

다양한 기하학적 형상을 갖는 복합 적층셸 구조의 유한차분해석 Finite Difference Analysis of Laminated Composite Shell Structures with Various Geometrical Shapes

박해길 Park, Hae-Gil* · 이상열 Lee, Sang-Youl**† · 장석윤 Chang, Suk-Yoon ***

(Received August 21, 2010 ; Revised September 7, 2010 ; Accepted September 17, 2010)

ABSTRACT

This paper analyzed the partial differential equations of laminated composite shells of revolution by using the finite difference method. The proof that numerical results are reasonable and accurate is obtained through converge ratio analysis and commercial program LUSAS for the structural analysis. The purpose of this study is to examine closely the engineering advantages and to analyze the structural behaviors of the anisotropic shells of revolution. Thus, the relevant reinforcement and most suitable arrangement of fiber to produce the highest strength are proposed through the numerical results according to a variety of parameter study. Namely, the distribution of displacements and stress resultants are analyzed according to the change of meridian's curvature, the ratio of height-width of shell, subtended angle, fiber angle, and so on. Using these distribution, the most suitable shell may be proposed to produce the highest strength. Also, the configuration of the entire laminated composite conical shells is analysed, and a variety of the design criterion of circular conical shell are proposed and studied in engineering view points.

요 지

본 논문은 전단변형효과를 고려한 복합신소재 적층 셸을 해석하기 위하여, 일반 셸의 지배방정식을 유도하고, 이 방정식을 풀기 위하여 수치해석 기법중 하나인 유한차분법을 수행하였다. 유한차분법을 미분방정식을 지배방정식으로 가지는 구조물 해석시 간편하게 사용될 수 있고, 오차의 범위를 선택적으로 정할수 있는 장점이 있다. 수치해석 결과의 타당성을 검증하기 위하여 수렴도 분석과 범용 구조해석 프로그램인 LUSAS의 해석결과와 비교하였다. 본 논문의 목적은 전단변형 효과를 고려한 일반 셸의 거동 특징 및 분석, 복합재료로 구성되었을 경우 정확한 거동을 분석하고, 셸 구조물이 보다 높은 강성을 가질 수 있도록 하는 적절한 화이버의 보강방안과 다양한 조건 변화를 통해서 최적의 셸 구조물을 제시하는 것이다. 셸의 곡률의 변화에 따른 거동과 함응력의 변화를 분석하고, 셸의 높이-너비 비와 화이버 보강각도 변화에 따른 처짐 및 함응력의 변화를 비교, 분석하여 보다 유리한 셸 구조물을 제시하였다. 또한 다양한 하중을 가하여 셸의 형상 변화를 비교 분석함으로써 비등방성 재료로 이루어진 일반 셸의 거동에 대하여 분석하였다.

Key Words: General shells(일반 셸), Anisotropy(비등방성), Composite materials(복합재료), Finite difference method(유한차분법)

1. 서 론

셸 구조물은 두께가 얇은 박막 부재를 3차원 곡면 형상으로 구성하여 외력에 대해 곡면 방향 면내거동을 저항하도록 제작된 구조물이다. 셸 구조는 외력이 작용하는 경우 주로 면내력으로 저항하며, 연결부, 개구부, 또는 지점부는 면외 거동중 휨모멘트가 크게 발생하지만 그 외의 부분은 면내거동이 지배적인 구조이다. 그러므로 전체적인 셸구조는 면내 거동으로 외부 하중에 저항하므로 면외 거동이 지배하는 다른 구조형식보다 공학적으로 우수한 구조형식이다. 셸 구조에 사용하는 재료는 콘크리트나 강재가 주로 사용되어 왔으나 최근에는 건설 기술이 향상되어 구조물이 대형화

됨에 따라 경량 재료의 사용이 많이 요구되고 있다. 이러한 경량재료는 중량이 가볍고 필요한 강성을 가지며 내구성이 우수한 재료를 필요로 하고 있으며 대표적인 재료로 각광을 받는 재료가 복합재료이다. 복합재료는 두 가지 이상의 재료적 특징 즉, 이방성 재료 특성을 갖는 서로 다른 재료들을 적층시켜 전체적인 강성을 효과적으로 발휘하도록 제작된 구조재료를 말한다. 특히 방향성을 갖는 단일소재만으로 구성된 구조재료보다 구조적 약점을 갖는 방향을 보강하도록 적층시킨 복합재료는 구조적 효율성이 뛰어난 구조물로 제작할 수 있는 장점을 갖고 있는 구조재료이다. 그러므로 여러 선진국에서는 경량구조물로 제작이 요구되는 선박, 항공기, 자동차 산업뿐만 아니라, 최근에는

* 정회원.SK건설(주) 과장, 교신저자

**† 정회원.충부대학교 토목공학과 전임강사, 교신저자(lesy72@joongbu.ac.kr)

*** 정회원.서울시립대학교 토목공학과 명예교수 / (주)이산 상임고문

토목, 건축 산업에서도 복합재료를 사용하려는 시도가 이루어지고 있다. 그러나 복합재료는 자체 중량에 비하여 높은 강성 및 강도를 가지고 있고 내구성도 우수한 재료라고 하더라도 이론이 복잡하고 어렵기 때문에 토목 구조물에 적용하기 위한 많은 연구와 실험이 지속되고 있다. 셸 구조를 형식별로 구분하면 원통형 셸, 원뿔형 셸, 구형 셸로 구분하며, 이러한 구조형식들은 직선이나 곡선을 특정 축에 대하여 회전시킨 형태라는 공통점이 있다.

전단변형이 고려되지 않은 고전적 판 이론에 대한 다양한 연구가 진행되어 왔으나, 폭-두께비가 작아질수록 즉, 두께가 커질수록 전단변형에 의한 처짐이 무시할 수 없게 되어 고전적인 셸 이론으로는 해석할 수 없게 된다. 따라서 두께가 커지게 되면 전단 변형효과를 고려하여 해석을 수행하여야 한다. 이러한 이론적 배경에 의해서 고전적 비등방성 셸 이론에 전단변형효과를 고려하는 Hildebrand 등은 횡단면의 전단변형과 수직응력과 효과의 효과를 고려한 직교이방성 셸 이론을 유도하였다. 이후 1964년에 Ambratsumyan은 층구조로 된 직교이방성의 얇은 셸에 전단변형을 고려한 진동방정식을 연구하였고, Kalnins는 전단변형을 고려한 축대칭 하중조건에서 일반적인 비등방성 회전셸 해석을 컴퓨터 기술을 도입, 발전시켰다. 1967년에는 Gulati와 Essenbrug에 의해 축대칭 정하중을 받는 일반적인 비등방성 원통형 셸의 전단변형효과가 연구되었으며, 또한 Ahmed는 Rayleigh-Ritz 접근법을 사용하여 전단변형효과가 매우 중요하다는 것을 이론과 실험에서 입증했으며, Schipper는 두꺼운 직교이방성 셸에 온도하중 및 역학적 하중을 받는 지배방정식을 유도했고, Kalnins는 직교 이방성 물질로 구성된 셸의 지배방정식을 전개하였다. 1968년에 Vasikev는 복합재료에서는 구조평면 내에서 탄성계수가 전단탄성계수보다 충분히 크므로 직교이방성 적층 원통형 셸의 연구에서 전단변형이 포함되어야 함을 증명하였다. 또한 Klinger와 Vinson은 국부하중 상태에서 휨과 전단변형을 갖는 복합재료로 구성된 구형 셸의 정확 해를 계산하였다. 아울러 최근에는 다양한 형상을 갖는 복합신소재 적층 셸구조의 정·동적 거동을 규명하는 연구가 활발히 진행되고 있다(신옥범, 1993; 손병직, 2002; Ganapathi et al., 2002; 이상열 등, 2010).

본 논문의 목적은 전단변형 효과를 고려한 다양한 기학적 형상을 갖는 적층셸의 거동 특징을 분석하고, 셸 구조물이 보다 높은 강성을 가질 수 있도록 하는 적절한 화이버의 보강방안과 다양한 조건 변화를 통해서 보다 유리한 셸 구조물을 제시하고, 이에 대한 공학적 측면을 고찰하고자 하는 것이다. 본 논문에서는 임의의 Meridian을 회전시킨 형태의 보다 일반적이고 포괄적인 형태의 셸 구조물을 해석 대상으로 하였다. 이러한 일반적인 셸 구조물은 경계조건이 단순하지 않은 경우, 해석이 간단하지 않으며, 임의의 각도로 적층

시킨 셸 구조는 비등방성 구조물이 되므로 해석적인 방법으로 해를 얻기가 쉽지 않다. 따라서 이러한 경우는 대개 수치해석 기법을 사용하고 있다. 본 논문에서는 여러 가지 수치해석 기법 중 비등방성 셸의 복잡한 평형방정식을 효율적으로 수치 계산할 수 있는 유한차분법을 수행하였다.

2. 기본 이론

본 연구의 해석모델은 직교 이방성의 특성을 갖는 층이 임의의 각도로 적층된 셸로, Kirchhoff-Love의 기본가정에 전단변형을 고려하여 해석을 수행하였다. 변형 전 중립면에 수직인 단면은 변형 후 평면을 유지하지만 수직일 필요는 없다. Fig. 1은 본 연구에서 해석하고자 하는 해석모델의 좌표축을 나타낸 것이다. 여기서, ϕ 는 meridian방향, θ 는 회전방향을 의미한다.

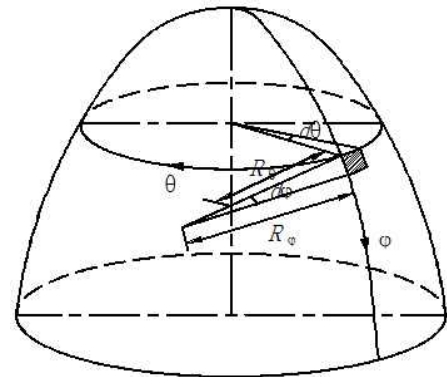


Fig.1 일반 셸의 좌표장

여기서 R_ϕ, R_θ 는 각각 ϕ, θ 축에 대한 곡률 반경을 의미하며, Fig. 1에서 빗금친 부분의 미소요소를 나타내면 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다. u_ϕ, u_θ, u_r 은 ϕ, θ, r 방향의 변위를 나타내며, β_ϕ, β_θ 는 ϕ, θ 방향의 회전각변위를 나타낸다. 마찬가지로 외부에서 작용하는 등분포하중 q_ϕ, q_θ, q_z 과 등분포모멘트 m_ϕ, m_θ 를 변위에 맞게 정의하였다. 미소변형 이론에 의하여 전단변형효과를 고려한 구형 셸의 변형률-변위 관계식을 구하면 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\phi\phi} &= \epsilon_{\phi\phi}^0 + r\kappa_{\phi\phi} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \epsilon_{\theta\theta}^0 + r\kappa_{\theta\theta} \\ \gamma_{\phi\theta} &= \gamma_{\phi\theta}^0 + r\kappa_{\phi\theta} \\ \gamma_{\phi z} &= \gamma_{\phi z}^0 \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $\epsilon_{\phi\phi}^0, \epsilon_{\theta\theta}^0, \gamma_{\phi\theta}^0, \gamma_{\phi z}^0, \gamma_{\theta z}^0$ 는 셸 요소

의 중립면에서 발생하는 수직 및 전단 변형률을 의미하고 $\kappa_{\phi\phi}$, $\kappa_{\theta\theta}$, $\kappa_{\phi\theta}$ 는 휨에 의해서 발생하는 곡률을 의미한다. 식 (1)에 나타난 셀 요소의 중립면에서 발생하는 변형률과 휨에 의해 발생하는 곡률을 변위에 대한 항으로 표현하면 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\phi\phi}^0 &= \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R_\phi} u_3 \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\tan\phi} u_\phi + \frac{1}{R_\theta} u_3 \\ \gamma_{\phi\theta}^0 &= -\frac{1}{R_\phi} \frac{1}{\tan\phi} u_\theta + \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \\ \gamma_{\phi 3}^0 &= \beta_\phi - \frac{1}{R_\phi} u_\phi + \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial u_3}{\partial \phi} \\ \gamma_{\theta 3}^0 &= \beta_\theta - \frac{1}{R_\theta} u_\theta + \frac{1}{\sin\phi} \frac{1}{R_\theta} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \\ \kappa_{\phi\phi} &= \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial \beta_\phi}{\partial \phi} \\ \kappa_{\theta\theta} &= \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\tan\phi} \beta_\phi \\ \kappa_{\phi\theta} &= -\frac{1}{R_\phi} \frac{1}{\tan\phi} \beta_\theta + \frac{1}{R_\phi} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{\sin\phi} \frac{\partial \beta_\phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{matrix} \right\}_k &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{matrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{matrix} \right\}_k \end{aligned} \quad (3)$$

Fig. 2로부터 임의의 k 층에서 구조축 1, 2, 3에 대한 응력-변형률 관계는 좌표변환을 통해서 다음과 같이 유도할 수 있다.

식(4)에서 k 는 두께방향으로 적층된 구조 중에서 임의의 층을 의미하며, Q_{ij} 는 재료축에 대한 탄성강도를 나타낸다. 재료축의 응력-변형률 관계를 구조축의 응력-변형률 관계로 나타내려면 좌표변환을 해야 한다. 재료축의 물리량을 구조축의 물리량으로 변환하는 좌표변환매트릭스를 사용하여 재료축의 응력-변형률 관계를 구조축의 응력-변형률 관계로 나타내면 다음과 같다.

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{\phi\phi} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{\phi\theta} \\ \tau_{\phi 3} \\ \tau_{\theta 3} \end{matrix} \right\}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{45} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{\phi\phi} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{\phi\theta} \\ \gamma_{\phi 3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{matrix} \right\}_k \quad (4)$$

여기서 R_ϕ , R_θ 는 각각 ϕ , θ 축에 대한 곡률 반경을 의미한다. 본 논문의 비등방성 셀이란 직교이방성인 각 층이 임의의 각도로 적층된 셀을 의미한다. Fig. 2는 임의의 층에서 구조축과 재료축을 나타낸 것이며, ϕ , θ , r 축은 구조축, 1, 2, 3축은 재료축을, ψ 는 구조축과 재료축이 이루는 각도를 의미한다. 그림에서 재료축 a_1 축이 구조축에 시계방향으로 기울어져 있으면 $+\psi$, 반시계방향으로 기울어져 있으면 $-\psi$ 인 부호 규약을 사용하였다. Fig. 2는 r 축과 a_3 축이 일치하고, 1, 2, 3축이 직교하는 직교이방성 셀을 나타낸 것이다.

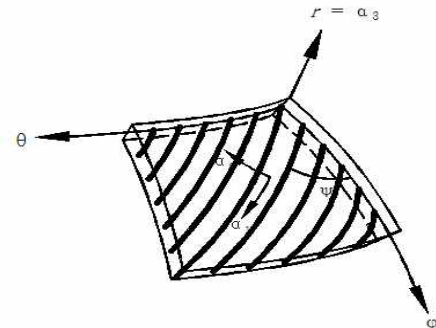


Fig. 2 구조축과 재료축의 관계

여기서, $[\bar{Q}]$ 는 재료축에서 재료강도를 구조축으로 좌표변환한 재료강도를 나타낸다.

한편, 직교 이방성 재료로 적층된 원통형 셀은 두께 방향으로 일체거동 한다는 가정에서 셀 요소의 임의단면에 작용하는 내력은 임의의 층에 작용하는 응력을 셀의 두께에 대하여 적분함으로써 얻을 수 있다. Fig. 3은 적층단면의 기하학적 형상을 나타낸 것이다. 여기서 z_k 는 중립면으로부터 k 번째 층까지의 거리이며, n 은 적층수이고 h 는 셀 요소의 두께를 의미한다.

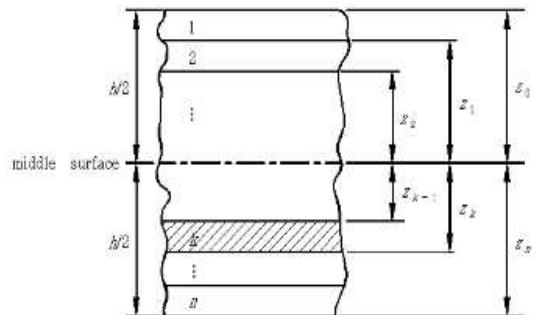


Fig. 3. 적층 셀의 두께방향 단면

합응력-변위 관계식을 힘의 평형 조건으로부터 유도된 평형방정식에 대입하면 변위의 향으로 표현되는 기본방정식을 유도할 수 있다. 이러한 변위의 향으로 표현되는 기본방정식을 풀어 구조물의 해석을 수행하게 된다.

$$\begin{Bmatrix} N_{\phi\phi} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{\phi\theta} \\ M_{\phi\phi} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{\phi\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\phi\phi} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{\phi\theta} \\ \kappa_{\phi\phi} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{\phi\theta} \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{\phi 3} \\ Q_{\theta 3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\phi 3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

여기서, A_{ij} 는 면내력 강도(Extensional Stiffness), B_{ij} 는 휨-면내력 연계강도(Coupling Stiffness), D_{ij} 는 휨강도(Bending Stiffness)를 의미하며 K 는 전단보정계수(Shear Correction Factor)를 의미한다. 비등방성 일반 쉘의 기본방정식은 벡터장에서 쉘의 미소요소에 작용하는 힘들의 기하학적인 합이 평형관계를 이룬다는 조건으로부터 유도된다. 식 (6)의 첫 번째부터 세번째 식은 ϕ , θ , r 축 방향 힘의 평형으로부터 구한 평형방정식이고, 식 (6)의 네 번째와 다섯번째 식은 ϕ , θ 축에 대한 모멘트에 대한 평형조건으로부터 구한 식이다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_\phi \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi\phi} \sin \phi) + \frac{1}{R_\theta \sin \phi} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R_\theta} N_{\theta\theta} \cot \phi \\ & + \frac{1}{R_\phi} Q_{\phi 3} = -q_\phi \\ & \frac{1}{R_\phi \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi\theta} \sin \phi) + \frac{1}{R_\theta \sin \phi} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R_\theta} N_{\phi\theta} \cot \phi \\ & + \frac{1}{R_\theta} Q_{\theta 3} = -q_\theta \\ & \frac{1}{R_\phi \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (Q_{\phi 3} \sin \phi) + \frac{1}{R_\theta \sin \phi} \frac{\partial Q_{\theta 3}}{\partial \theta} - \left(\frac{N_{\phi\phi}}{R_\phi} + \frac{N_{\theta\theta}}{R_\theta} \right) \\ & = -q_r \\ & \frac{1}{R_\phi \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (M_{\phi\phi} \sin \phi) + \frac{1}{R_\theta \sin \phi} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R_\theta} M_{\theta\theta} \cot \phi \\ & - Q_{\phi 3} = -m_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_\phi \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (M_{\phi\theta} \sin \phi) + \frac{1}{R_\theta \sin \phi} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R_\theta} M_{\phi\theta} \cot \phi \\ & - Q_{\theta 3} = -m_\theta \end{aligned} \quad (6)$$

매트릭스를 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\phi \\ u_\theta \\ u_r \\ \beta_\phi \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_\phi \\ -q_\theta \\ -q_r \\ -m_\phi \\ -m_\theta \end{Bmatrix} \quad (7)$$

위의 기본방정식에 수치해석 기법인 유한차분법을 이용하여 비등방성 적층 일반 쉘의 해석을 수행하게 된다.

3. 유한차분법

유한차분법은 임의의 점에 대한 미분방정식을 주위의 지지점에 대한 함수값으로 근사화하여 미분방정식을 해석하는 수치해석 기법이다. 판이나 쉘 등의 구조물은 평형 방정식 즉, 지배방정식이 미분방정식 형태로 나타나는데 이중에서 1계 이상의 도함수를 함수값만으로 표현하고 함수값을 독립변수로 한 연립방정식 형태로 변환시켜 이를 선형 대수론에 근거하여 해를 얻게 된다. 유한차분법은 사용하고자 하는 항의 수를 선택적으로 사용할 수 있고 임의의 점에 대한 미분방정식을 주위의 지지점에 대한 함수값으로 근사화할 수 있으므로 유한요소법을 비롯한 다른 수치해석기법보다 비교적 간단하게 해석할 수 있는 장점이 있다. 유한차분법은 알고자하는 점의 함수값을 구현하기 위해 사용되는 주위의 지지점에 따라 전방차분법, 중앙차분법, 후방차분법으로 나눌 수 있다. 전방차분법은 앞쪽의 지지값만을, 중앙차분법은 앞·뒤의 지지값을, 후방차분법은 뒤쪽의 지지값만을 이용하여 미분항을 차분식으로 변환한다. 본 논문에서는 중앙차분법은 쉘의 내부점에서 사용되고, 전방차분법과 후방차분법은 경계점에서 가상점 소거 시 사용된다.

앞서 유도한 비등방성 일반 쉘의 기본방정식은 변위에 대한 미분항으로 구성되어 있다. 수치해석기법인 유한차분법을 변위의 미분항으로 이루어진 기본방정식에 적용하면 각각의 변위에 대한 연립방정식의 형태인 차분방정식을 얻을 수 있다. 쉘 구조에 유한차분법을 적용하기 위하여 경계면과 내부점에 절점방향을 정의하면 Fig. 3과 같다.

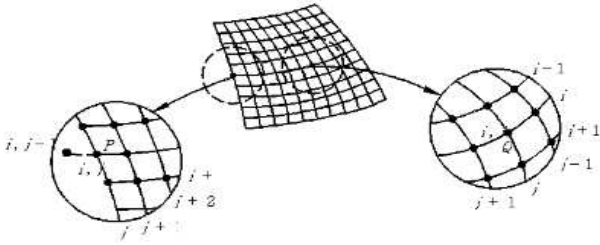


Fig. 3. 셀의 경계점 및 내부점에서의 절점 좌표

Fig. 3 에서 절점 i 는 셀의 Meridian방향의 절점을 의미하고, 절점 j 는 회전방향의 절점을 의미한다. 먼저 내부 절점에서는 (i, j) 점에 대한 미분식 (i, j) 점과 (i, j) 점에 이웃하는 8개의 지지점값으로 나타낼 수 있다. 비등방성 원통형 셀의 내부점인 임의의 한 점 $Q(i, j)$ 은 이웃하는 점들의 정보를 전부 알 수 있으므로 가상점이 발생하지 않는다. 따라서 중앙 차분식을 적용하여 변위의 미분항으로 표현된 기본방정식에 대입하면 차분방정식을 얻을 수 있다. 한편, 경계점이 모두 고정이면 가상점이 생기지 않으므로 가상점을 소거할 필요가 없으나 Fig. 3의 P 와 같이 경계점에서는 가상점이 발생하므로 이를 소거하여야 한다. 예를 들어 P 점이 자유경계라면 각 자유도당 3개의 가상점 $(i-1, j-1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j-1)$ 이 생기므로 총 15개의 가상점이 발생하게 된다. 그런데 자유 경계에 대한 조건은 $N_{\phi\phi} = 0$, $N_{\phi\theta} = 0$, $M_{\phi\phi} = 0$, $M_{\phi\theta} = 0$, $Q_{\phi 3} = 0$ 의 5개이기 때문에 15개의 가상점을 소거할 수 없다. 따라서 하중이 작용하지 않는 점들 $(i-1, j-1)$, $(i+1, j-1)$ 은 전방차분법을 적용하면 가상점은 $(i, j-1)$ 만 남게 되므로 5개의 경계조건을 사용하면 내부점으로 치환된다. 자유경계의 경우 경계조건 $N_{\phi\phi} = 0$, $N_{\phi\theta} = 0$, $M_{\phi\phi} = 0$, $M_{\phi\theta} = 0$, $Q_{\phi 3} = 0$ 의 5개를 이용하여 가상점을 내부점으로 치환시켜야 한다. 지면 한계상 상세한 수식유도는 생략하며 참조 문헌을 참고하기로 한다(박해길, 2001).

앞서 구한 임의 한 점에서의 차분방정식을 중첩의 원리를 이용하여 구조물 전체에 대한 차분방정식을 구성할 수 있다. 구조물 전체에 대한 차분방정식이 얻어지면 가우스 소거법 등을 이용하여 변위를 구하고, 변위를 가지고 합응력을 구할 수 있다. 이러한 일련의 과정은 매우 복잡하고 계산량이 많으므로 컴퓨터를 이용한 수치해석 방법이 사용되어야 한다. 컴퓨터 프로그램을 이용한 유한차분 해석에서는 프로그램의 정확도가 가장 중요하게 요구된다. 이러한 정확도를 높이기 위해서는 해석모델의 기하학적 조건과 거동특성에 대하여 정확하게 이상화하여 컴퓨터 프로그램 작업을 해야하고, 또한 해석 모델의 분할수를 증가시켜야 하므로 고사양의 컴퓨터가 필요하다. 본 논문에서는 여

러가지 프로그램 언어 중 공학적 수치계산에 적합하고 널리 사용되고 있는 Fortran95를 사용하였고, Fig. 4와 같이 알고리즘을 구성하였다. 프로그램을 크게 3단계 즉, 데이터입력 및 모델링단계, 해석단계, 결과출력단계로 구성하였다. 데이터 입력 및 모델링 단계는 해석 모델의 기본형태와 수치, 그리고 분할정보와 재료의 물성치를 읽어들이어 해석수행단계에 필요한 구조물의 모델링을 하게 된다.

해석단계는 데이터입력 및 모델링단계에서 연산된 구조물에 대한 모델 정보들을 가지고 유한차분법을 이용하여 구조물의 해석을 수행하는 단계이다. 해석단계에서는 임의의 한 점에서의 차분방정식을 중첩시켜 전체구조물에 대한 시스템매트릭스를 구성하고 Skyline Solver를 이용하여 변위를 구한다. Skyline Solver 는 시스템 매트릭스의 2차원 배열 대신 1차원 배열을 이용한 Column Solver 이며, 값이 0인 부분은 연산 시 포함되지 않기 때문에 메모리 관리나 처리속도 면에서 Gauss Elimination 이나 Banded Solver보다 유리하다.

마지막 결과출력 단계는 해석수행단계에서 구한 변위와 응력을 출력하고, AutoCad와 호환되는 DXF파일을 출력하여 구조물의 처짐형상을 시각적으로 볼 수 있도록 하였다.

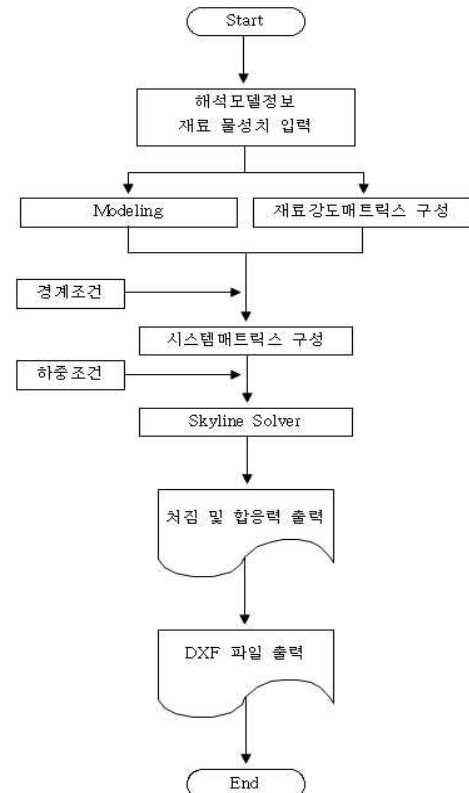


Fig. 4. 프로그램 흐름도

4. 해석 예 및 결과 분석

4.1 해석모델

본 장에서는 앞서 전개한 쉘 이론과 수치해석 기법을 바탕으로 작성된 해석 프로그램의 타당성을 검증하고, 해석 예의 결과를 비교, 분석하였다. 수치해석 기법의 타당성 검증을 위해서 쉘 중앙점의 수렴성을 분석하였다. 또한 본 장에서 해석하고자 하는 쉘의 형상을 변화시키면서 해석을 수행하였으며, 화이버 보강각도 변화에 따른 처짐 및 함응력의 변화를 분석하였다.

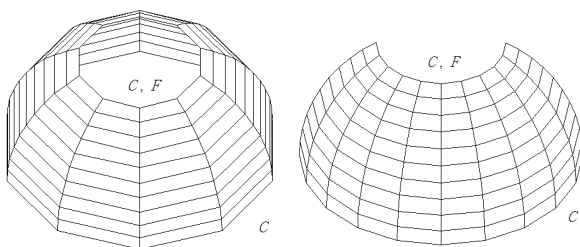
본 연구에서는 해석모델을 두 가지 즉, 폐합된 쉘의 경우와 반폐합된 쉘의 경우로 나누었다. 쉘에 각각 등분포 하중, 수직하중, 풍하중이 재하된 경우로 설정하였다. 경계조건은 고정경계 및 자유경계를 조합하여 적용하였고, 등분포하중은 반경방향으로 1 ksi를 재하시켜 이에 따른 결과를 비교, 분석하였다. Fig. 5에 대표적인 해석모델을 나타내었다. 여기서, **F**, **C**는 각각 자유경계(Free Support), 고정경계(Clamped Support)를 의미한다.

본 연구에 대한 수치해석의 예로서 여러 가지 재료 중 Boron Fiber가 Epoxy Matrix에 재료축 방향으로 묻혀있는 직교이방성인 재료를 사용하여 각 층의 두께가 동일한 4개의 층을 임의의 방향으로 적층시켜 해석을 수행하였다. 각층을 구성하는 재료의 물성치는 Table 1과 같고, 여기서 ν_{21} 은 식(8)과 같다.

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \tag{8}$$

Table 1. Br.-Ep. 재료의 물성치

E_1	E_2	G_{23}	G_{13}	G_{12}	ν_{12}
30000.0	3000.0	300.0	1000.0	1000.0	0.3



(a) 폐합 쉘 (b) 부분 쉘

Fig. 5. 해석 모델

4.2 LUSAS와 결과비교

수렴성 분석에 이어 본 항에서는 수치해석 결과의 타당성을 한층 더 높이기 위하여 유한요소법에 근거한

범용 구조해석프로그램인 LUSAS의 해석결과와 비교하였다. 일반적으로 유한요소법에 의한 해석결과는 수치적으로 안정한 해석결과를 보여주는 대표적인 방법이며 경계조건 적용이 용이함으로서 현재 널리 적용하고 있는 해석방법이다. 그러나 일반화되어 있는 유한요소법은 변위장을 적당한 형상함수식으로 가정함으로써 상계치(upper bound)의 해석결과를 보이는 해석방법이다. 반면, 본 연구에서 적용하는 유한차분법은 평형방정식을 변위의 항으로 표현한 하계치(low bound)의 해석결과이다. 이러한 하계치에 의거한 해석결과들은 함응력이 변위보다 수치적으로 안정한 것으로 알려져 있다. 토목구조물의 설계과정은 변위를 중심으로 설계하는 것이 아니라 함응력을 중심으로 설계하는 것이 보통이므로 하계치에 의한 해석방법은 구조설계의 기준을 제시할 수 있는 방법이기도 하다.

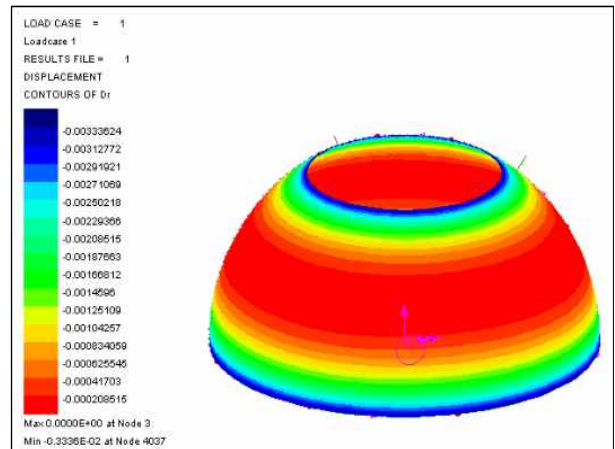


Fig. 6. LUSAS의 해석결과

Table 2 LUSAS 해석결과와의 무차원 비교

분할수	중앙처짐값	분할수	중앙처짐값
11×11	-0.003290267	35×35	-0.003317821
15×15	-0.003305678	39×39	-0.003318288
19×19	-0.003311610	43×43	-0.003318627
23×23	-0.003314508	47×47	-0.003318880
27×27	-0.003316141	51×51	-0.003319074
31×31	-0.003317152	55×55	-0.003319227
LUSAS 처짐 결과		-0.003336	

범용 구조해석프로그램인 LUSAS의 해석결과와 비교하기 위해서 등방성 재료를 사용하여 비교하였다. 즉, 재료의 물성치는 $E_1 = E_2 = 3000$, $\nu_{12} = 0.3$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_1/2(1 + \nu_{12})$ 이고, 나머지 치수는 수렴성 분석할 때 사용했던 치수와 동일하다. LUSAS 프로그램에서 요소는 thin shell 요소를 사용하

였으며, 이 요소는 본 연구에서 해석하고자 하는 모델을 잘 반영해주는 요소이다.

Fig. 6은 LUSAS 프로그램을 사용하여 요소수를 25×25으로 분할한 경우 고정지지된 구형 셀에 반경 방향으로 등분포하중을 재하하여 해석한 화면을 나타낸 것이며 처짐값의 크기를 색깔로 표시하고 있다. 최대 처짐값은 0.0036이고, 본 연구의 유한차분법을 이용한 구형 셀의 최대 처짐값과 LUSAS에 의하여 해석한 구형 셀의 최대 처짐값을 비교하여 Table 2에 나타내었다. 표에서 LUSAS결과와 본 연구의 결과값은 99% 이상 일치하고 있다.

4.3 비등방성 원뿔형 셀과의 결과 비교

Table 3은 Meridian의 곡률반경을 매우 크게 하여 원뿔형 셀의 형태의 모델의 해석을 수행하여 참고문헌(1)의 결과와 비교한 것이다. 모델은 참고문헌(1)과 같이 셀의 총두께는 1, 반경의 길이가 각각 10, 20 이고 반경 중심에서 다른 쪽 반경 중심까지의 길이가 100인 양단고정 폐합 원뿔형 셀에 대하여 중앙점의 반경방향 처짐 결과를 나타내었다. 또한 재료의 물성치도 마찬가지로 참고문헌(1)과 같고, 재료의 보강각도가 [0/90/90/0]인 재료를 사용하였다. 하중은 반경방향으로 등분포하중 1.0을 재하하였다.

Table 3 참고문헌(2)의 해석결과와의 무차원 비교

분할수	중앙처짐값	분할수	중앙처짐값
11×11	-0.01419642	35×35	-0.01419170
15×15	-0.01419470	39×39	-0.01419152
19×19	-0.01419363	43×43	-0.01419138
23×23	-0.01419284	47×47	-0.01419128
27×27	-0.01419231	51×51	-0.01419119
31×31	-0.01419195	55×55	-0.01419113
참고문헌(2) 59×59 처짐 결과		-0.01432885	

Table 3과 같이 참고문헌과의 해석결과와 거의 일치함을 알 수 있다. 해석결과가 참고문헌의 처짐값과 비교하여 약간 작음을 관찰할 수 있다. 그 이유는 미세하지만 Meridian의 곡률반경의 영향으로 면내저항력이 원뿔형 셀보다 커지기 때문이다.

4.4 셀의 형상 변화에 따른 결과 분석

본 절에서는 셀의 meridian의 ϕ 축 방향 곡률 R_ϕ 의 변화에 따른 처짐 및 합응력의 변화를 분석 하였다. 재료의 보강각도가 [0/90/90/0]인 경우 재료의 강도 매트릭스를 Table 4에 나타내었고, 이때 합응력-변형률 관계식은 식 (9)와 같이 된다. 또한 재료가 중립면을 기준으로 대칭으로 적층되어 있으므로 힘-면내력 연계

강도 매트릭스 $B_{ij}=0$ 이 된다. 또한, 사용 재료가 크로스-플라이 형태로 배치된 경우이므로 $A_{16} = A_{26} = 0, D_{16} = D_{26} = 0, A_{45} = 0$ 이 된다. 셀의 총 두께를 0.4로 설정하였고, 모델은 양단고정 폐합 셀, 한번 고정 한번 자유인 폐합 셀, 4번고정 부분 셀 그리고 3번고정 한번 자유인 부분 셀로 설정하였다.

Table 4 해석모델의 무차원 강성값

보강각 (ϕ)	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{44}
	D_{11}	D_{12}	D_{22}	D_{66}	A_{55}
0/90	16649.85	908.17	16649.85	1000.00	666.67
/90/0	2238.90	75.68	536.07	83.33	666.67

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{\theta x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{\theta x}^0 \end{Bmatrix} \quad (9a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{\theta x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{\theta x} \end{Bmatrix} \quad (9b)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{\theta z} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (9c)$$

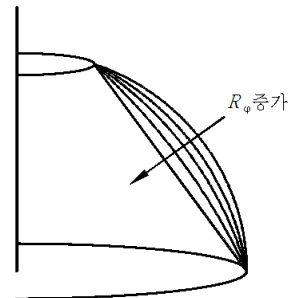


Fig. 7 곡률 변화에 따른 셀의 형상변화

4.4.1 Meridian의 곡률변화에 따른 결과 분석

Fig. 7은 meridian의 곡률 R_ϕ 의 변화에 따른 셀의 변화 형상을 나타낸 것이다. 셀의 시점 및 종점의 좌표를 고정시키고 meridian의 곡률을 1, 10, 100, 10000으로 증가시키면서 해석을 수행하였다. 그림과 같이 곡률이 증가할수록 구형 셀은 원뿔형 셀의 형상으로 변화한다. Fig. 8는 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 ϕ 축상의 처짐을, Fig. 9는 한번 고정 한번 자유인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 ϕ 축상의 처짐을, 그리고 Fig. 10은 세변이 고정이고 한번이 자유인 반폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 ϕ 축상의 처짐을 나타낸 것이다. Fig. 8~10에서 곡률이 증가할수록 셀의 반경방향 처짐은 증가하고, ϕ 방향

처짐은 감소하였다. 이는 구조물에 하중이 가해지면 구조물의 초기 곡률로 인해 구조물이 면내력으로 저항하므로 반경방향 처짐이 감소하게 됨을 알 수 있다. 또한 쉘의 변형률-변위 관계식과 평형방정식에서 각각의 식들이 ϕ 에 의해서 연계되기 때문이다. 따라서 반경방향 처짐 u_3 가 주로 발생하는 구조물에서는 원통형 쉘이나 원뿔형 쉘보다는 구형 쉘이 유리하다.

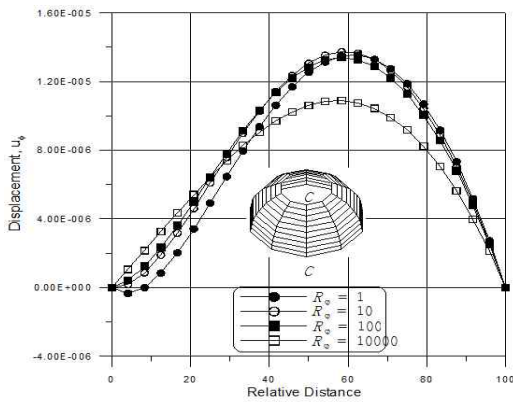


Fig. 8(a) 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_ϕ 의 ϕ 축 분포

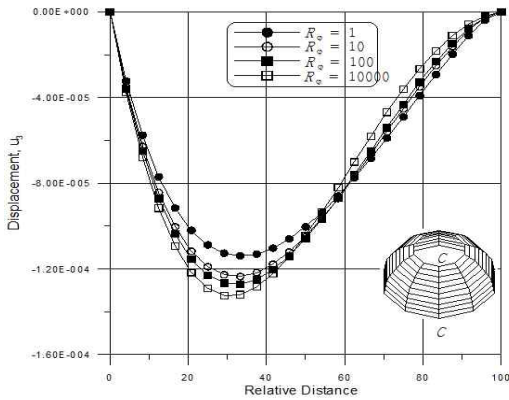


Fig. 8(b) 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_3 의 ϕ 축 분포

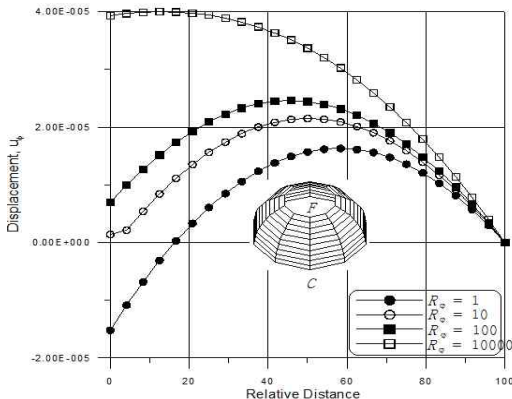


Fig. 9(a) 한번 고정 한번 자유인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_ϕ 의 ϕ 축 분포

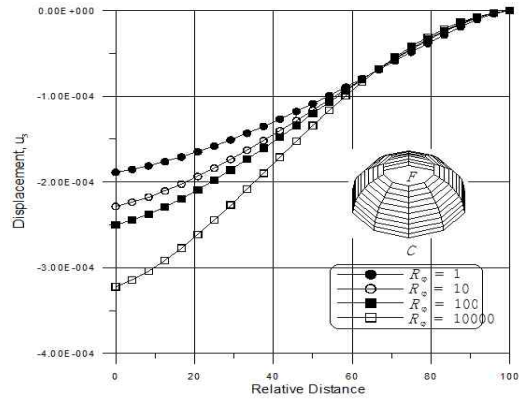


Fig. 9(b) 한번 고정 한번 자유인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_3 의 ϕ 축 분포

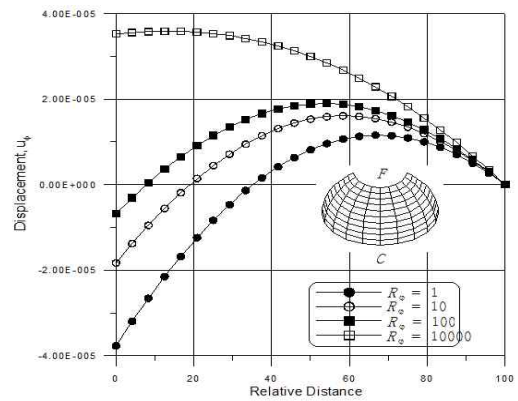


Fig. 10(a) 세변이 고정이고 한번이 자유인 반폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_ϕ 의 ϕ 축 분포

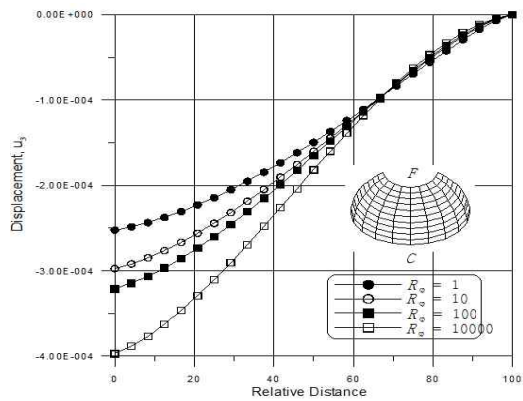


Fig. 10(b) 세변이 고정이고 한번이 자유인 반폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_3 의 ϕ 축 분포

u_ϕ 는 자유경계가 있는 경우와 없는 경우 다르게 나타났는데, 자유경계가 없는 경우 u_ϕ 는 쉘의 상부와 하부의 부호가 반대로 나타났으며 자유경계가 있는 경우는 u_z 와 같은 부호를 갖으며 반경방향 처짐 u_3 도 크게 나타났다.

4.4.2 셀의 높이와 너비 비 변화에 따른 분석

본 절에서는 셀의 높이와 너비 비를 변화에 따른 처짐 및 하응력의 변화를 분석하였다. Fig. 11과 같이 셀의 높이와 너비의 합을 고정시키고 높이와 너비의 비를 변화시키며 해석을 수행하였다. 셀의 높이와 너비 비 γ 가 커질수록 셀은 높이가 작아지고 곡선판의 형태로 변화할 것이다. Meridian은 2차 곡선으로 하였다.

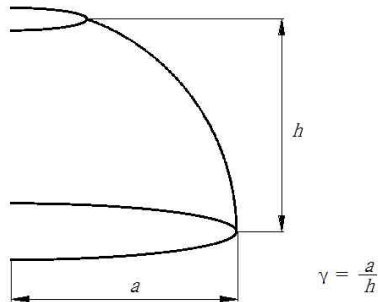


Fig. 11 셀의 높이와 너비 비 변화

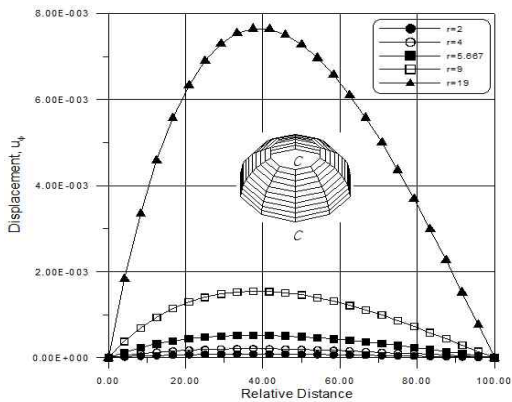


Fig. 12(a) 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_ϕ 의 ϕ 축 분포

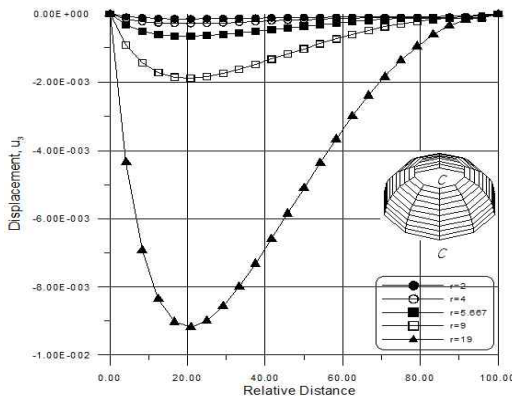


Fig. 12(b) 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 처짐 u_3 의 ϕ 축 분포

Fig. 12는 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의

점에서의 처짐의 ϕ 축 분포를 나타낸 것이며, Fig. 13은 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 합응력의 ϕ 축 분포를 나타낸 것이다. Fig. 13에서 γ 가 커질수록 즉, 셀의 형상이 평면에 가까울수록 반경방향 처짐 u_3 가 커짐을 관찰할 수 있다. 반면, ϕ 방향 처짐 u_ϕ 는 작아지는 경향을 보이고 있다. 이는 셀의 곡률이 작아져서 면내력으로의 저항이 약해지기 때문이다.

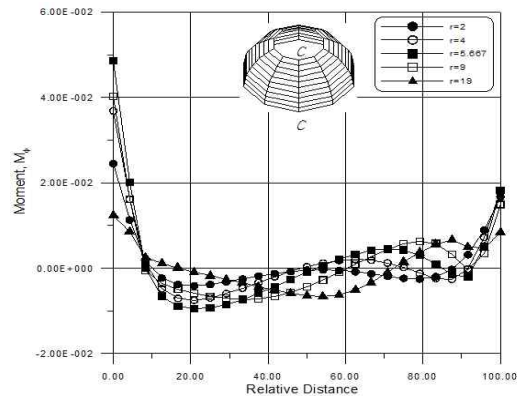


Fig. 13(a) 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 모멘트 M_ϕ 의 ϕ 축 분포

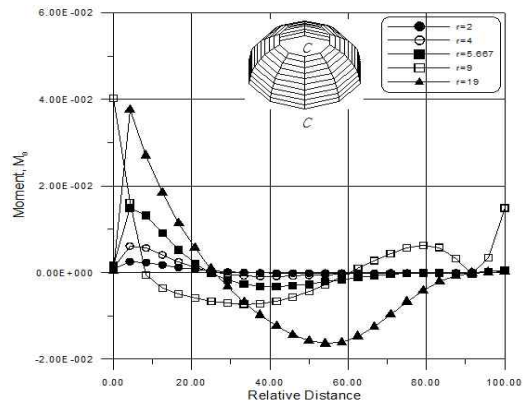


Fig. 13(b) 양단 고정인 폐합셀의 경우의 θ 축 임의점에서의 모멘트 M_θ 의 ϕ 축 분포

4.5 처짐 형상

본 절에서는 여러 가지 해석모델의 처짐형상 및 합응력 분포를 그림으로 나타내었다. 해석모델은 구형셀과 Meridian이 2차 곡선인 셀로 설정하였고, 구형셀의 ϕ 방향 곡률을 증가시켜 원통형 및 원뿔형 셀로 변화시켰다. 이러한 구조 모델에 반경방향 등분포 하중과 수직방향의 하중, 그리고 수평방향의 횡하중을 가하여 처짐형상을 나타내었다.

Fig. 14는 부분 구형셀에 반경방향 하중을 가했을 경우, Fig. 15는 폐합된 경우를, Fig. 16은 Meridian이 2차 곡선인 경우이다. 구형 셀의 경우, 일반적으로 반

경방향 등분포 하중을 가했을 때에는 셀의 중간 부근에서 최대 처짐이 발생하였다. 반면에 수직방향의 등분포 하중을 가했을 때에는 최대 처짐이 셀의 상부에서 발생하였고, 셀의 하부에서는 하중이 가해진 반대방향으로 반경방향 처짐이 발생하였다. 이는 셀의 기하학적 특성으로 아랫부분에서는 반경 방향 하중이 작아지게 되어 반경 방향 하중이 유발하는 처짐보다 ϕ 방향 하중이 유발하는 처짐이 크기 때문이다. 부분 셀의 경우, 회전각 θ 가 클수록 회전방향으로의 변위가 크게 발생하는데, 이 회전방향의 변위로 인해 회전각 θ 가 충분히 클 경우 셀의 최대 처짐이 θ 방향으로 1/4 지점과 3/4지점에서 발생하게 된다. Meridian이 2차 곡선인 경우에 반경방향 등분포하중을 재하했을 경우는 Meridian의 곡률 R_ϕ 가 큰 곳에서 처짐이 크게 발생하였다. 이는 R_ϕ 가 증가하면 곡률로 인한 면내력의 저항이 감소하기 때문이다.

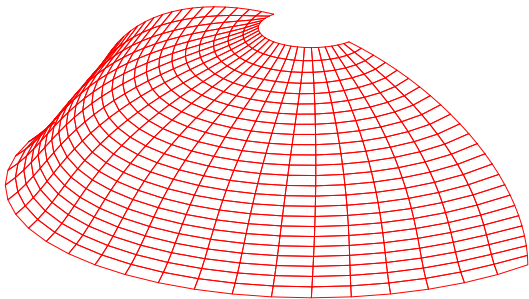


Fig. 14 4변고정 부분 구형 셀에 반경방향 등분포하중 재하시 처짐 형상

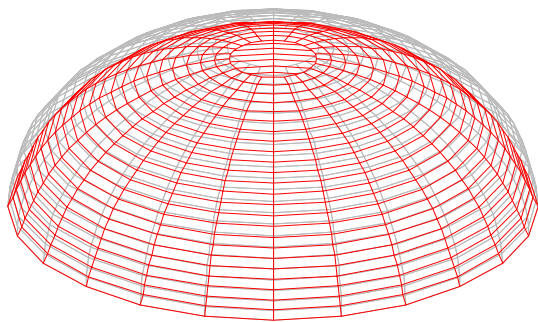


Fig. 15(a) 2변 고정 1변 자유 폐합 구형 셀에 반경방향 등분포하중 재하시 처짐 형상

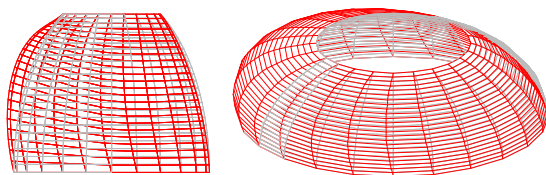


Fig. 15(b) 2변고정 폐합 구형 셀에 횡방향 부분 등분포하중 재하시 처짐 형상

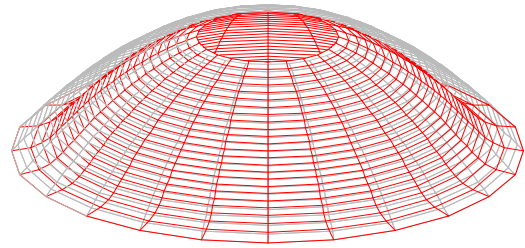


Fig. 16 1변고정 1변자유이고 Meridian이 2차 곡선인 폐합 셀에 반경방 부분 등분포하중 재하시 처짐 형상

5. 결 론

본 논문에서는 고정 지지된 셀의 거동을 유한차분법을 사용하여 분석하였다. 두께가 얇은 고전적인 셀 이론에 전단변형효과를 고려하였고, 여기에 적층이론을 추가하였다. 수치해석의 타당성 검증을 위해서 셀 중앙점의 반경방향 처짐과 ϕ 방향 처짐의 수렴성을 검토하였다. 본 연구를 통해서 다음과 같은 몇 가지 결론을 얻을 수 있었다.

일반 셀의 거동은 Meridian의 곡률과 많은 관계를 가지며 곡률이 커질수록 반경방향 처짐 u_3 는 커지고 ϕ 방향 처짐 u_ϕ 는 작아진다. 이것은 셀의 변형률-변위 관계식 및 평형방정식에서, 각각의 식들의 ϕ 방향에 의해서 연계되기 때문이다. 원통형 셀이 반경방향 처짐이 지배적인 반면에 구형셀 같이 Meridian에 초기 곡률이 있는 경우는 반경방향 처짐과 함께 ϕ 방향 처짐이 지배적인 영향을 미치게 된다. 합응력은 곡률이 커질수록 ϕ 방향 및 θ 방향 모멘트가 증가하고, 면내력은 작아지게 된다. 그리고 지점 부근에서는 합응력이 크게 나타나 지점부에는 적당한 보강이 필요하다.

셀의 높이와 너비와의 비가 커질수록 즉, 셀의 형상이 평면에 가까울수록 반경방향 처짐 u_3 가 커지는 반면 ϕ 방향 처짐 u_ϕ 는 작아지는 경향을 보이고 있다. 또한, ϕ 방향 및 θ 방향 모멘트가 증가하고, 면내력은 작아지게 된다. 이는 높이와 너비와의 비가 커질수록 셀의 곡률이 작아져서 면내력으로의 저항이 약해지기 때문이다. 본 연구의 해석결과 비등방성 셀의 거동은 복합재료의 적층 형식과 방향, 셀의 곡률, 중심각, 형상비에 따라 다양하게 나타났다. 특히 Meridian의 곡률이 셀의 거동에 많은 영향을 미치는 것으로 나타났다. 반경방향 등분포 하중을 받는 셀 구조물에서 ϕ 방향 곡률이 큰 곳은 ϕ 방향 변위가 작은 반면에 반경방향 처짐이 증가함을 알 수 있었다. 이러한 점을 고려하여 곡률이 큰 곳에는 적당한 보강을 하여 설계한다면 구조적으로 유리한 셀을 설계할 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

1. 박해길(2001), *비등방성 일반 셸의 해석*, 서울시립대학교 석사 학위논문.
2. 손병직(2000), *비등방성 원뿔형 셸의 해석*, 서울시립대학교 석사 학위논문.
3. 신옥범(1993), *전단변형을 고려한 직교이방성 적층 원통셸의 해석*, 서울시립대학교 석사 학위논문.
4. 이상열, 장석윤 (2010) 다양한 기하학적 형상을 갖는 층간 분리된 복합신소재 적층구조의 동적 불안정성, *복합신소재구조학회지*, 한국복합신소재구조학회, 제 1권 제1호, pp. 20-28.
5. Ahmed N. (1967) *On the Axisymmetric Vibrations of Orthotropic Cylindrical and Conical Shells*, Ph.D. Dissertation, Cornell University.
6. Ganapathi M., Patel B. P., and Pawargi D. S.(2002) Dynamic analysis of laminated cross-ply composite non-circular thick cylindrical shells using higher-order theory, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.39, pp.5945-5962.
7. Langhaar H. L.(1962) *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons.
8. Struik D. J.(1950) *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company.
9. Timoshenko S. P., and Woinowsky-Krieger S.(1959) *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 2nd Ed.