

# 복합적층판의 변위 변동계수 산정을 위한 가중적분법 Weighted Integral Method for an Estimation of Displacement COV of Laminated Composite Plates

노혁천 Noh, Hyuk-Chun\*

(Received April 12, 2010 ; Revised May 3, 2010 ; Accepted June 3, 2010)

## ABSTRACT

In addition to the Young's modulus, the Poisson's ratio is also at the center of attention in the field stochastic finite element analysis since the parameters play an important role in determining structural behavior. Accordingly, the sole effect of this parameter on the response variability is of importance from the perspective of estimation of uncertain response. To this end, a formulation to determine the response variability in laminate composite plates due to the spatial randomness of Poisson's ratio is suggested. The independent contributions of random Poisson's ratio can be captured in terms of sub-matrices which include the effect of the random parameter in the same order, which can be attained by using the Taylor's series expansion about the mean of the parameter. In order to validate the adequacy of the proposed formulation, several example analyses are performed, and then the results are compared with Monte Carlo simulation (MCS). A good agreement between the suggested scheme and MCS is observed showing the adequacy of the scheme.

## 요 지

탄성계수와 함께 포아송비는 구조의 거동을 결정하는 중요 구조인수중의 하나이다. 따라서 구조응답의 불확실성에 미치는 포아송비의 독립적 영향에 대한 평가가 필요하다. 본 연구에서는 포아송비의 불확실성이 복합적층판의 거동에 미치는 영향을 산정하기 위한 정식화를 제안한다. 포아송비의 영향은 동일 차수인 임의인수의 영향을 포함하는 부행렬을 통하여 얻을 수 있으며, 이는 대상 인수의 평균을 중심으로 한 Taylor 전개를 통하여 구할 수 있다. 제안 방법의 검증은 위하여 예제 평판을 해석하였고, 그 결과를 몬테카를로 해석에 의한 결과와 비교하였다. 두 방법을 통하여 얻은 결과는 상화 잘 일치하는 결과를 나타내어, 제안한 방법이 적절함을 제시하였다.

**Key Words:** Spatial randomness(공간적 임의성), Poisson's ratio(포아송비), Coefficient of variation(분산계수), Composite plate(적층평판)

## 1. 서 론

Fiber와 충진재로 구성되는 복합재료는 강도대 무게비가 좋고, 역학적 성능이 우수하여 다수의 공학구조에 적용되어오고 있다. 그러나 생산과정이 일반적 재료에 비하여 복잡하고 서로 다른 재료 사이에 방향성을 가지는 접합 등으로 복합재료의 물성치는 필연적으로 불확실성을 가지게 되며, 일면, 그 정도는 등방성재료에 비하여 클 것으로 예상할 수 있다. 그러므로 일반적인 확정론적해석(deterministic analysis)을 통한 복합재료 구조의 거동 분석에는 높은 불확실성 요소들이 개입되어 있다고 해도 과언이 아닐 것이다. 복합재료의 강도 측면에서 보면, 사용된 fiber의 체적비율에 크게 영향을 받는 것으로 알려져 있다 (Cohen, 2001).

그러므로 복합소재구조의 거동을 확률론적 측면에서 고찰하는 것은 복합재료 구조에 대한 신뢰도 높은 해

석/설계를 위하여 매우 필요한 사항임을 알 수 있다(O nkar et al., 2007). 이를 위하여 복합소재에 개입되어 있는 재료적 및 기하학적 인수들을 고려하고 이들 인수에 나타날 수 있는 불확실성을 확률론적으로 고려한 해석을 필요로 한다. 해석적 측면에서, 적층구조의 자유진동하중(random excitation)에 의한 확률론적 평가는 광범위하게 이루어져왔으나(Nigam, 1994), 재료인수의 공간적 불확실성에 의한 적층구조의 확률론적 거동해석은 매우 국한되어 있다고 할 수 있다(Singh et al., 2002).

본 연구에서는 복합적층재료의 탄성계수와 상호 연관된 관계를 가지는 포아송비 (Poisson's ratio)의 불확실성에 의한 거동의 응답변화도 산정을 위한 정식화를 제시한다. 구성방정식에 분수형태로 개입되어있는 포아송비의 추계학적 고려를 위하여 선형 Taylor 전개를 적용하고, 계산상의 효율성을 기하기 위하여 기여도가

\* 정회원 · 세종대학교 토목환경공학과 조교수 · 교신저자 (cpebach@sejong.ac.kr)

낮은 고차항은 정식화에서 제외하였다. 추계론적 해석의 영역은 재료부분만이 아니라 기하학적 부분도 포함하고 있으나(Choi and Noh, 2000; Deodatis and Shinozuka, 1989), 본 연구에서는 재료 부분에 국한하고자 한다. 확률변수의 확률분포는 정규분포(Gaussian)로 가정하고 한다. 이는 분산계수가 낮은 경우 큰 오류 없이 적용할 수 있는 가정으로 받아들여지고 있다 (Schuëller, 2007).

## 2. 재료구성관계와 상수의 불확실성

일반적인 구조 재료의 구성관계는 식 (1)의 텐서식으로 나타나며,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

복합적층구조의 (k)-번째 층에 대한 상응한 구성관계식은 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma^{(k)} = Q_{ij}^{(k)} \varepsilon^{(k)} \quad (2)$$

면에 수직한 방향의 응력  $\sigma_3$ 은 없는 것으로 가정하며, 식 (2)에 나타난 구성관계  $Q_{ij}$ 는 양방향의 탄성계수  $E_1, E_2$ 와 이들 탄성계수 및 양방향으로의 포아송비 사이의 관계  $\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i$ , 그리고 전단탄성계수 등을 적용하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}},$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3)$$

본 연구에서 고려하고자 하는 불확실 인수는 포아송비로서 이 인수의 공간적 불확실분포는 공간좌표  $\mathbf{x}$ 의 함수인 추계장함수  $f_\mu(x)$ 와 함께 식 (4)로 표현할 수 있다.

$$\mu_{12}(\mathbf{x}) = \bar{\mu}_{12} \{1 + f_\mu(\mathbf{x})\} \quad (4)$$

여기서  $\bar{\mu}_{12}$ 는 1-2방향 포아송비의 평균값을 나타내며, 추계장함수  $f_\mu(x)$ 는 불확실인수의 평균항에 대한 특성을 나타내야 하므로 개구간 (-1,1)내의 값을 가진다. 그러므로  $\mu_{12}(\mathbf{x})$ 를 식 (3)에 대입하고, 탄성계수와 결함관계인  $\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i$ 의 관계를 적용한 후, 포아송비에 대한 Taylor전개를 수행하면(Noh, 2004), 예를 들어, 식 (3)의 첫 항은 다음과 같이 표현된다.

$$Q_{11} = E_1 \frac{1}{1 - r^2 \mu_{12}^2}$$

$$= E_1 \left[ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1, (2k \geq l)}^{\infty} (r \bar{\mu}_{12})^{2k} {}_{2k} C_l \right\} f_\mu^l \right] \quad (5)$$

여기서,  $r$ 은 복합재료의 두 방향으로의 탄성계수 사이의 관계를 나타내는 상수로서,  $r^2 = E_2/E_1$ 이며, 추계장함수의 상수는 이항정리를 통하여 얻어지는 것으로서 평균포아송비  $\bar{\mu}$ 의 함수로 주어짐을 알 수 있다. 동일한 방식으로 구성관계의 요소들에 대한 표현이 가능하며, 이는 식 (6)과 같다.

$$Q_{22} = E_2 \frac{1}{1 - r^2 \mu_{12}^2}$$

$$= E_2 \left[ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1, (2k \geq l)}^{\infty} (r \bar{\mu}_{12})^{2k} {}_{2k} C_l \right\} f_\mu^l \right]$$

$$Q_{12} = E_2 \frac{\nu_{12}}{1 - r^2 \mu_{12}^2}$$

$$= E_2 \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1, (2k-1 \geq l)}^{\infty} r^{2(k-1)} \bar{\mu}_{12}^{(2k-1)} {}_{2k-1} C_l \right\} f_\mu^l \right] \quad (6)$$

여기서, 무한함으로 표현된 구성관계요소의 식은 이론적인 것으로서, 실제 분산계수의 산정에는 의미를 가지는 것으로 가정할 수 있는 저차항만을 포함하게 되며, 본 연구에서는 4차항까지를 고려한다.

$$Q_{11} \cong E_1 (\beta_0 + \beta_1 f_\mu + \beta_2 f_\mu^2 + \beta_3 f_\mu^3 + \beta_4 f_\mu^4)$$

$$= E_1 \beta_i f_\mu^i$$

$$Q_{22} \cong E_2 (\beta_0 + \beta_1 f_\mu + \beta_2 f_\mu^2 + \beta_3 f_\mu^3 + \beta_4 f_\mu^4)$$

$$= E_2 \beta_i f_\mu^i$$

$$Q_{12} \cong E_2 (\gamma_0 + \gamma_1 f_\mu + \gamma_2 f_\mu^2 + \gamma_3 f_\mu^3 + \gamma_4 f_\mu^4)$$

$$= E_2 \gamma_i f_\mu^i \quad (7)$$

식 (7)은 식 (6)에 나타난 상수항을 각각  $\beta_i$ 와  $\gamma_i$ 로 나타낸 것으로, 여기에 나타낸 두 상수  $\beta_i, \gamma_i$ 의 형태는 식 (6)으로부터 명확하게 제시된다.

### 2.1 좌표변환

적층의 전체좌표계에 대한 방향각이  $\theta$ 일 경우 이에 따라 좌표변환된 구성관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{Q}_{ij} = Q_{ij}(c^n, s^n), \quad c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta \quad (8)$$

식 (8)의 구체적인 형태는 각 요소에 대하여 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \end{aligned} \quad (9)$$

즉 전체좌표계상의 구성관계 요소는 관련된 국부좌표계의 요소로 표현된다. 따라서 식 (7)의 관계를 대입하여 정리하면 전체좌표계에 대한 구성방정식을 나타내는 행렬의 인수들은, 예를 들어  $\bar{Q}_{11}$ 의 경우 식 (10)과 같이 나타난다.

$$\bar{Q}_{11} = \bar{q}_{11(0)} + \bar{q}_{11(1)}f + \bar{q}_{11(2)}f^2 + \bar{q}_{11(3)}f^3 + \bar{q}_{11(4)}f^4 \quad (10)$$

이러한 형태는 구성관계를 나타내는 다른 요소들에 대해서도 유사하게 적용되어 일반적으로 다음과 같이 공통된 형태로 쓸 수 있다:

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{q}_{ij(q)}f^q, \quad q = 0, 1, 2, 3, 4.$$

그러므로 결과적으로 구성행렬  $[\bar{Q}_{ij}]$ 는 다음과 같이 다섯 개 부행렬의 합으로 표현이 가능하다.

$$[\bar{Q}_{ij}] \cong [\bar{q}_{ij(q)}]f^q, \quad q = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (11)$$

### 2.2 신축, 휨 그리고 연성거동

복합적층판의 거동은 신축거동과 휨거동 그리고 이들 사이의 연성(coupling)을 나타내는 항으로 구성되며, 복합재료 분야에서는 이들을 각각  $A, D, B$ 의 기호로 나타내는 것이 일반적이다. 이들은 각각 면내 거동을 나타내는 (k)-번째 적층의 기여를 고려하여 표현할 수 있으며 각 적층의 두께방향 z축에 따른 적분으로 식 (12)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(q)} &= \sum_{k=1}^N \bar{q}_{ij(q)}^{(k)} \delta z^{(k)} \\ B_{ij}^{(q)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{q}_{ij(q)}^{(k)} \delta z^{(k)2} \\ D_{ij}^{(q)} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{q}_{ij(q)}^{(k)} \delta z^{(k)3} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, z축 방향으로 (k)번째 층의 두께는  $\delta z^{(k)} = z_{k+1} - z_k$ 로 표현되며,  $q=1,2,3,4$ 이다. 적층의 전체 수는 N으로 나타내었다. 복합재료 강성의 전체적 표현을 위한 적합식의 행렬표현은 위의  $A, D, B$  행렬과 함께 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \sum_{q=0}^4 \mathbf{A}^{(q)} f_\mu^q & \sum_{l=0}^4 \mathbf{B}^{(q)} f_\mu^q \\ \sum_{l=0}^4 \mathbf{B}^{(q)} f_\mu^q & \sum_{l=0}^4 \mathbf{D}^{(q)} f_\mu^q \end{bmatrix} \quad (13)$$

따라서, 유한요소를 이용한 해석에서는 복합적층판의 강성행렬을 식 (13)의 적합행렬  $\mathbf{E}$ 와 변위-변형률 관계를 나타내는 경사행렬  $\mathbf{B}$ 를 이용하여 구성한다.

## 3. 복합적층판의 응답변화도

### 3.1 요소강성행렬-평균강성행렬, 가감강성행렬

앞 절에서 유도한 (k)-번째 층의 구성관계에 대한 전개식과 신축거동, 휨거동 그리고 이들 사이의 연성에 대한 항을 모두 포함하는 유한요소별 구성관계는 추계장함수를 포함하는 식으로 나타낼 수 있으며, 따라서 다음과 같이 평균항과 변동항의 합으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cong \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)}f_\mu(\mathbf{x}) + \mathbf{E}^{(2)}f_\mu^2(\mathbf{x}) + \mathbf{E}^{(3)}f_\mu^3(\mathbf{x}) + \mathbf{E}^{(4)}f_\mu^4(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{E}_{\text{ave}} + \mathbf{E}^{\text{t}} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서는 각 구성행렬 요소들이 추계장함수  $f_\mu(x)$ 에 대한 Taylor 전개식임을 고려하여, 추계장함수의 차수에 따라 독립적으로 표기하였으며, 구성관계의 확정론적 항은  $\mathbf{E}^{(0)}$ 이다. 추계장함수에 대한 평균은 정규분포확률변수인 경우 홀수차 함수에 대한 평균은 0, 짝수차 함수에 대한 평균은 0이 아닌 값을 가지므로 구성관계에 대한 평균은 확정론적 항과는 다르게 된다. 여기서는 확정론적 항과의 구분을 위하여 평균항을  $\bar{\mathbf{E}}$ 로 표기하기로 한다.

포텐셜 범함수에 대한 최소일의 원리에 의한 유한요소 강성행렬의 적분식에 위의 식을 대입하면 다음 식 (15)와 같이 요소강성행렬의 평균항(mean stiffness)과 가감항(deviator stiffness)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \\ &= \int_{V^e} \mathbf{B}^T (\bar{\mathbf{E}} + \Delta \mathbf{E}) \mathbf{B} dV = \bar{\mathbf{k}}^e + \Delta \mathbf{k}^e \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, 평균 구성행렬인  $\bar{\mathbf{E}}$  는 식 (14)에 나타난 확률론적 구성행렬  $\mathbf{E}_{\text{det}}$  에 추가적인 항이 더해짐에 유의하여야 한다.

3.2 확률변수와 변위벡터에 대한 Taylor 전개 식 (15)의 가감강성행렬은, 변위-변형률행렬을  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_i p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_p$  로 상수행렬로 분해하여 나타낼 경우, 다음과 같이 상수행렬과  $X_{ij}$  의 합으로 나타낸다. 여기서  $X_{ij}$  는 식 (16)에 나타낸 바와 같이 정의되는 확률변수로서, 이를 추계적분 또는 가중적분(stochastic integration 또는 weighted integral)이라고 한다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{k}^e &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}^{(k)} \mathbf{B}_j X_{ij}^{(k)}; \quad k = 1, 2, 3, 4; \\ X_{ij}^{(k)} &= \int_{V^e} f^k(\mathbf{x}) p_i p_j dV^e \end{aligned} \quad (16)$$

본 논문에서 제시하는 정식화의 경우 요소강성행렬이 추계장에 대한 4차 항까지 포함하므로 평균강성행렬은 확률론적 강성행렬과 달리 추가적인 기여를 가지게 된다. 이는 추계장의 2차 항과 4차 항에 대한 평균이 0이 아니기 때문으로, 결과적으로 식 (15)의 평균강성행렬은 식 (17)과 같다.

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} dV = \mathbf{k}_{\text{det}}^e + \bar{\mathbf{k}}^{e(2)} + \bar{\mathbf{k}}^{e(4)} \quad (17)$$

식 (16)에서 알 수 있는 바와 같이 확률변수는 각 유한요소별로  $N_{RV} = 3/2 N_p (N_p + 1)$  개의 확률변수가 존재한다. 변위벡터를 확률변수의 평균인  $\bar{X}_r^e$  를 중심으로 선형 Taylor 전개하고 변위벡터에 대한 미분을 강성행렬에 대한 미분으로 치환하면 다음과 같이 변위에 대한 통계치를 얻을 수 있는 전개식을 얻게 된다.

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}(\bar{\mathbf{X}}) - \bar{\mathbf{K}}^{-1} \sum_e \sum_r^{N_e} (X_r^e - \bar{X}_r^e) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_r^e} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{U}(\bar{\mathbf{X}}) \quad (18)$$

여기서,  $\cdot|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$  는 평균확률변수에서의 연산을 나타

내며,  $\mathbf{U}(\bar{\mathbf{X}})$  는 평균확률변수 조건에서의 변위값,  $\bar{\mathbf{K}}$  는 전체구조에 대한 평균강성행렬을 나타낸다.  $N_e$  는 구조 모델링에 사용된 요소의 수를 의미한다.

### 3.3 응답변화도

식 (18)의 전개식을 이용하여 변위에 대한 평균(mean)과 공분산(covariance)을 산정하는 식을 유도하면 다음과 같다.

$$E[\mathbf{U}] = \mathbf{U}(\bar{\mathbf{X}}) \quad (19)$$

$$\text{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E[\Delta \mathbf{U} \Delta \mathbf{U}^T], \quad \Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - E[\mathbf{U}] \quad (20)$$

평균변위  $\mathbf{U}(\bar{\mathbf{X}})$  는 평균강성행렬을 이용하여  $\mathbf{U}(\bar{\mathbf{X}}) = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}$  로 산정된다. 변위의 공분산인 식 (20)의 구체적인 형태는 아래와 같다. 먼저 평균변위를 중심으로 한 변위의 변화량  $\Delta \mathbf{U}$  는 식 (18), (19)로부터 식 (21)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U} &= -\bar{\mathbf{K}}^{-1} \left[ \sum_{k=1}^4 \left\{ X_r^e \mathbf{K}_{r(e)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}(k)} \right\} - \left\{ \bar{X}_s^e \mathbf{K}_{s(e)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}(2)} \right\} - \left\{ \bar{X}_t^e \mathbf{K}_{t(e)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}(4)} \right\} \right] \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= -C_{RV} + C_{(2)} + C_{(4)} \end{aligned} \quad (21)$$

그러므로 이를 식 (20)에 대입하고 정리하면 공분산은 식 (22)와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U} &= -\bar{\mathbf{K}}^{-1} \left[ \sum_{k=1}^4 \left\{ X_r^e \mathbf{K}_{r(e)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}(k)} \right\} - \left\{ \bar{X}_s^e \mathbf{K}_{s(e)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}(2)} \right\} - \left\{ \bar{X}_t^e \mathbf{K}_{t(e)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}(4)} \right\} \right] \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= -C_{RV} + C_{(2)} + C_{(4)} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서, 식 (22)의 첫 항은 전체 확률변수에 대한 연산으로 식 (23)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} E[C_{RV} C_{RV}^T] &= \bar{\mathbf{K}}^{-1} E \left[ X_r^p \mathbf{K}_{r(pr)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}^T X_s^q \mathbf{K}_{s(qs)} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \right] \bar{\mathbf{K}}^{-T} \\ &= \sum_{i,j}^{N_e} \bar{\mathbf{K}}^{-1} \Phi_{ij} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{K}}^{-T} \\ p, q &= 1, 2, \dots, N_e; \quad r, s = 1, 2, \dots, N_{RV}. \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에서  $\Phi_{ij} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}$  는 하중등가공분산 행렬로서 식

(24)의 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} &= E \left[ \Delta \bar{\mathbf{k}}_i \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}^T \Delta \bar{\mathbf{k}}_j \right] \\ &= E \left[ \left( \sum_{k=1}^4 \Delta \mathbf{k}_i^{(k)} \right) \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}^T \left( \sum_{l=1}^4 \Delta \mathbf{k}_j^{(l)} \right) \right] \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left( E \left[ f^{(k)}(\mathbf{x}_i) f^{(l)}(\mathbf{x}_j) \right] \tilde{\mathbf{k}}_i^{(k)} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}^T \tilde{\mathbf{k}}_j^{(l)} \right) d\Omega_1 d\Omega_2 \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)에서  $\Delta \bar{\mathbf{k}}_i$  는 요소강성행렬  $\Delta \mathbf{k}$  중  $\Delta \mathbf{k}^{(1)} + \Delta \mathbf{k}^{(2)} + \Delta \mathbf{k}^{(3)} + \Delta \mathbf{k}^{(4)}$  를 나타내며,  $\tilde{\mathbf{k}}^{(i)} = \mathbf{B}^T \mathbf{E}^i \mathbf{B}$  이다.

### 4. 해석결과

제안정식화의 검증을 위하여 가로, 세로 50의 크기를 가지는 복합재료 평판에 대한 해석을 수행하였다 (Fig. 1). 양방향으로의 탄성계수는  $E_1 = 1312.5\text{GPa}$ ,  $E_2 = 52.5\text{GPa}$ 이며, 포아송비는  $\mu = 0.25$ 이다. 세 축에 대한 전단탄성계수  $G_{23}, G_{31}, G_{12}$  는 각각  $10.5\text{GPa}$ 로 가정하였다. 작용하중은 상부에 작용하는 등분포하중으로  $1000.0\text{N/m}^2$  를 작용하였다. 하중과 경계조건 등의 대칭성을 고려하여 전체 평판은 1/4만 유한요소로 모델링하였다. 공간적 임의성을 가지는 포아송비의 분산계수(coefficient of variation, COV)는 0.1로, 확률분포는 정규분포(Gaussian distribution)로 가정하였다.

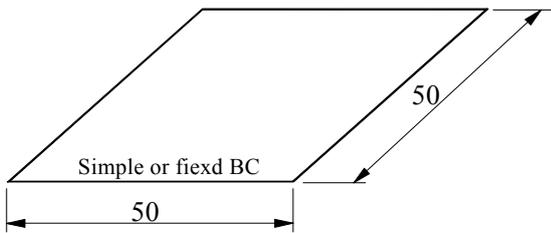


Fig. 1 해석대상 정방형 복합적층판

각 층이 적층된 형태는 직각적층과 각적층으로 구분하였는데, 직각적층의 경우  $(0/90)_4$ 으로, 각적층의 경우  $(\theta/-\theta)_4$ 으로 구성하였다. 여기서, 아래첨자 4는 적층쌍의 수이며, 따라서 전체 적층의 수는 8이 된다. 평면에 수직한 방향으로의 적층은 상기한 적층이 그대로 나타낼 형태를 취하며, 따라서 단면중심축에 대해서는 비대칭 적층으로 구성된다. 적층각  $\theta$ 는 30도로 설정하였다. 각적층의 적층각  $\theta$ 는 적층판의 분산계수에 영향을 미치나, 그 영향도가 적어 본 논문에서는 따로 언급하지는 않고자 한다.

제안한 정식화에 의한 결과의 검증을 위하여 몬테카

를로 해석(MCS)을 동시에 수행하였다. 이를 위하여 정규분포 추계장을 생성하였고, 전체 11,520개의 표본에 대한 해석을 수행하고 그 결과에 대한 통계처리과정을 통하여 응답의 확률적 특성치들을 얻고 이를 제안 정식화에 의한 결과와 비교하였다.

제안방법과 몬테카를로 해석에서 공히 사용한 자기상관함수는 식 (25)와 같이 지수함수의 형태를 사용하였다.

$$R(\xi) = \sigma_{\mu\mu}^2 \exp \left\{ - \frac{|\xi_x| + |\xi_y|}{d} \right\} \quad (25)$$

식 (25)에서  $\sigma_{\mu\mu}^2$  는 포아송비의 분산을 나타내며, 자기상관함수는 상대거리벡터  $(\xi_x, \xi_y)$ 와 상관관계거리 (correlation distance)  $d$ 의 함수임을 알 수 있다.

#### 4.1 몬테카를로 해석과의 비교: 중앙점변위의 분산계수

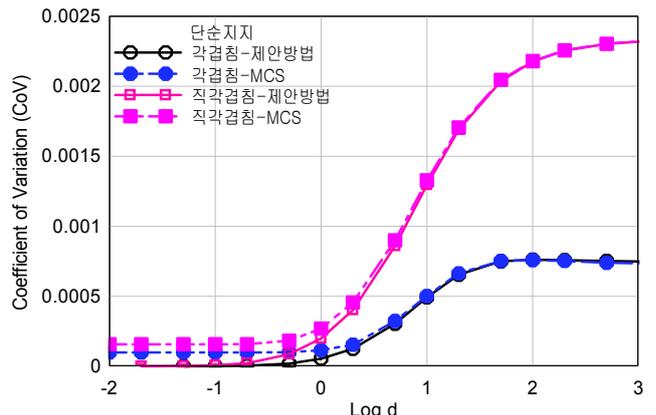


Fig. 2 단순지지 복합적층판의 중앙점변위의 응답변화도

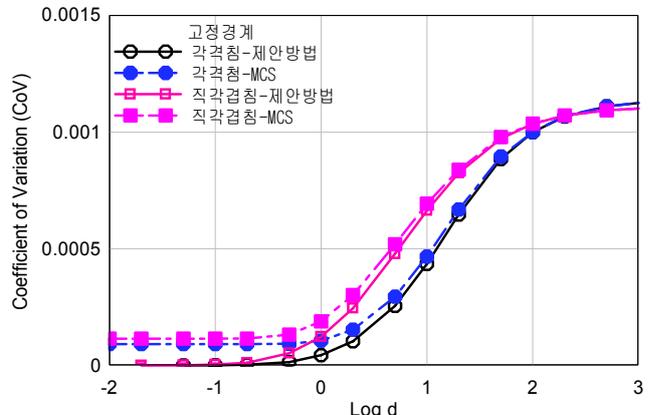


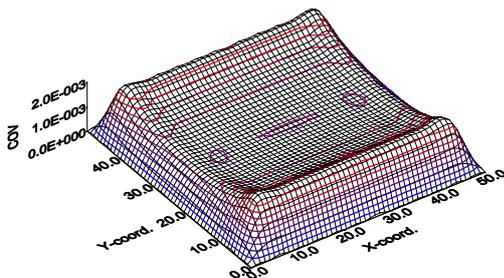
Fig. 3 고정지지 복합적층판의 중앙점변위의 응답변화도

Fig. 2와 3은 예제 복합적층판 중앙점 변위의 분산계수를 나타낸 것으로 상관관계거리  $d$ 의 함수로 그 변화 정도를 제시하였다. 상관관계거리는 로그척도로 나타내었다. 대부분의 경우 상관관계거리가 증가함에 따라 분산계수가 증가하다가  $d=1000$  이상의 값에서 최대의 변동계수를 보이고 경향을 타내고 있으나 각접침된 단 순지지 복합적층판의 경우  $d=100$ 이상의 상태에서 변동계수가 감소하는 결과를 나타내었다. 이러한 경향은 MCS에서도 동일하게 나타나 두 해석에 의한 결과는 상호 일치하고 있다.

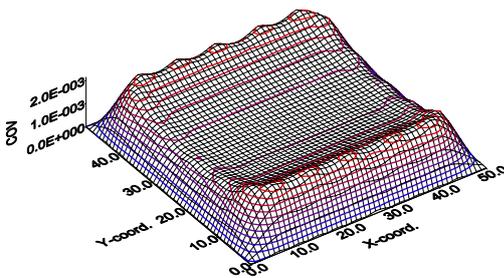
그러나 일반적인 등방성재료의 평판과 비교할 경우 복합적층판의 분산계수는 적게 나타남을 알 수 있다. 즉, 등방성평판의 경우 상관관계거리가 무한대로 감에 따라 중앙점변위의 분산계수는 포아송비 분산계수의 약 20% 정도로 나타나고 있으나 (Noh, 2004), 복합적층판에서의 결과는 포아송비 분산계수 대비 약 1~3% 내외의 값을 보이고 있다. 이는 복합재료가 제작과정에서 나타날 수 있는 불확실성과 다수의 재료 사용에 의한 불확실성 등이 높음에도 불구하고 목적하는 바 대로 제작된다면 등방성재료 평판에 비하여 응답의 불확실 정도는 낮게 나타나는 장점이 있음을 보여주고 있다.

#### 4.2 변위 변동계수의 분포

변위공분산치의 공간적 분포의 양태를 알아보기 위하여 고정경계 반대칭 각접침적층판에 대한 해석을 수행하고 변위의 표준편차(STD)와 분산계수(COV)를 구조계 내의 영역에 대해 도식화 하였다(Fig. 2, 3의 결과는 Fig. 4의 중앙점에서의 값이다).



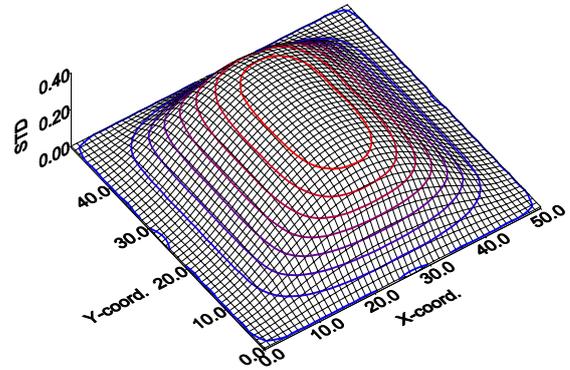
(a) 제안 정식화에 의한 분산계수의 분포도



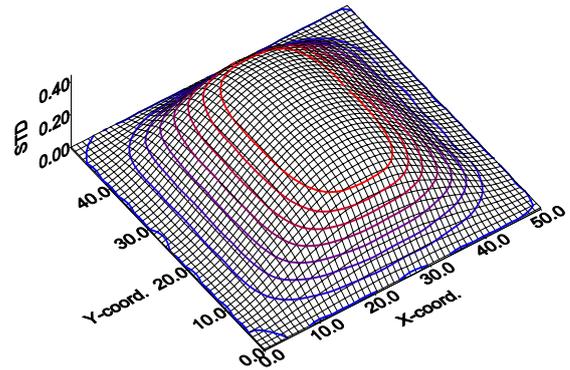
(b) MCS에 의한 분산계수의 분포도

Fig. 4 변위 변동계수의 공간적 분포

Fig. 4는 분산계수(COV)의 분포를 나타내주고 있다. 제안된 정식화에 의한 분포와 MCS에 의한 분포 양상은 상호 잘 일치하고 있다. 각접침에 의한 비틀림효과로 분산계수는 구조계 내의 각 점에서 동일한 값을 나타내고 있지 않은 것을 알 수 있다.



(a) 제안 정식화에 의한 표준편차의 분포도



(a) 제안 정식화에 의한 표준편차의 분포도

Fig. 5 변위 표준편차의 공간적 분포

Fig. 5는 변위의 표준편차(STD)에 대한 분포를 보여주고 있다. 표준편차의 경우 변위자체의 형상과 유사한 양상을 보이고 있음을 알 수 있으며, 이 경우에도 제안 정식화와 MCS에 의한 결과가 상호 잘 일치하고 있다. 그러나 Fig. 4에서 유추할 수 있듯이 중앙면을 중심으로 한 비대칭 적층과 각접침에 의한 비대칭성으로 변위의 평균과 표준편차 등은 구조 영역에 걸쳐 뒤틀리는 현상을 나타냄을 알 수 있다.

### 5. 결론

본 연구에서는 복합적층판 거동의 분산도 산정을 위한 추계론적 유한요소해석(stochastic finite element method) 정식화를 가중적분법에 근거하여 제시하였다.

공간적 불확실성을 가지는 확률변수로는 포아송비를 택하였다. 해석결과, 복합적층판의 응답변화도는 포아송비의 분산계수보다 매우 작은 값을 나타내었으며, 등방성재료 평판과 비교하여도 상대적으로 매우 작은 값을 보여줌을 알 수 있었다. 이는 복합적층판이 등방성판에 비하여 거동의 불확실성이 적은 장점을 가지고 있음을 의미한다. 본 연구의 결과는 추후 재료탄성계수와의 상관관계를 고려한 진보된 정식화의 기초로 사용할 수 있을 것으로 기대된다.

### 참고 문헌

1. Choi, C.K. and Noh, H.C. (2000) Weighted integral SFEM including higher order terms, *Journal of Engineering Mechanics*, 126 (8), pp. 859-866.
2. Cohen, D., Mantell, S.C. and Zhao, L. (2001) The effect of fiber volume fraction of filament wound composite pressure vessel strength, *Composites: Part B*, 32, pp. 413-429.
3. Deodatis, G. and Shinozuka, M. (1989) Bounds on response variability of stochastic systems, *Journal of Engineering Mechanics*, 115 (11), pp. 2543-2563.
4. Nigam, N.C. and Narayanan S. (1994) *Applications of random vibrations*, New Delhi: Narosa.
5. Noh, H.C. (2004) A formulation for stochastic finite element analysis of plate structures with uncertain Poisson's ratio, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47), pp.4857~4873.
6. Onkar, A.K., Upadhyay, C.S. and Yadav, D. (2007) Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method, *Composite Structures*, 77, pp.79~91.
7. Schuëller, G.I.(2007) On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis, *Computers and Structures*, 85(5-6), pp. 235-243.
8. Singh, B.N., Yadav, D. and Iyengar, N.G.R. (2002) Free vibration of composite cylindrical panels with random material properties, *Composite Structures*, 58, pp.435~442.