

# 유한요소법에 의한 비등방성 두꺼운 원통형 쉘 및 얇은 원통형 쉘의 비교 해석

## A Comparative Analysis of Anisotropic Thick Cylindrical Shells and Anisotropic Thin Cylindrical Shells by Finite Element Method

김기동 Kim, Gi-Dong\* · 박원태 Park, Weon-Tae \*\*†

(Received August 10, 2010 ; Revised September 1, 2010 ; Accepted September 2, 2010)

### ABSTRACT

This paper is presented for the analysis results of the bending problems of the anisotropic cylindrical shells. In the numerical analysis of various mechanical problems involving complex partial differential equations, Finite element method is used to analyze the governing equations of anisotropic cylindrical shells. Both thin shell theory and thick shell theory are used as the basic governing equations of bending problems in the anisotropic cylindrical shells. The analysis results are compared between the anisotropic thick cylindrical shells and the anisotropic thin cylindrical shells. The results of this study will be contribute to analyze the bending behavior of anisotropic cylindrical shells.

### 요 지

본 연구는 비등방성 원통형 쉘의 휨문제에 대한 해석 기법을 제시하였다. 비등방성 원통형 쉘의 지배방정식을 해석하기 위해 유한요소법을 사용하였다. 두꺼운 쉘이론과 얇은 쉘이론을 사용하여 쉘의 폭-두께비 및 여러 가지 경계조건을 갖는 비등방성 원통형 쉘에 대한 해석결과를 비교 분석하였다. 본 연구의 수치해석 결과는 비등방성 원통형 쉘의 휨 거동 분석에 기여할 것으로 보인다.

**Key Words:** Anisotropic thick cylindrical shell(비등방성 두꺼운 원통형 쉘), Anisotropic thin cylindrical shell(비등방성 얇은 원통형 쉘), Finite element metho(유한요소법)

## 1. 서 론

대규모의 저수탱크나 하수처리 탱크 혹은 액체의 대량 저장에 잘 쓰이는 원형 원통형 쉘구조는 그 형상이 좋고 시공이 쉬우며 다른 형식의 쉘구조에 비하여 역학적으로 안정되고 또한 경제적이다. 그러나 이러한 원형 원통형 쉘구조물은 해석적인 방법으로는 그 응력을 알아낸다는 것은 극히 어렵다. 본 연구에서는 원형 원통형 쉘구조에 대하여 실용적인 견지에서 충분히 정확한 해를 얻기 위하여 유한요소법을 적용하려 한다. 또한 쉘구조의 재료로서는 강재나 콘크리트가 대부분을 차지하고 있으나 최근에는 경제적이고 더 강한 대체 재료로서 복합재료가 연구, 개발되고 있다. 복합재료는 그 자체 중량에 비하여 강성, 강도 및 내구성등이 탁월한 다양한 소재로 구성되어 하나의 구조체를 형성한다. 기존의 보와 판에 전단변형효과를 고려한 연구에 추가하여(장석윤, 윤석호 1992; 장석윤, 이원홍 1992) 본 연구에서는 쉘 설계자들에게 유한요소법에 의한 얇

은 쉘 이론과 두꺼운 쉘이론에 의한 비등방성 원통형 쉘의 해석과정의 이론적 이해를 돕기 위하여, 여러 가지 경계조건을 갖는 복합재료로 구성된 비등방성 원통형 쉘구조물을 모델로 하여 전단변형효과를 무시한 얇은 쉘이론과 전단변형효과를 고려한 두꺼운 쉘이론에 의한 해석결과를 비교 검토하였다.

## 2. 기본 이론

### 2.1 쉘의 변위벡터와 변형률벡터

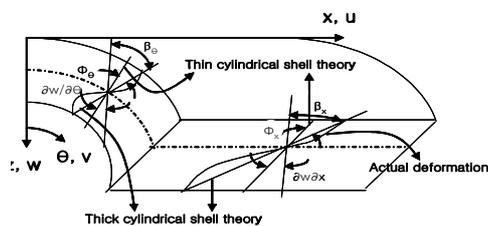


Fig. 1 원통형 쉘의 변위

\* 정회원·공주대학교 공과대학 건설환경공학부 교수

\*\*† 정회원·공주대학교 공과대학 건설환경공학부 교수, 교신저자(pwtat@kongju.ac.kr)

쉘에 대한 좌표를 직각 곡선좌표계를 사용하여 쉘 길이방향을  $x$ , 원주방향을  $\theta$ , 원의 반경방향을  $z$ 라 정의하여, 미소 쉘요소의 각 방향의 변위를  $u, v, w$ 라 하고, 처짐에 의한 각 변위를  $\beta_x, \beta_\theta$ 라 하면 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있다. 전단변형효과를 무시한 얇은 쉘이론에 의한 비등방성 원통형 쉘의 변위 벡터 ( $\delta_{CSK}$ ) 및 변형률 벡터 ( $\varepsilon_{CSK}$ )와 전단변형효과를 고려한 두꺼운 쉘이론에 의한 비등방성 원통형 쉘의 변위 벡터 ( $\delta_{CSM}$ ) 및 변형률 벡터 ( $\varepsilon_{CSM}$ )와 각각 식 (1)~(4)와 같이 나타낼 수 있다(Robert M. Jones, 1975; H. Marshall, 1981; J. N. Reddy, 1981; Eduard Ventsel Theodor Krauthammer, 2001).

$$\delta_{CSK} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \bar{\beta}_x \\ \bar{\beta}_\theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\delta_{CSM} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} + \phi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{CSK} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_\theta \\ \varepsilon^0_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_\theta \\ \bar{\kappa}_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSK} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{CSM} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_\theta \\ \varepsilon^0_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSM} \quad (4)$$

여기서,

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_\theta \\ \varepsilon^0_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\kappa_{CSK} = \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_\theta \\ \bar{\kappa}_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSK} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\kappa_{CSM} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSM} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R} + \beta_\theta \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서,  $\varepsilon^0_x, \varepsilon^0_\theta, \varepsilon^0_{x\theta}$ 는 쉘의 중면에서의 발생하는 수직 및 전단변형률,  $\bar{\kappa}_x, \bar{\kappa}_\theta, \bar{\kappa}_{x\theta}$ 와  $\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}$ 는 휨에 의해 발생하는 얇은 쉘이론과 두꺼운 쉘이론에서의 곡률,  $\gamma_{\theta z}, \gamma_{xz}$ 는 쉘의 전단변형률을 각각 나타낸다.

## 2.2 단면력과 변형률관계

비등방성 원통형 쉘의 구조축에 대한 응력-변형률 관계식은 재료축의 강도를 좌표 변환하여 식 (9)~(10)과 같이 표시할 수 있다 (Wilhelm Flugge, 1973; Hou-Cheng Huang, 1989; J. N. Reddy, 1995).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서,  $[\bar{Q}_{ij}]$ 는 비등방성 쉘의 재료축에서의 재료 강도를 구조축으로 좌표변환하여 구한 재료강도를 나타낸다. Fig. 2의 원통형 쉘의 단면력을 얇은 쉘이론과 두꺼운 쉘이론에 의한 변형률과의 관계는 식(11)~식(15)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSK} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_\theta \\ \bar{\kappa}_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSM} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSK} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_\theta \\ \bar{\kappa}_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix}_{CSM} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix}_{CSM} = \sum_{k=1}^N \int_{z^k}^{z^{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}_{CSM} \quad (15)$$

여기서,  $A_{ij}$ 는 면내력강도,  $B_{ij}$ 는 휨-면내력강도,  $D_{ij}$ 는 휨강도,  $K$ 는 전단보정계수를 의미하며 각각 식 (16)~(17)과 같다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}_{ij}]_k (1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (16)$$

$$A_{ij} = K \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 4, 5) \quad (17)$$

여기서,  $h$ 는 쉘의 벽두께,  $K=5/6$  이다.

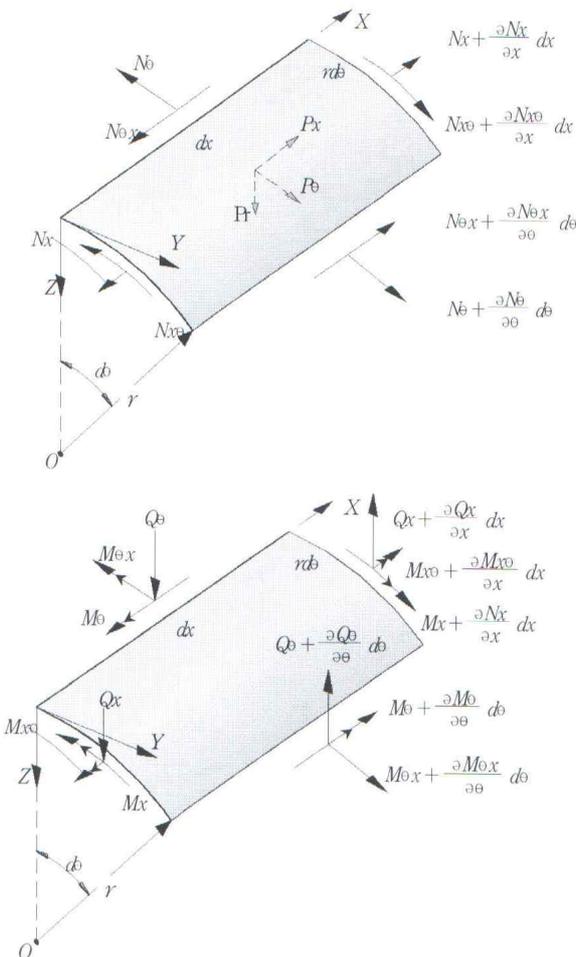


Fig. 2 원통형 쉘 요소의 단면력

### 2.3. 요소내 변위와 형상함수

직각곡선좌표계로 이루어진 곡선형식은 사각형 형식

과 비교할 때 유사한 거동을 가지나 사각형 형식보다 더 일반적인 경우라고 볼 수 있다. 본 연구에서는 자연좌표계( $r,s$ )를 사용하여 직각곡선좌표계 ( $x, \theta, z$ )와 요소변위를 같은 보간함수 ( $h_i$ )로 나타낼 수 있는 4절점 “Iso-parametric 요소”를 사용하였으며, 쉘요소내의 임의의 점( $x, \theta$ )에서의 얇은 쉘이론과 두꺼운 쉘이론에 의한 변위는 형상함수를 이용하여 요소절점의 변위로 나타내면 식 (18)과 같다.

$$\delta_{CSK} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 H_i(r, s) \delta^i_{CSK} \quad (18)$$

여기서,

$$\delta^i_{CSK} = \begin{Bmatrix} u(r, s) \\ v(r, s) \\ w(r, s) \\ \beta_x(r, s) \\ \beta_\theta(r, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(r, s) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H_1(r, s) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & H_1(r, s) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & H_1(r, s) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_1(r, s) & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \beta_{x_i} \\ \beta_{\theta_i} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\delta_{CSM} = \begin{Bmatrix} u(r, s) \\ v(r, s) \\ w(r, s) \\ \beta_x(r, s) \\ \beta_\theta(r, s) \end{Bmatrix}_{CSM} = \sum_{i=1}^4 H_i(r, s) \delta^i_{CSM} \quad (20)$$

$$\delta^i_{CSM} = \begin{Bmatrix} u(r, s) \\ v(r, s) \\ w(r, s) \\ \beta_x(r, s) \\ \beta_\theta(r, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(r, s) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H_1(r, s) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & H_1(r, s) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & H_1(r, s) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_1(r, s) & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \beta_{x_i} \\ \beta_{\theta_i} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

### 2.4 변형률 매트릭스

전단변형효과를 무시한 얇은 쉘이론과 전단변형효과를 고려한 두꺼운 쉘이론에 의한 비등방성 원통형 쉘의 변형률과 변위관계는 식(22)~(23)과 같다.

$$\varepsilon_{CSK} = [B^1, \dots, B^4] \begin{Bmatrix} u(r, s) \\ v(r, s) \\ w(r, s) \\ \beta_x(r, s) \\ \beta_\theta(r, s) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 B^i \delta^i_{CSK} \quad (22)$$

$$\varepsilon_{CSM} = [B^1, \dots, B^4] \begin{Bmatrix} u(r, s) \\ v(r, s) \\ w(r, s) \\ \beta_x(r, s) \\ \beta_\theta(r, s) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 B^i \delta^i_{CSM} \quad (23)$$

여기서,

$$[B]^i = \begin{bmatrix} B^A & 0 & 0 \\ 0 & B^F & 0 \\ 0 & 0 & B^S \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[B]^A = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_i}{R\partial\theta} \\ \frac{\partial H_i}{R\partial\theta} & \frac{\partial H_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (25-1)$$

$$[B]^F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial H_i}{R\partial\theta} \\ 0 & -\frac{\partial H_i}{R\partial\theta} & -\frac{\partial H_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$[B]^S = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H_i}{\partial x} & -H_i & 0 \\ -\frac{\partial H_i}{R\partial\theta} & 0 & -H_i \end{bmatrix} \quad (25-3)$$

변형률 매트릭스  $B^i$  에 있는 형상함수  $H_i$ 는 자연 좌표계(r,s)로 정의 되어 있기 때문에 극좌표계(x,θ)로 편미분하기 위해서 좌표변환을 해야한다. 형상함수의 극좌표계(x,θ)에 대한 편도함수는 Jacobian 매트릭스를 사용하여 자연좌표계에 대한 편도함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} H_i \\ \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

식 (26)에서  $[J]^{-1}$ 은 식(27)과 같다.

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial s} & -\frac{\partial x}{\partial s} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

따라서 얇은 셸이론과 두꺼운 셸이론에 의한 비등방성 원통형 셸의 변형률 매트릭스  $B_{CSK}^i, B_{CSM}^i$ 은 식 (28) ~ (29)과 같이 표시할 수 있다.

$$B_{CSK}^i = \begin{bmatrix} 0 & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & 0 \\ 0 & 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}) \\ 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial r}) & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial r}) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$B_{CSM}^i = \begin{bmatrix} 0 & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & 0 \\ 0 & 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}) \\ 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial r}) & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial r}) \\ -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & -h_i & 0 \\ -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial r}) & 0 & -h_i \end{bmatrix} \quad (29)$$

## 2.5 요소강도 매트릭스

얇은 셸이론과 두꺼운 셸이론에 의한 비등방성 원통형 셸의 total potential energy는 식(30)~(31)로 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{CSK} = \frac{1}{2} \int_A (N_x \varepsilon_x + N_\theta \varepsilon_\theta + N_{x\theta} \varepsilon_{x\theta} + M_x \bar{\chi}_x + M_\theta \bar{\chi}_\theta + M_{x\theta} \bar{\chi}_{x\theta} - \int_A q w dA) \quad (30)$$

$$\Pi_{CSK} = \frac{1}{2} \int_A (N_x \varepsilon_x + N_\theta \varepsilon_\theta + N_{x\theta} \varepsilon_{x\theta} + M_{x\theta} \chi_x + M_\theta \chi_\theta + M_{x\theta} \chi_{x\theta}) dA + Q_x \Phi_x + Q_\theta \Phi_\theta dA - \int_A q w dA \quad (31)$$

본 연구에서의 비등방성 원통형 셸요소 강도 매트릭스는 전 Postretinal energy(=π)의 정류조건으로부터 구할 수 있다. 즉.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = \frac{\partial \pi_e}{\partial \delta_e} = 0 \quad (32)$$

결국 얇은 셸이론과 두꺼운 셸이론에 의한 비등방성 원통형 셸요소 강도 매트릭스는 식(33)과 식(34)과 같다.

$$\begin{aligned} K_{CSK}^e &= \int_{Ae} B_{CSK}^T D_{CSK} B_{CSK} R dx d\theta \\ &= \int_{Ae} ([B_{1(CSK)} \ B_{2(CSK)} \ \dots \ B_{4(CSK)}]^T \mathcal{D} [B_{1(CSK)} \ B_{2(CSK)} \ \dots \ B_{4(CSK)}]) R dx d\theta \\ &= \int_{Ae} \begin{pmatrix} B_{1(CSK)}^T DB_{1(CSK)} & \dots & B_{1(CSK)}^T DB_{4(CSK)} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{4(CSK)}^T DB_{1(CSK)} & \dots & B_{4(CSK)}^T DB_{4(CSK)} \end{pmatrix} R dx d\theta \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_{CSK}^T D_{CSK} B_{CSK} \|J\| d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$[D]_{CSK} = \begin{bmatrix} D_{CSK}^A & 0 \\ 0 & D_{CSK}^F \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} K_{CSM}^e &= \int_{Ae} B_{CSM}^T D_{CSM} B_{CSM} R dx d\theta \\ &= \int_{Ae} ([B_{1(CSM)} \ B_{2(CSM)} \ \dots \ B_{4(CSM)}]^T \mathcal{D} [B_{1(CSM)} \ B_{2(CSM)} \ \dots \ B_{4(CSM)}]) R dx d\theta \\ &= \int_{Ae} \begin{pmatrix} B_{1(CSM)}^T DB_{1(CSM)} & \dots & B_{1(CSM)}^T DB_{4(CSM)} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{4(CSM)}^T DB_{1(CSM)} & \dots & B_{4(CSM)}^T DB_{4(CSM)} \end{pmatrix} R dx d\theta \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_{CSM}^T D_{CSM} B_{CSM} \|J\| d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} ([B_{1(CSM)} \ B_{2(CSM)} \ \dots \ B_{4(CSM)}]^T \mathcal{D} [B_{1(CSM)} \ B_{2(CSM)} \ \dots \ B_{4(CSM)}]) \|J\| d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_{CPM}^T D_{CPM} B_{CPM} \|J\| d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$[D]_{CSK} = \begin{bmatrix} D_{CSM}^A & 0 \\ 0 & D_{CSM}^F \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[D]_{CSM} = \begin{bmatrix} D_{CSM}^A & 0 & 0 \\ 0 & D_{CSM}^C & 0 \\ 0 & 0 & D_{CSM}^S \end{bmatrix} \quad (37)$$

한편, 식 (33)과 (35) 중에서  $B_{CSK}^T D_{CSK} B_{CSK} \| J \| d\xi d\eta$ ,  $B_{CSM}^T D_{CSM} B_{CSM} \| J \| d\xi d\eta$ 는 대단히 복잡하기 때문에 직접 적분하지 않고 수치적분을 하게 되며 일반적으로 식 (38)과 같은 Gauss-Legendre의 구적법을 사용한다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} K(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^{-1} \sum_{i=1}^n w_i K(\xi_i, \eta) d\eta = \int_{-1}^{-1} \phi(\eta) d\eta \\ &= \sum_{i=1}^n \phi(\eta_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j K(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad (38)$$

여기서,  $\xi_i, \eta_j$ 는  $i, j$ 번째 Gauss point의  $\xi, \eta$ 의 좌표이다.

### 3. 수치해석의 적용

본 연구의 해석방법에 의한 수치해석을 위해 원통형 쉘 구조물을 Fig. 3 같이 모델링을 하여, Table 1에서와 같은 재료의 물성치를 사용하여 해석하였다.

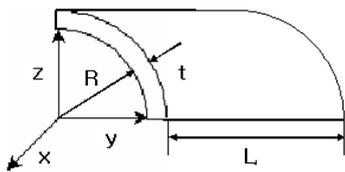


Fig. 3 원통형 쉘의 해석모델

Table 1 등방성재료 및 비등방성재료의 물성치

	engineering constants
isotropic material	$E = 3 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ,
	$R = 300 \text{ m}, t = 2.5 \text{ m},$
	$L = 300 \text{ m}$
anisotropic materials	$E_1 = 20.83 \times 10^6 \text{ KN/m}^2, E_2 = 10.94 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
	$G_{13} = 3.71 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
	$G_{12} = 6.10 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
	$G_{23} = 6.9 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
	$\nu_{12} = 0.44, \nu_{21} = 0.23$

Table 2 얇은 쉘 이론 및 두꺼운 쉘 이론에 의한 등방성 원통형 쉘의 최대변위(Dz) (강영주 등, 2003)

Theoretical	Vertical displacement (Dz)(m)	
	MIDAS/CIVIL (version 6.1.1)	
	Thick cylindrical shell theory	Thin cylindrical shell theory
$4.820 \times 10^{-2}$	$4.995 \times 10^{-2}$	$4.762 \times 10^{-2}$

Table 2에서는 해석결과의 타당성을 알아보기 위해 등방성 원통형 쉘의 최대변위를 얇은 쉘이론 및 두꺼운 쉘이론에 의한 해석결과를 해석해와 비교 검토하였다. 두꺼운 쉘이론에 의한 해석결과에서는 쉘의 최대변위(Dz)가 이론적 해석해와 약 3.455%차이를 보이며, 얇은 쉘이론에 의한 해석결과에서는 이론적 해석해와 약 9.98%의 차이를 나타내었다.

Fig. 4는 Table 1의 재료 물성치를 사용하여 4번 단 순지지된 등방성 원통형 쉘의 얇은 쉘이론과 두꺼운 쉘이론에 의한 쉘 전체에 대한 해석결과를 제시하였다.

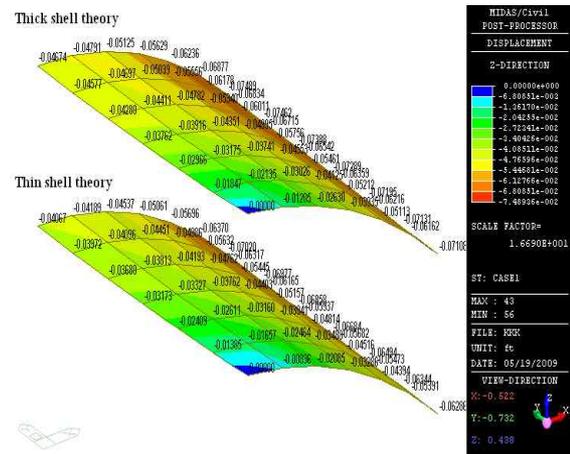


Fig. 4 등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)

Table 3 4변이 단순지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 폭-두께비(t/a)에 따른 최대 변위(Dz).

폭-두께비(t/L)	Thick Shell theory	Thin shell theory	차이(%)
0.001	0.02742	0.02741	0
0.01	0.01277	0.01263	1.1
0.02	0.00910	0.00790	13.2
0.04	0.00544	0.00311	42.8
0.06	0.00412	0.00158	61.7
0.08	0.00351	0.00096	72.6
0.10	0.00317	0.00065	79.5
0.15	0.00275	0.00034	87.6
0.2	0.00256	0.00023	91.0

Table 3은 비등방성 원통형 쉘의 얇은 쉘 이론과 전단변형을 고려한 두꺼운 쉘 이론에 의한 쉘의 폭-두께비에 따른 최대처짐의 해석결과를 나타내었다. 폭-두께비가 0.02이상에서는 13.2%이상의 차이를 보이고 있다. 따라서 폭-두께비가 0.02이상의 쉘의 해석에서는 두꺼운 쉘이론을 적용하는 것이 보다 정확한 해석결과를 기대할 수 있다.

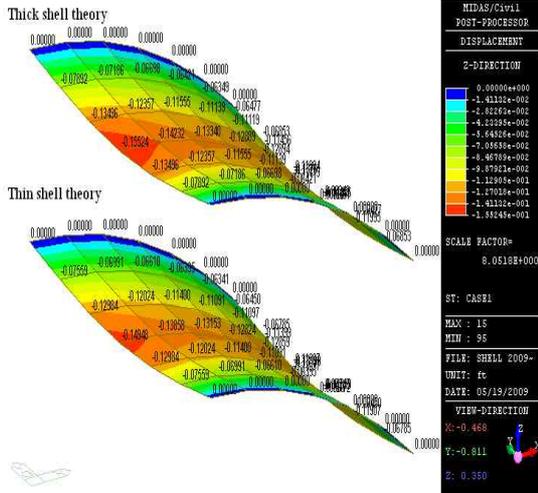


Fig. 5 2변이 자유, 다른 2변이 단순지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)

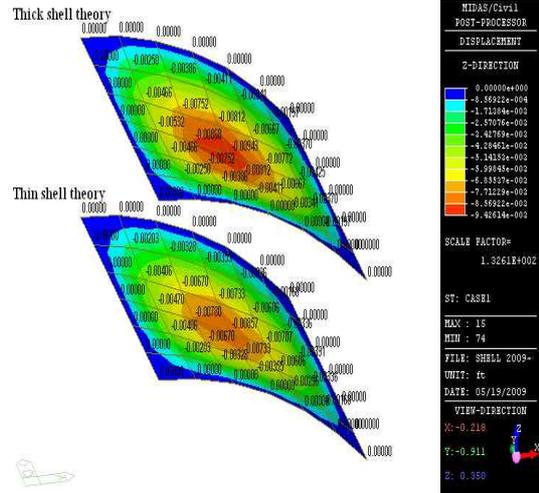


Fig. 8 2변이 단순지지, 다른 2변이 고정지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)

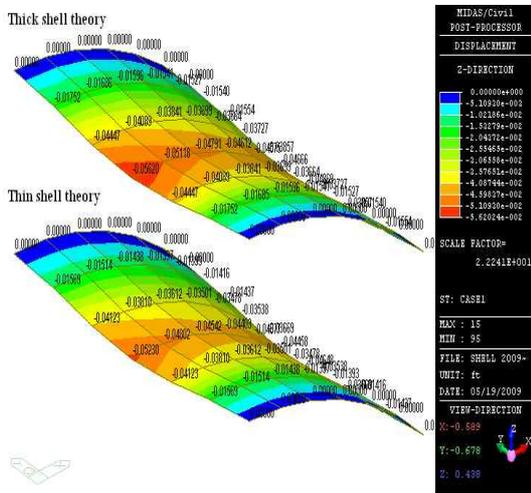


Fig. 6 2변이 자유, 다른 2변이 고정지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)

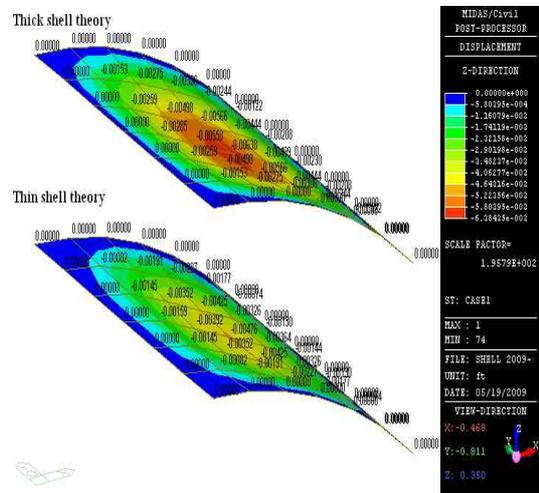


Fig. 9 4변이 고정지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)

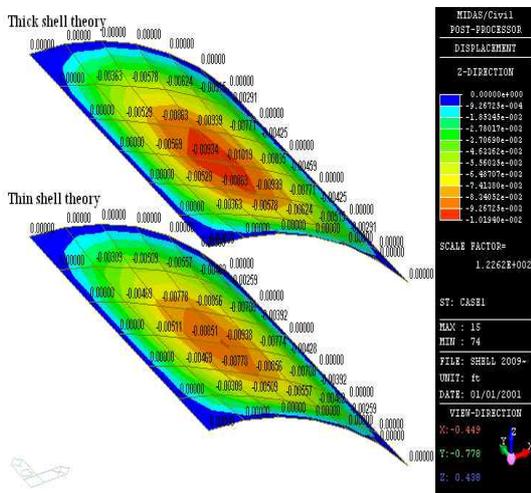


Fig. 7 4변이 단순지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)

본 연구에서 Fig. 5~9은 여러 가지 경계조건을 갖는 원형 원통형 쉘의 해석결과이다.

Fig. 5는 2변이 자유, 다른 2변이 단순지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)로서 해석결과 최대변위에서 얇은 쉘 이론과 전단변형을 고려한 두꺼운 쉘 이론에 의한 해석결과에서 약 3.7% 차이를 보이며, Fig. 6에서 같이 2변이 자유, 다른 2변이 고정지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)는 얇은 쉘 이론과 전단변형을 고려한 두꺼운 쉘 이론에 의한 해석결과가 최대변위에서 약 6.9% 차이를 보였다.

4변이 단순지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)는 Fig. 7 과 같이 얇은 쉘 이론과 전단변형을 고려한 두꺼운 쉘 이론에 의한 해석결과가 최대변위에서 약 7.9% 차이를 보였으며, 2변이 단순지지, 다른 2변이 고정지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)는 Fig. 8 와 같이 얇은 쉘 이론과 전단변형을 고려한 두

꺼운 쉘 이론에 의한 해석결과가 최대변위에서 약 9.1% 차이를 보이고 있으며, 4변이 고정지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 변위(Dz)는 Fig. 9와 같이 얇은 쉘 이론과 전단변형을 고려한 두꺼운 쉘 이론에 의한 해석결과에서는 최대변위가 약 25.4% 차이를 보였다.

#### 4. 결론

본 연구는 비등방성 재료로 구성되고, 여러 가지 경계조건을 갖는 원통형 쉘의 거동을 분석하였다. 비등방성 원통형 쉘에서 얇은 쉘 이론과 두꺼운 쉘이론에 의한 쉘의 폭-두께비에 따른 해석결과에서 폭-두께비가 0.02이상에서 최대 처짐이 약 13.2%이상의 차이를 보이고 있어, 폭-두께비가 0.02이상의 쉘의 해석에서는 두꺼운 쉘이론을 적용하는 것이 보다 정확한 해석결과를 얻을 수 있다.

경계조건에 따른 해석결과에서 4변이 고정지지 조건인 비등방성 원통형 쉘에서 얇은 쉘 이론과 두꺼운 쉘이론에 의한 쉘의 최대 변위값(Dz)에서 약 25.4%의 최대 차이를 보였으며, 2변이 자유, 다른 2변이 단순지지 조건인 비등방성 원통형 쉘의 최대 변위값(Dz)에서 약 3.7%의 최소 차이를 보였다. 또한 원통형 쉘의 변위값이 등방성 재질보다는 비등방성 재질로 구성된 경우에 훨씬 전단변형효과와 영향이 커짐을 알 수 있다. 다양한 경계조건과 재질이 비등방성으로 구성된 쉘의 경우 전단변형효과를 고려한 본 논문에서 제시한 두꺼운 쉘이론을 적용하는 것이 더 정확한 해를 기대할 수 있으며, 따라서 비등방성 원통형 쉘구조물의 해석 및 설계에 본 연구에서의 해석기법이 적용될 수 있을 것으로 보며, 얇은 쉘 이론과 두꺼운 쉘이론에 의한 비등방성 얇은 원통형 쉘과 비등방성 두꺼운 원통형 쉘 해석에서 사용되는 유한요소법에 의한 이론적 해석과정을 명확한 밝힘으로서 설계자들에게 이해를 돕는데 기여할 것으로 본다.

#### 참고 문헌

1. 장석윤, 윤석호(1992) 전단변형을 고려한 비등방성 대칭적층 구형관의 해석, *한국강구조학회논문집* 제4권 제2호, pp187-199.
2. 장석윤, 이원홍(1992) 전단변형을 고려한 주변고정 비등방성 대칭적층 원형관의 해석, *한국강구조학회 논문집* 제4권 제1호, pp143-154.
3. 강영주의 외 57인(2003) Midas Civil User's Manual Volume III (Version 6.1.1), MIDAS Information Technology Co., Ltd.
4. Eduard Ventsel Theodor Krauthammer(2001) Thin Plates and Shells, Marcel Dekker, Inc. pp.411-pp421.
5. H. MARSHALL(1981) Composite Structures, Applied Science Publishers LTD, pp.521-pp534.
6. Hou-Cheng Huang(1989) Static and Dynamic

- Analyses of Plates and Shells, Springer\_Verlag Berlin Heidelberg Company, Inc., pp.125-pp210.
7. J. N. Reddy(1981) Mechanics of Laminated Composite shells, CRC press.
8. J. N. Reddy(1995) Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Willy & Sons, New York, pp.233-247.
9. Robert M. Jones(1975) Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill.
10. Stephen P. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger (1959) Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill 2nd Ed., pp.118-120.
11. Wilhelm Flugge(1973) Stresses in Shells, Springer -Verlag New York Heidelberg Berlin, pp.204-pp235.