢰수준에서 $\pm 3\%$ 오차 범위로 특정 후보를 지지한다고 진술했을 때 초점은 표집변이성이다. 여론조사는 모든 유권자들 사이에서 지지정도에 대한 추정치를 제공한다. 오차 범위는 그 표본의 결과(42% $\pm 3\%$)가 그 후보자를 지지하는 모든 유권자들의 정확한 비율과 얼마나 다를 수 있는가를 나타낸다. 신뢰구간은 이 방법으로 산출된 추정치가 얼마나 자주 이와 같은 정확한 결과를 산출하는지에 대해 말해준다. 이러한 분석은 반복적인 무작위 표집을 통해 얻어진 추정치들의 분포에 기초한다. 시험 점수가 평균 450, 표준편차 100으로 정규적으로 분포되어있다고 기술할 때, 초점은 점수가 평균과 얼마나 차이가 나는가이다. 정규 분포는 점수에 대한 종모양의 패턴을 기술하며, 표준편차는 평균으로부터 점수의 변이 정도를 나타낸다. 분포를 이용해 변이를 설명하는 것은 자료 분석에서 중요한 아이디어이다.

결과의 해석 단계에서는 지각된 패턴에 어떠한 대응을 취해야 하는지 결정해야 하며 (Pfannkuch, 2005, p.83), 또한 필요에 따라 변이를 고려하면서 자료 이상의 것을 볼 수 있어야 한다. 통계적 해석은 변이성의 존재를 가정하고 이루어지며 변이를 고려하는 것이 중요하다. 유권자 조사 결과는 표본마다 다를 수 있는 추정치로 해석되어야 한다. 조사결과를 유권자 전체로 일반화하는 것은 조사된 유권자들의 표본을 넘어서는 것이며 다른 표본에서의 결과와 다를 수 있다는 가능성을 고려해야 한다. 의학에서 이루어지는 무작위를 이용한 비교 실험의 결과를 해석할 때는 두 종류의 변이성을 모두 고려해야 한다. 즉 서로 다른 개인들은 동일한 처치에 서로 다르게 반응하기 때문에 생길 수 있는 변이성, 그리고 무작위화에 따른 변이성 모두를 고려하여 해석해야 한다. 결과의 일반화

는 실험에 참여한 피실험자들을 통해 얻어진 자료를 넘어서는 것으로 이러한 변이성의 근원을 반영해서 이루어져야 한다.

VII. 맺는말

지금까지 변이성의 근원, 변이성에 대처하는 방식, 변이성의 유형, 변이성 인지 과정, 문제 해결과 변이성 사이의 관계에 대하여 살펴보았다. 이들 각각은 변이 추론의 지도를 위한 지식을 이룬다. 이와 같은 지식을 고려한 변이 추론의 지도 방향을 살펴보면 다음과 같다.

Ko와 Lee(2010), Reading과 Shaughnessy(2004), 그리고 Ben-Zvi(2004)의 연구는 변이성의 근원을 조사하는 것이 통계적 사고에서 어떠한 의미를 지니는지 보여준다. 특히 Ko와 Lee(2010)의 연구에서 9개의 측정값 중 15.3에 대한 변이성의 근원을 잘못된 측정으로 올바르게 파악한 학생들은 이러한 변이성을 통제하기 위해 평균을 구하는 과정에서 15.3을 제외했으며, 또한 다른 8개의 측정값에 대해서는 고유변이성으로 간주하여 변이성을 수용하는 방식으로 문제를 해결하고 있다. 이것은 자료집합이 생성되는 맥락과의 상호작용을 통해 변이성의 원인을 적절하게 고려하는 것이 올바른 대푯값을 구하는데 있어 중요한 선결조건임을 보여준다. 이는 또한 통계적 활동에서 변이성의 근원과 변이성에 어떻게 대처할 것인지에 대한 토론은 학생들로 하여금 변이성을 인지하도록 하고 이후 통계적 활동에 적극적으로 참여하도록 하는 동기부여가 될 수 있음을 시사한다.

초등학생과 중학생을 대상으로 한 Reading과 Shaughnessy(2004)의 연구는 노란 사탕 20개, 빨간 사탕 50개, 파란 사탕 30개가 들어있는 상자로부터 10개의 사탕을 무작위로 꺼내는 확률

상황에서 수학적 확률에 초점을 맞추는 것이 아니라 그 가능한 범위에 초점을 맞추므로써 모집단의 분포뿐만 아니라 우연도 표본집단의 결과에 영향을 미친다는 것을 인식하도록 하고 있는데, 이는 학생들이 우연변이성과 표집변이성을 경험할 수 있도록 해주는 좋은 첫걸음이 된다. 그러나 우리나라 교육과정에서는 확률의 지도에 있어서 변이성을 고려하지 않고 수학적 확률만을 강조하고 있는데, 이는 많은 확률통계적 오개념으로 연결될 수 있다(Torok & Watson, 2000).

자료의 표현은 변이성을 인지하기 위한 수단이 된다. 그러나 지금까지 통계교육에서 자료의 표현에 대한 지도는 변이 추론에 주목하지 못하고 대부분 요약 통계치를 계산하는 방법과 절차, 그리고 그래프를 읽고, 그리고, 해석하는 기술적인 측면에만 치우쳐왔다(교육과학기술부, 2008a, 2008b, 2008c). 교육과정에서 다루고 있는 통계 내용 요소들을 변이 추론과 어떻게 연결시켜 지도할 수 있을지에 대한 연구가 필요하다. 예를 들면, 평균과 분산, 표준편차 등을 지도할 때, 그리고 막대그래프, 줄기와 잎그림, 도수분포표, 도수분포다각형, 히스토그램 등을 지도할 때 이들을 변이 추론과 어떻게 연결시킬 수 있을지, 각 학교급에 적절한 접근방법을 모색할 필요가 있다.

Franklin 외(2007)는 학교수학에서 다루는 변이성의 유형을 제시하고, 문제해결에서 변이성이 어떻게 고려되어야 하는지에 대한 연구를 제시하고 있는데, 이는 그 동안 변이성에 주목하지 못했던 교육과정에 다양한 시사점을 안겨 준다. 첫째, 수준 A의 학생들은 측정변이성, 고유변이성, 유도변이성을, 수준 B의 학생들은 표집변이성을, 수준 C의 학생들은 우연변이성을 경험할 것을 제안하고 있는데, 이것은 학생들이 원인을 인지하고 통제하거나 제어하기 쉬운 측정변이성

에서부터 서서히 다양한 종류의 변이성을 경험하기 시작하여, 이후 학생들에게 어려운 것으로 조사된 우연변이성을 경험하는 것이 적절함을 시사한다. 우연변이성은 학생들이 인식하고 이해하는데 있어 많은 어려움을 겪는 것으로, 이것은 이후 확률분포를 학습하고 이해하는데 있어 중요한 요소이다(Reading & Shaughnessy, 2004). 이는 Pfannkuch(2005, p.83)의 언급에서도 나타나는데, 그는 통계 교육이 탐색적 자료분석 접근과 고전적 추정 접근 모두를 포함할 수 있는 방향으로 개선되어야 할 필요가 있음을 지적하면서 이를 위해 학생들의 변이 추론에 주목하는 것이 중요하다고 주장한다. 이때 주목해야 하는 것이 바로 표집변이성과 우연변이성이다. 둘째, 지금까지 내용요소에 따라 통계교육과정의 배열이 이루어졌는데, 이것이 통계적 사고 교육을 위해 바람직한 방법인지에 대한 반성의 필요성을 시사한다. 이들의 연구는 또한 후속 연구를 위한 시사점도 함께 제시한다. 이들은 통계적 문제해결 단계를 문제의 형식화, 자료의 수집, 자료의 분석, 결과의 해석 4단계로 구분하고 각 단계에서 변이 추론이 어떻게 기여하고 발달할 수 있는지 기술하고 있는데, 많은 연구자들(Sharma, 2007; Torok & Watson, 2000; Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A., & Shaughnessy, 2003)은 주사위, 동전, 스피너 등을 이용한 확률 상황에서도 변이 추론이 중요함을 주장한다. 따라서 확률 상황과 관련된 변이성의 유형과 어떠한 요소들이 변이 추론의 개발을 위해 고려되어야 하는지 등에 대한 연구가 이루어져 그 결과가 교육과정 개선에 함께 반영될 필요가 있다.

앞서 살펴본 많은 연구에서 주장하듯이, 변이 추론의 지도를 위한 지식을 바탕으로 통계 영역의 내용을 다룬다면 통계적 사고력을 함양할 수 있을 것이다. 따라서 우리나라 통계 영역에서는 어떠한 유형의 변이성이 어떠한 방식으

로 다루어지고 있는지, 개선 사항은 무엇인지 살펴볼 필요가 있다. 그리고 이 연구에서 살펴본 지식에 비추어 우리나라 통계 영역의 내용 요소와 전개 방식을 분석한다면 교육과정 개선을 위한 시사점을 도출할 수 있다. 또한 통계 영역의 지도 장면에 대한 세부 분석들로 활용할 수도 있다. 이와 같은 후속연구를 통해 변이 추론의 지도 이론을 발전시킬 필요가 있다.

참고문헌

- 교육과학기술부(2008a). 초등학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 실과 -. 서울: 대한교과서 주식회사.
- 교육과학기술부(2008b). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술·가정 -. 서울: 대한교과서 주식회사.
- 교육과학기술부(2008c). 고등학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학 -. 서울: 대한교과서 주식회사.
- 김선희·이중희(2003). 통계 자료의 정리와 표현에서 중학생들의 기호화와 해석화 과정 분석. **수학교육학연구**, 13(4), 463-483.
- 김영미·박영희(2006). 초등학교 5학년 학생의 통계적 변이성 개념의 이해와 그 지도에 관한 연구. **수학교육학연구**, 16(3), 221-249.
- 박영희(2001). 통계 영역에서 대푯값의 의미와 지도에 관한 고찰. **학교수학**, 3(2), 281-294.
- 송선아·이경화(2007). 중학교 3학년 학생들의 변이성 이해에 대한 사례 연구. **학교수학**, 9(1), 29-44.
- 우정호(2000). 통계교육의 개선방향 탐색. **학교수학**, 2(1), 1-27.
- 이영하·최지안(2008). 중학교 1학년 통계단원에 나타난 분포개념에 관한 분석. **수학교육학연구**, 18(3), 407-434.
- 이영하·히지영(2010). 분포 개념의 연계성 목표 관점에 따른 중학교 확률 단원 분석. **수학교육학연구**, 20(2), 163-183.
- 황현미·방정숙(2007). 초등학교 6학년 학생들의 그래프 이해 능력 실태 조사. **학교수학**, 9(1), 45-64.
- Bakker, A. (2004). Reasoning about shape as a pattern in variability. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 64-83.
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp.147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ballman, K. (1997). Greater emphasis on variation in an introductory statistics course. *Journal of Statistics Education*, 5(2).
- Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 42-63.
- Ben-Zvi, D. & Sharett-Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions? In K. Makar (Ed.), *Reasoning about Distribution: A collection of studies. Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL-4)*, Auckland, 2-7 July 2005, [CD-ROM, with video segments]. Brisbane, Australia: University of Queensland.
- Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes: Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? In J. Garfield(Ed.),

- Proceedings of the Fourth International Conference On Teaching Statistics(ICOTS 4)*, Marrakech, Morocco: University of Minnesota.
- Burrill, G. F. & Elliott, P. C. (2006). *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eight yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cobb, P. A. (1999). Individual and collective mathematics development: The case of statistical data analysis. *Mathematical thinking and learning*, 1(1), 5-43.
- Cooper, L. L. & Shore, F. S. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*, 18(2), 1-16.
- Franklin, C. A. & Garfield, J. B. (2006). The GAISE project: Developing statistics education guidelines for grades Pre-K-12 and college courses. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eight yearbook* (pp.345-375). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J. Peck, R. Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report Pre-K-12*. Alexandria, VA: American Statistical Association. [Online:http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK12_Intro.pdf]
- Garfield, J. B. & Gal, I. (1999). Assessment and statistics education: Current challenges and directions. *International Statistical Review*, 67(1), 1-12.
- Gould, R. (2004). Variability: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 7-16.
- Hammerman, J., & Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tools. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 17-41.
- Ko, E.-S. & Lee, K.-H. (2010). Are mathematically talented elementary students also talented in statistics?. In B. Sriraman & K.-H. Lee, *The elements of creativity and giftedness in mathematics*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Ma, L. (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. (신현용, 승영조 공역). 서울: 승산(영어 원작은 1999년 출판).
- Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants* (pp. 95-137). Washington, DC: National Academy Press.
- Pfannkuch, M. (2005). Thinking tools and variation. *Statistics Education Research Journal*, 4(1). 83-91.
- Pfannkuch, M. & Wild, C. J. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp.17-46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Reading, C. (2004). Student description of variation while working with weather data. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 84-105.
- Reading, C. & Reid, J. (2004). *Consideration of variation: A model for curriculum development*, paper presented at the IASE 2004 Roundtable 27 June - 3 July in Lund, Sweden. [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/2.3_Reading_&Reid.pdf]
- Reading, C. & Reid, J. (2005). Reasoning about

- variation: A key to unlocking the mastery of distributions. Reasoning about variation: A key to unlocking the mystery of distributions. In K. Makar (Ed.), *Reasoning about Distribution: A collection of current research studies. Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL-4)*, Auckland, 2-7 July 2005, [CD-ROM, with video segments]. Brisbane, Australia: University of Queensland.
- Reading, C. & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 46-68.
- Reading, C. & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp.201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sharma, S. (2007). Exploring pre-service teachers' understanding of statistical variation: Implications for teaching and research. *Australian Senior Mathematics Journal*, 21(2), 31-43.
- Stigler, S. M. (2002). 통계학의 역사. (조재근 역). 서울: 한길사. (영어 원작은 1986년 출판)
- Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American Statistician*, 44(2), 116-121.
- Torok, R. & Watson, J. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 147-169.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A., & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(1), 1-29.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10-26.
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

A Study on Knowledge for the Teaching of Variability and Reasoning about Variation

Ko, Eun-Sung (Graduate school of Seoul National University)

Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

Researchers have suggested that educators have to focus their attention on variability and reasoning about variation as means of developing students' statistical thinking in school mathematics. This paper investigated knowledge for the teaching of variability and reasoning about variation; what are sources of variability, how to cope with variability, what are types of variability, how to recognize variability, and the relationship between statistical problem solving and variability. The results involve: discussion on the sources of variability and how to cope with variability promotes students' awareness of different types of variability and students' motivation in the following steps in the statistical activity; emphasis on reasoning about variation in teaching representation of data accords with objectives of statistics education; reexamination of curriculum for statistics education is needed, which has a content-oriented arrangement.

* **Key Words** : statistical reasoning(통계적 추론), variability(변이성), variation(변이), reasoning about variation(변이 추론)

논문 접수 : 2010. 10. 10

논문 수정 : 2010. 11. 02

심사 완료 : 2010. 11. 09