

특별직교이방성 적층판이론에 의한 콘크리트 슬래브교량의 간편해석법 Simple Method of Analysis for Concrete Slab Bridges by the Specially Orthotropic Laminates Theory

한 봉 구 Han, Bong-Koo*[†] · 석 준 호 Suck, Jun-Ho**

(Received April 2, 2010 ; Revised May 3, 2010 ; Accepted June 4, 2010)

ABSTRACT

The simple supported reinforced concrete slab bridges are analyzed by the specially orthotropic laminates theory. This method, however, may be too difficult for some practising engineers. In this paper, the result of analysis for such plate by means of the beam theory with unit width is reported. By using the "correction factor", the accurate solution for the plate can be obtained by the beam theory. By using the "correction factor", the accurate solution for the plate can be obtained by the beam theory. The plate aspect ratio considered is from 1 : 1 to 1 : 6. The result of this paper can be used for simply supported slab bridges analysis.

요 지

단순지지된 슬래브교량의 경우 특별직교이방성 판이론에 의하여 해석하였다. 이 방법은 일반 기술자들에게는 너무 어려워 현장에서 기술자들이 실무적으로 접근하기에는 많은 어려움이 있다. 본 연구에서는 일반 현장의 실무 기술자들이 사용할 수 있는 보 이론을 사용하여 단순지지된 콘크리트 슬래브를 단위 폭을 가진 보로 해석이 가능하도록 수정계수를 만들어서 실무에 적용할 때의 사용 가능한 자료를 만들고자 하였다. 본 연구에서는 1 : 1 ~ 1 : 6 까지 형상비를 변화 시켜가며 해석을 수행하였다. 본 논문의 연구의 결과는 단순지지된 슬래브교량의 해석에 이용할 수 있다.

Key Words: slab bridge(슬래브교량), specially orthotropic(특별직교이방성), correction factor(수정계수), aspect ratio(형상비)

1. 서 론

오늘날 토목, 건축, 기계, 조선, 항공 등의 분야에서 콘크리트, 강재, 알루미늄 및 그의 합금 등이 주된 소재로 이용되고 있고, 근래에는 재료 및 금속 화학 공학의 눈부신 발달로 각종 구조용 신소재들이 많이 개발되고 있다. 토목, 건축 분야의 건설에는 주로 콘크리트 및 강재 등이 구조용 재료로 사용되어져 왔다. 그러나 최근 산업이 발전함에 따라 구조물이 대형화되고, 중량과 부식, 내구성 문제 및 경과 년수의 증가로 인한 유지 보수가 중요한 문제로 대두됨에 따라 신소재인 복합재료를 건설에 응용하기 위한 노력들이 활발하게 진행되어 왔다. 콘크리트 슬래브 교량을 3차원 복합재료 구조로 취급하여 해석하면 보다 정확한 해석이 가능하지만 실무에 있는 설계자들에게는 거의 불가능한 일이라 할 수 있다. 기술자들이 슬래브 교량 상판을 단위 폭을 가진 1방향 보로 해석하면 문제는 보다 쉬워진다.

콘크리트 슬래브 교량은 철근과 콘크리트라는 서로 다른 강성을 지닌 재료로 이루어진 복합적층판으로 고려되

어야 한다. 그 중 복철근으로 배근된 콘크리트 슬래브교량은 각각의 층이 대칭으로 구성되어 있는 $[0^0/90^0/0^0]_r$ 형태의 특별직교이방성 판과 동일하게 거동한다 (Ashton 1970, Whitney 1970, Kim & Han 2001, Han & Kim 2001, 2004).

본 연구에서는 복합재료 이론에 의하여 강성을 구한 후 보 이론을 사용하여 단순 지지된 콘크리트 슬래브교량을 단위 폭을 가진 보로 취급하여 처짐을 구한 후 단순 지지된 판에서 보다 정확한 처짐 값을 주는 Navier Solution에 의하여 구한 처짐 값과 비교하여 그 차이 값을 수정계수로 만들어 설계자들이 실무에서 쉽게 사용할 수 있도록 하는데 목적이 있다.

2. 기본 이론

2.1 콘크리트 슬래브 교량 강성 계산

일반적인 구조부재의 강성(stiffnesses)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

* 정희원, 서울산업대학교 건설공학부 교수, 교신저자(bkhan@snut.ac.kr)

** 정희원, 서울산업대학교 구조공학과 석사과정

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\overline{Q_{ij}})_k (h_k - h_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\overline{Q_{ij}})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\overline{Q_{ij}})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)
 \end{aligned} \tag{1}$$

위의 강성 항 중에서 특별직교이방성 판의 경우는 $B_{ij}=0, (i,j)=1,2,6$ 항이 0 이 되므로 오직 횡강성의 항인 $D_{11}, D_{22}, D_{12} = D_{21}$, 그리고 D_{66} 만이 존재하게 된다. 여기서, 조합된 힘-연계강성 D_{11} 값을 찾아 보 이론에 적용하고 복합적층판 이론의 강성의 값은 전체의 힘-연계강성 값을 사용한다.

식 (1)에서 변환된 축소된 강성계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \overline{Q_{11}} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\
 \overline{Q_{12}} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) = Q_{21} \\
 \overline{Q_{22}} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\
 \overline{Q_{66}} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2
 \end{aligned} \tag{2}$$

m 과 n 은 방향여현이고 특별직교이방성인 경우이다.

$$m = \cos 0^\circ = 1 \text{ and } n = \cos 90^\circ = 0,$$

$$\overline{Q_{11}} = Q_{11}, \overline{Q_{12}} = Q_{12}, \overline{Q_{22}} = Q_{22}, \text{ and } \overline{Q_{66}} = Q_{66}$$

식 (2)의 축소된 강성계수는 식 (3)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \nu_{12}/E_1 &= \nu_{21}/E_2, \\
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_m V_m + E_f V_f, \\
 E_2 &= \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \\
 G_{12} &= \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f}, \\
 \nu_{12} &= \nu_m V_m + \nu_f V_f \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

슬래브는 종방향 철근이 배근된 층(Lamina), 횡방향 철근이 배근된 층(Lamina), 콘크리트 피복두께 및 중간층

(Isotropic Lamina)의 적층판(Laminate)으로 고려하고 각 층은 Lamina, 슬래브는 Laminate로 취급하고 혼합법칙을 적용하여 Lamina의 재료상수를 계산한다.

2.2 복합적층판 이론에 의한 모델링

단순지지된 콘크리트 슬래브교량을 Fig. 1에서 Fig. 3과 같이 모델링 하였다.

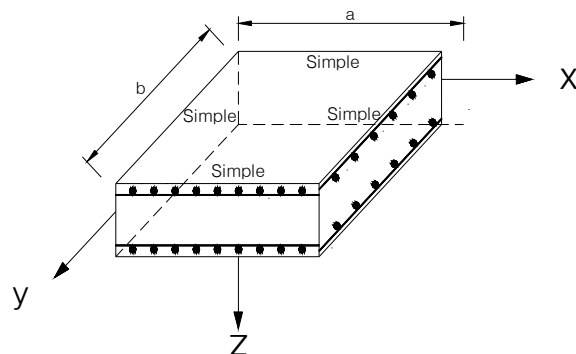


Fig. 1 단순지지된 콘크리트 슬래브교량

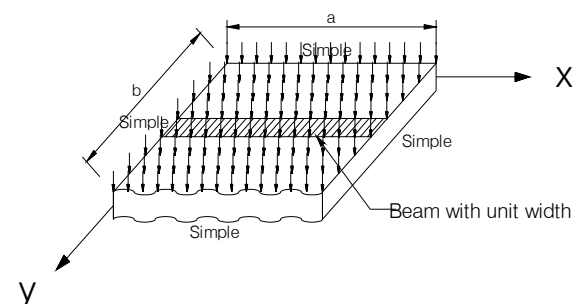


Fig. 2 단순지지된 콘크리트 슬래브교량에서의 단위 폭을 가진 보 요소

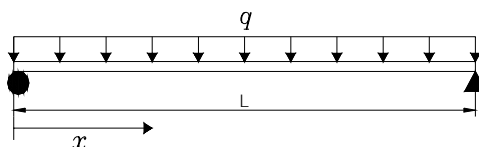


Fig. 3 단위 폭을 가진 보 요소의 자유물체도

Fig. 3에서

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI}, \text{ 이 때 } EI = D_{11} \text{ 이라 하면}$$

$$D_{11} \frac{d^3 y}{dx^3} = qx + C_1$$

$$D_{11} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2$$

$$D_{11} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}C_1x + C_2x + C_3$$

$$D_{11}y = \frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x + C_3x + C_4$$

(1) 초기 경계 조건 $x = 0, M = 0$
 $\therefore C_2 = 0$

(2) 초기 경계 조건 $x = l, M = 0$
 $\frac{1}{2}ql^2 + C_1l = 0$
 $\therefore C_1 = -\frac{1}{2}ql$

(3) 초기 경계 조건 $x = 0, y = 0$
 $\therefore C_4 = 0$

(4) 초기 경계 조건 $x = l, y = 0$
 $\frac{1}{24}q l^4 + \frac{1}{6}C_1 l^3 + C_3 l = 0$
 $\frac{1}{24}q l^4 - \frac{1}{12}q l^3 + C_3 l = 0$
 $\therefore C_3 = \frac{1}{12}q l^3 - \frac{1}{24}q l^3 = \frac{1}{24}q l^3$

C_1, C_2, C_3, C_4 를 대입하면

$$D_{11}y = \frac{1}{24}q x^4 - \frac{1}{12}qlx^3 + \frac{1}{24}ql^3x$$

그러므로 y 는

$$y = \frac{q l^4}{24D_{11}} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right) \right] \quad (4)$$

와 같다.

2.3 특별직교이방성 복합적층판의 지배방정식

표면에 전단응력이 존재하지 않고 열이나 습열의 영향을 무시한 경우의 복합적층판의 지배방정식은 다음의 식으로 나타낼 수 있다 (Tsai 1988, Vison 1987).

$$\partial^2 \frac{M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x,y) \quad (5)$$

특별직교이방성 적층판의 경우 $B_{ij} = 0, A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ 이 되므로 이에 대한 구성 방정식은 식 (5), 식 (6) ~ 식 (8) 과 같다.

$$M_x = D_{11}x_x + D_{12}x_y \quad (6)$$

$$M_y = D_{12}x_x + D_{22}x_y \quad (7)$$

$$M_{xy} = 2D_{66}x_{xy} \quad (8)$$

횡방향 전단 변형률이 무시될 경우,

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

식 (9) ~ 식 (11)를 식 (5)에 대입하면 최종적으로 다음 식 (12) 를 얻을 수 있다.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x,y) \quad (12)$$

식(12)에서 $D_1 = D_{11}, D_2 = D_{22}$ 그리고 $D_3 = (D_{12} + 2D_{66})$ 로 정의하면 다음 식 (13)과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x,y) \quad (13)$$

2.4 단순지지된 복합적층판의 처짐

판의 네 변에 대한 경계조건이 단순지지인 경우 Navier의 해석 방법이 매우 효과적으로 적용될 수 있다 (Kim 1995). 즉, 경계조건을 만족시키는 횡처짐, $w(x,y)$ 와 재하 된 횡하중 $q(x,y)$ 는 다음 식 (14) 과 식 (15) 와 같이 Fourier 급수로 나타낼 수 있다.

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (14)$$

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (15)$$

그러므로 식 (14)과 식 (15)를 식 (13)에 대입하면 주어진 m, n 에 대하여 다음 식 (16)을 얻을 수 있다.

$$\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (D_1(\frac{m}{a})^4 + 2D_3(\frac{m}{a})^2(\frac{n}{b})^2 + D_2(\frac{n}{b})^4) \times \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b}) \quad (16)$$

식 (16)에서 양변의 각 항을 비교하여 정리하면 다음 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$w_{mn} = \frac{(\frac{q_{mn}}{\pi^4})}{D_1(\frac{m}{a})^4 + 2D_3(\frac{m}{a})^2(\frac{n}{b})^2 + D_2(\frac{n}{b})^4} \quad (17)$$

식 (17)의 우변에 있는 하중의 진폭, q_{mn} 은 Fourier 급수로 전개하여 다음 식을 얻는다.

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y)\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})dydx \quad (18)$$

그러므로 m,n 에 대한 q_{mn} 은 주어진 하중 $q(x,y)$ 에 대하여 식(18)를 적분하면 구할 수 있다. 단순지지된 특별직교이방성 복합적층판의 임의 점에서 횡치짐은 식 (14)와 식 (17)을 이용하여 계산할 수 있다. 본 연구에서는 두 가지의 하중 조건, 등분포하중과 집중하중에 대하여 실제로 적용하여 보았다.

첫째로 하중 $q(x,y)$ 가 전단면에 걸쳐 등분포하중 q_0 로 재하되는 경우를 고려하면 다음 식 (19)을 얻을 수 있다.

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})dydx = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (19)$$

그러므로 식 (14)에 식 (19)를 대입하면 등분포하중 q_0 가 전단면에 재하된 경우의 처짐 $w(x,y)$ 는 다음 식 (20)이 된다.

$$w(x,y) = \frac{16q_0}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{mn} \times \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})/DEN \quad (20)$$

여기서

$$DEN = D_1(m/a)^4 + 2D_3(m/a)^2(n/b)^2 + D_2(n/b)^4 \text{이다.}$$

3. 수치해석

본 연구에서는 Fig. 4와 같은 단순지지된 콘크리트 슬래브의 단면을 사용하였으며, 콘크리트 슬래브의 특성값은 다음과 같다.

콘크리트 설계기준강도: $f_{ck} = 20.59 \text{ MPa}$

주철근: 단위 폭 당 9-D32 배치

배력철근: 단위 폭 당 7-D25 배치

상부철근 피복두께: 30mm

하부철근 피복두께: 30mm

콘크리트 탄성계수: $E_c = 21.317 \text{ GPa}$

철근의 프아송비: $\nu_s = 0.3$

콘크리트의 프아송비: $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.18$

혼합법칙을 적용하여 2.1절에 기술된 복합적층판의 강성에 의하여 슬래브의 휨강성을 구하여 Table 1에 나타내었다.

Table 1 콘크리트 슬래브의 휨강성

휨강성(N·m)	
D11	714,448,636
D12	101,928,384
D22	610,017,203
D66	221,837,601

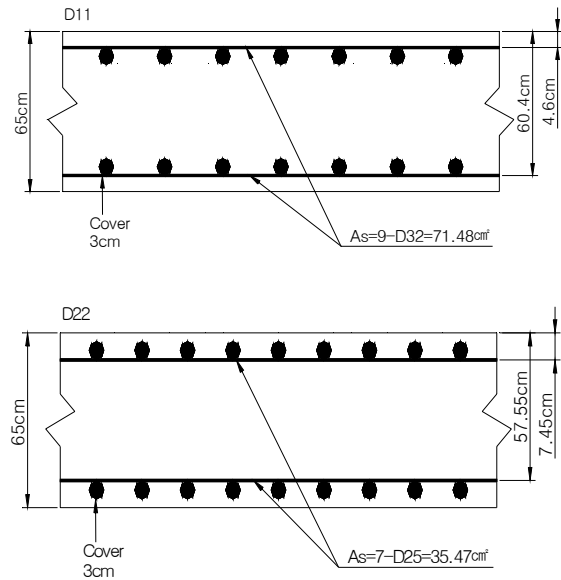


Fig. 4 콘크리트 슬래브의 단면

수치해석에 사용된 경계조건은 4변 단순지지된 경우를 고려하였다.

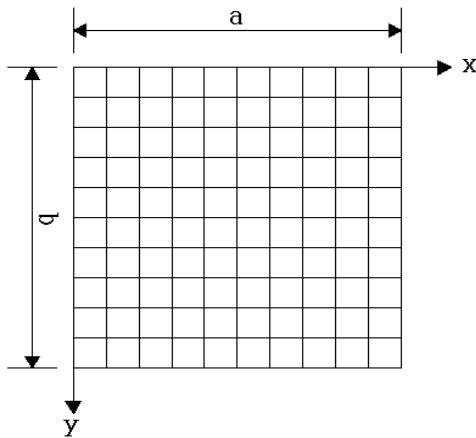


Fig. 5 Mesh의 크기 [(a or b)/10]

Fig. 5 와 같이 요소는 0.3 m 간격으로 형상비 1 : 1 일 경우는 10× 10 분할하였으며, 콘크리트 슬래브 판의 크기는 3 m × 3 m 를 형상비(b/a) 1로 보고 형상비가 6 인 경우까지 고려하였다. Mesh의 크기를 Δ 라 할 때 차분 오차범위는 Δ² 으로서 이러한 경우 Δ 가 1/10 이므로 오차범위는 0.01(Δ²)로 서 공학적으로 충분히 안전하다고 할 수 있다.

수직방향하중조건 : 자중(0.65m× 2.5tonf/m³=1.625tonf/m²)
 전체하중 : 1.625+1.250=2.875tonf/m²≒28.2kN/m²
 을 적용 하여 처짐 해석을 수행하였다.

본 연구에서는 형상비를 x 방향 1 에 대하여 y 방향을 1~6 까지 변화시켜 가면서 처짐 값을 계산하였다.

처짐의 해석을 보 이론에 의하여 수행하고 Navier Solution 에 의하여 계산된 처짐 값과 비교 검토하여 수정계수를 산출하였다.

4. 비교분석 및 고찰

먼저 단순지지된 콘크리트 슬래브 교량의 자중과 등분포 수직하중을 고려하고, 단위 폭을 가진 보에 대한 처짐을 구하였다. 그 후 Navier Solution 의 차분법 방정식을 프로그램화하여 처짐 값을 구한 후 수정계수를 산출하였다. 형상비를 1 ~ 6까지 변화시켜가며 각각의 경우에 맞게 수정계수를 산출하였다.

본 연구에서는 단순지지된 콘크리트 슬래브 교량에 등분포 하중이 작용할 경우 고전적 보 이론에 의한 경우와 Navier Solution 에 의한 경우를 비교 분석하였다.

4.1 보 이론에 의한 처짐 계산

단순지지된 콘크리트 슬래브를 단위 폭을 가진 단순보로 보고 L = 3m 일 경우 단순보의 처짐 공식인 식(4)를 사용하여 x = 0.3m, 0.6m, 0.9m, 1.2m, 1.5m, 1.8m, 2.1m,

2.4m, 2.7m 에서 각각의 처짐은 Fig. 6 과 같다.

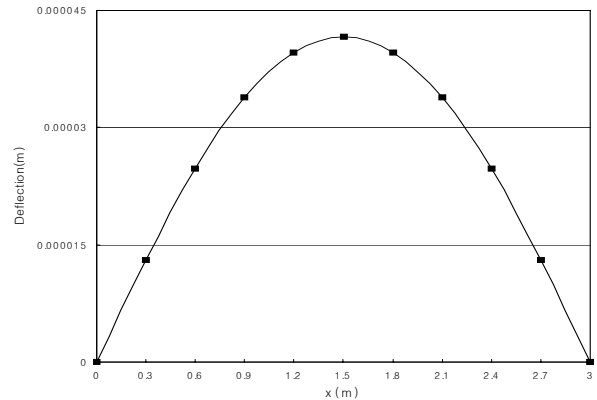


Fig. 6 보 이론에 의한 처짐

4.2 Navier Solution 에 의한 처짐 계산

본 논문에서는 복합적층판 이론으로 Navier Solution에 의해 처짐 값을 구하기 위해서 프로그래밍을 하여 처짐 값을 계산하였다.

4.3 결과 분석 및 고찰

본 논문에서는 보 이론에 의한 처짐 값과 Navier Solution에 의한 처짐 값을 비교하였다. Navier Solution 에 의한 처짐 값을 고전적 보 이론에 의한 처짐 값으로 나눈 값을 수정계수로 정리하여 Fig. 7 ~ 10 와 같이 나타내었다. 각각의 위치에서 보 이론에 의하여 처짐 값을 구한 후에 그 위치의 수정계수를 곱해주면 그 위치에서 실제 처짐을 손쉽게 구할 수 있도록 하였다.

Fig. 7 ~ 10 는 평균수정계수를 나타내는 것으로써 x 축에 대한 경간을 가지고 있는 한 개의 보를 y축 거리만큼 떨어진 위치에서는 어떤 점에서든지 하나의 값을 곱하여 대략적인 처짐을 알 수 있도록 하였다.

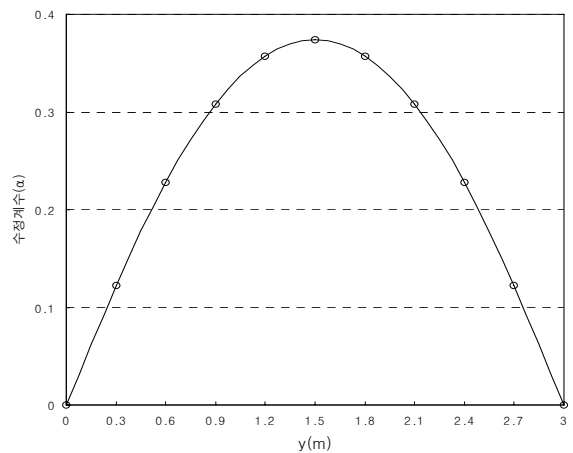


Fig. 7 형상비 1 : 1 일 때 평균수정계수

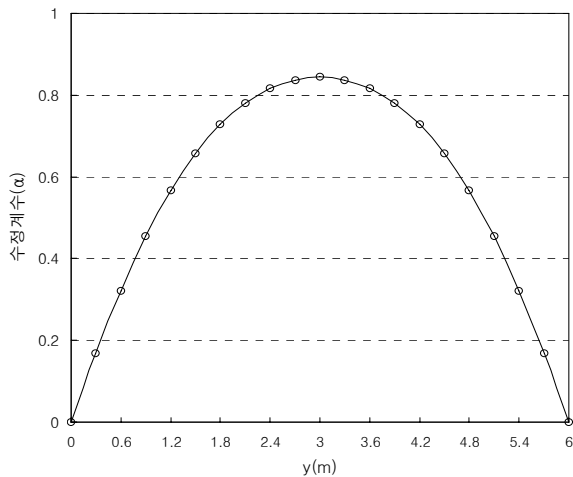


Fig. 8 형상비 1 : 2 일 때 평균수정계수

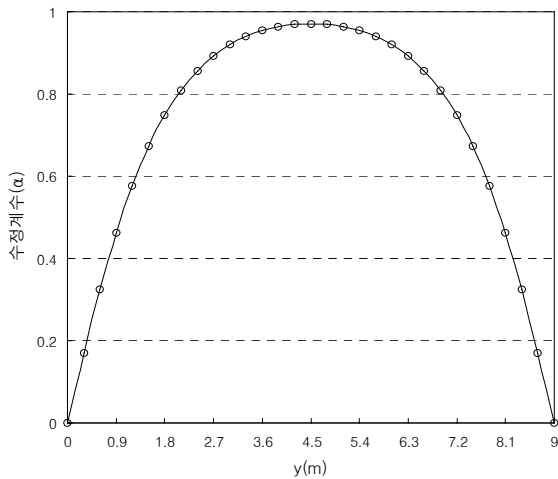


Fig. 9 형상비 1 : 3 일 때 평균수정계수

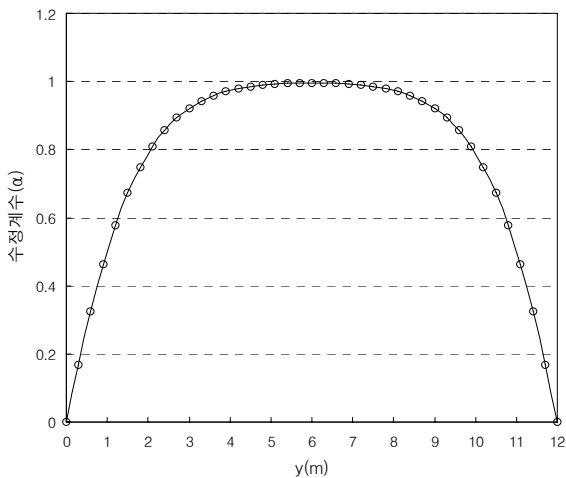


Fig. 10 형상비 1 : 4 일 때 평균수정계수

위의 Fig. 7 ~ 10에서 알 수 있듯이 형상비가 1 : 3 이상 되면 형상비가 증가할수록 평균 수정계수는 거의 유사하며 중앙에서는 평균 수정계수가 거의 1에 수렴한다. 그러므로 중앙에서는 보 이론으로 처짐 값을 계산하여도 무방함을 알 수 있다.

위에 나타난 평균수정계수를 사용하면 보 이론에서 구한 처짐 값으로 단순 지지된 콘크리트 슬래브 교량의 전체적인 처짐을 손쉽게 구할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 콘크리트 슬래브 교량을 복합적층판 이론을 이용하여 정확한 해석을 할 수 있도록 하였으며 해석결과를 이용하여 수정계수를 구하여 이를 실무에서 간편하게 사용할 수 있도록 하였다. 단순지지된 콘크리트 슬래브 교량을 단위 폭을 가진 보로 보고 해석하였으며, 고전적 보 이론에 의한 해석 방법과, Navier Solution에 의한 복합적층판 해석 방법을 비교, 분석하여 수정계수를 제시하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 본 연구에서는 복합적층판 이론을 콘크리트 슬래브 교량에 적용하여 보다 정확한 해석 결과를 얻을 수 있었다.
- (2) 보 이론과 Navier Solution에 의한 해석 결과를 비교 분석해본 결과 형상비가 커질수록 수정계수는 거의 일정 하였으며, 중앙부에서는 보 이론으로 처짐을 구하여도 무방함을 알 수 있었다.
- (3) 본 연구에서 제시한 수정계수를 응용하면 실무에서 보다 간편하게 콘크리트 슬래브 교량을 해석할 수 있다.
- (4) 기존의 콘크리트 슬래브 교량 구조물을 유지 및 보수, 보강 분야의 실무 설계시 적용할 수 있는 매우 유효한 자료를 제시하였다.

참고 문헌

1. Ashton, J.E (1970) Anisotropic Plate Analysis- Boundary Condition, *Journal of Composite Materials*. pp.162-171
2. Kim, D.H. (1995) Composite Structure for Civil and Architectural Engineering, *E & FN SPON*, 1st edition.
3. Kim, D.H.(1998) The Effect of Neglecting the Longitudinal Moment Term on the Natural Frquency of Laminated Plates with Increasing Aspect Ratio, *Proceeding of the Korea Society of Civil Engineering (1)*, pp.59-62.
4. Kim, D.H. and Han, B.K.(2001) The Effect of Neglecting the Longitudinal Moment Terms in Analyzing [90, 0, 90]_r Type Laminates with Increasing Aspect Ratio, *Journal of KSSC*, Vol.13, No.1, pp.53-60
5. Han, B.K. and Kim D.H. (2001) Analysis of steel Bridges by means of Specially Orthotropic Plate Theory, *Journal of KSSC*, Vol.13, No.1, pp.61-69.

6. Han, B.K. and Kim D.H. (2004) Simple Method of Vibration Analysis of Three Span Continuous Reinforced Concrete Bridge with Elastic Intermediate Supports, *Journal of the Korea Society of Composite Materials*, Vol 17 , No.3, pp.23-28
7. Tsai, S. W. (1998) *Composite Design* , 4th Ed., Think Composites, Dayton
8. Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L.(1987) The Behavior of Structures Composed of Composite Materials, *Martinus Nijhoff*, Dordrecht
9. Whitney, J.M. and Leissa, A.W.(1970) Analysis of a Simply Supported Laminated Anisotropic Rectangular Plate, *Journal of AIAA*, Vol.8, No.1 pp. 28-33.