

복합적층 및 샌드위치판 전단변형함수에 관한 상호비교연구 Comparison of Various Shear Deformation Functions for Laminated Composite/Sandwich Plates

박원태 Park, Won-Tae* · 장석윤 Chang, Suk-Yoon** · 천경식 Chun, Kyoung-Sik***†

(Received July 31, 2010 ; Revised August 23, 2010 ; Accepted August 29, 2010)

ABSTRACT

In this paper, we used various shear deformation functions for modelling isotropic, symmetric composite and sandwich plates discretized by a mixed finite element method based on the Lagrangian/Hermite interpolation functions. These shear deformation theories uses polynomial, trigonometric, hyperbolic and exponential functions through the thickness direction, allowing for zero transverse shear stresses at the top and bottom surfaces of the plate. All shear deformation functions are compared with other available analytical/3D elasticity solutions, are predicted the reasonable accuracy for investigated problems. Particularly, The present results show that the use of exponential shear deformation theory (Karama et al. 2003; Aydogu 2009) provides very good solutions for composite and sandwich plates.

요 지

본 연구에서는 Lagrangian 및 Hermite 보간함수를 혼합정식화한 유한요소법과 다양한 전단변형함수로 등방성, 대칭 적층 및 샌드위치판 모델을 제시하였다. 제시된 전단변형이론은 판의 상하면에서 전단응력이 0이 되는 다항식, 삼각함수, 쌍곡삼각함수 및 지수함수로 구성되어 있다. 모든 전단변형함수는 해석해, 정해 및 기발표된 유한요소 결과치와 비교하였으며, 합리적인 정확도를 갖는 것으로 예측되었다. 특히, 지수형태의 전단변형함수(Karama et al. 2003; Aydogu 2009)가 적층 및 샌드위치판 해석에 있어서 상대적으로 가장 우수한 결과를 보였다.

Key Words: Shear deformation function(전단변형함수), Composite plats(복합적층판), Mixed finite element(혼합유한요소)

1. 서 론

섬유보강 복합재료는 높은 비강도, 비강성으로 인해 구조 경량화가 요구되는 항공산업 뿐 만 아니라 조선, 자동차, 토목 등에 널리 사용되어지고 있다. 이러한 복합적층 구조는 이방성 재료 특성을 갖는 서로 다른 재료들을 적층시키고, 각 층의 섬유 보강각도에 의해 강성을 효과적으로 발휘할 수 있는 구조로서, 보다 정확한 거동을 구현하기 위한 해석기법 및 이론에 대한 연구가 지속적으로 진행되어 왔다.

특히, 사용성이 높고 다양한 적층구조체는 전단계수가 탄성계수의 1/25~1/40에 불과하기 때문에 횡방향 전단변형은 거동에 상당한 영향을 미친다. 전단변형 효과를 고려하지 않은 고전적인 판 이론은 두께가 얇은 경우를 제외한 등방성 재료 또는 복합적층을 갖는 두꺼운 판의 경우 오차가 크게 발생한다. 즉, 고전이론은 평판처짐 등의 변형 및 좌굴하중을 과소평가하며, 고유진동수를 과대 예측하는 것으로 알려져 있다.

Reissener(1945)가 판의 두께방향으로 전단응력분포가

일정하다고 가정함으로써 처음으로 전단변형 효과를 고려하였으며, Mindlin(1951)은 전단응력분포가 포물선 형태를 가지므로 전단변형 및 응력의 보정을 위하여 Reissener의 이론을 수정하고자 전단보정계수를 도입하였다. 그러나, 1차전단변형이론은 판의 상하면($z = \pm h/2$)에서의 전단응력에 대한 경계조건($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)을 만족시키지 못함에 따라 이를 해결하기 위한 다양한 전단변형이론이 제시되었다.

Levinson(1980)과 Murthy(1981)는 Whitney and Pagano(1970)의 1차 전단변형이론의 평행방정식을 이용하여 종방향 수직 압축/인장을 무시한 고차이론을 제안하였다. 그 이후 Reddy(1984)는 Levinson과 Murthy의 이론을 발전시킨 단순화된 고차전단변형이론(Parabolic shear deformation theory, PSDT)을 제안하였고, 횡, 자유진동 및 좌굴해석을 수행하였다(Phan and Reddy, 1985). Touratiar(1991)과 Solatos(1992)는 전단변형률 분포를 각각 삼각함수(Trigonometric function, TSDT)와 쌍곡삼각함수(Hyperbolic trigonometric function, HSDT)로 근사화한 전단변형이론을 제안하였으며, Idlbi et al.(1997)은 크로스-플

* 정회원.공주대학교 건설환경공학부 교수, 공학박사

** 정회원.서울시립대학교 토목공학과 명예교수 / (주)이산 상임고문

***† 정회원.(주)마우컨설팅 차장, 공학박사, 토목구조기술사, 교신저자(chunkspe@nate.com)

라이 적층판을 해석모델로 설정하고 PSDT와 TSDT에 의한 휨 거동차이를 비교하였다. 최근, Kant and Swaminathan(2002)는 Talyor 전개식을 z^3 항까지 확장시켜 종방향 수직변형률/응력 및 종방향 뒤틀림을 고려한 변위장을 제시하였으며, 이를 천경식 등(2003)과 박원태 등(2004)은 유한요소로 확장하였으나, 절점당 12개 자유도(D.O.F)를 갖는 단점을 갖는다. Karama et al.(2003)는 적층보의 휨 거동 분석을 통해 전단변형함수를 지수함수(Exponential function)로 제안하였으며, 천경식 등(2003)은 Layerwise 이론에 기초한 삼각함수 지그재그 모델 등을 개발하였으나, 적층보에 제한적이다.

본 연구에서는 Lagrangian 및 Hermite 보간함수를 혼합정식화한 유한요소모델을 토대로 전단변형함수(Levinson 1980; Touratier 1991; Soldatos 1992; Karama et al. 2003; Aydogu 2009)별 프로그램을 작성하고, 등방성, 복합적층 및 샌드위치판 등 다양한 해석예제로 거동차이를 상호 비교·분석하고자 한다. 차후 본 논문이 고차 전단변형을 고려한 적층판 유한요소 개발과 작성시 중요한 참고자료가 될 것으로 기대되며, 아울러 각각의 전단변형함수에 따른 강성행렬식을 전개하여 개발자의 이해를 도모하고자 한다.

2. 기본이론

2.1 변위장 및 지배방정식

본 연구에서는 다양한 전단변형이론을 토대로 임의의 점 (x, y, z) 에서의 변위장 u, v 를 두께에 대해서 1차 및 함수 $f(z)$ 로 전개·확장하고, w 는 두께에 따라 일정하다고 가정한다. 즉, x, y 축 방향에 대한 변위의 고차항은 근사적인 layerwise 거동을 나타낼 수 있는 다항식, 삼각함수 및 지수함수 등으로 설정하였으며, z 축 방향에 대한 변위는 고려하지 않는다. 이 때 층간 분리현상은 고려하지 않으며 완전접착으로 일체거동한다고 가정한다. 복합적층판의 임의의 점에서의 변위장은 식 (1)과 같이 설정한다.

Table 1 전단변형이론 및 함수

구분	전단변형함수 $f(z)$
Levinson(1980), Murthy(1981) and Reddy(1984)	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Touratier(1991)	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Soldatos(1992)	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Karama et al.(2003)	$z e^{-2(z/h)^2}$
Aydogu(2009)	$z \cdot \alpha^{-2(z/h)^2/\ln 3}, \alpha = 3$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\phi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\phi_y \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \tag{1}$$

u_0, v_0, w_0 는 각각 중립면에서의 면내변위와 횡방향 변위를, ϕ_x, ϕ_y 는 y 축과 x 축의 회전각을 의미한다. 그리고, $f(z)$ 는 전단변형함수로서 Table 1에 비교하여 정리하였다. 이 때, 적층요소의 중립면을 x - y 축으로, 중립면에 수직인 축을 z 축으로 설정하였으며, θ 는 섬유 보강각도를 의미한다 (Fig. 1 참조). 적층조건은 각각 동일한 두께와 재료를 가진 층을 아래에서 윗방향 (+ z 방향)으로 적층하되, 화이버 보강각도는 x 축을 기준으로 반시계방향을 +로 설정하였다.

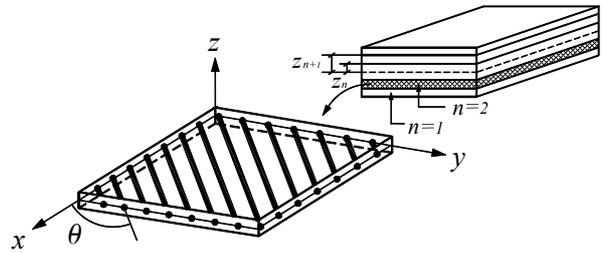


Fig. 1 적층요소와 좌표계

식(1)의 변위장을 탄성론의 변형률-변위 관계식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \epsilon_x^0 - z \kappa_x^1 + f(z) \kappa_x^f \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \epsilon_y^0 - z \kappa_y^1 + f(z) \kappa_y^f \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ &= \gamma_{xy}^0 - 2z \kappa_{xy}^1 + f(z) \kappa_{xy}^f \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial f(z)}{\partial z} \phi_y = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial f(z)}{\partial z} \phi_x = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \gamma_{xz}^0 \end{aligned} \tag{3}$$

적층판의 평형방정식을 유도하고자 가상일의 원리를 적용, 정리하면 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} &= q \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x^f}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^f}{\partial y} - Q_x^f &= 0 \\ \frac{\partial M_y^f}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^f}{\partial x} - Q_y^f &= 0 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + E_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + E_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + E_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + E_{26} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{xy} &= A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + E_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + E_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + E_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + F_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + F_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + F_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + F_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + F_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + F_{26} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + F_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + F_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + F_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x^f &= E_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + E_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - F_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - F_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2F_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + H_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + H_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + H_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y^f &= E_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + E_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - F_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - F_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2F_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + H_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + H_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + H_{26} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy}^f &= E_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + E_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - F_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - F_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &\quad - 2F_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + H_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + H_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + H_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$Q_y^f = \bar{A}_{44} \phi_y + \bar{A}_{45} \phi_x$$

$$Q_x^f = \bar{A}_{45} \phi_y + \bar{A}_{55} \phi_x$$

식(4)에서 N 은 면내력, M 은 모멘트, Q 는 전단력이며, M^f, Q^f 은 전단변형함수에 의한 단면력으로 식(5)와 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_x^f \\ M_y^f \\ M_{xy}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} \\ E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^1 \\ \kappa_y^1 \\ \kappa_{xy}^1 \\ \kappa_x^f \\ \kappa_y^f \\ \kappa_{xy}^f \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y^f \\ Q_x^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{44} & \bar{A}_{45} \\ \bar{A}_{45} & \bar{A}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}$$

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ 및 \bar{A}_{ij} 는 단면력과 변형률의 관계를 나타내기 위하여 사용하는 강성값으로, 각각 인장, 연계, 휨 강성행렬과 전단변형함수로 인한 강성행렬이다. 강성행렬은 식(6)과 같이 적분식으로 표현되며, 부록 A-I에 전개식을 수록하였다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [1, z, z^2] dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (6a)$$

$$(E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [f(z), zf(z), f^2(z)] dz \quad (6b)$$

$$\bar{A}_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (6c)$$

2.2 유한요소 정식화

본 논문에서는 다양한 전단변형이론에 따른 복합적층판 및 샌드위치판의 거동을 비교·분석하기 위해 4절점 유한요소를 적용하였으며, 요소내 한 절점당 7개 자유도($u_0, v_0, w_0, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y, \phi_x, \phi_y$)를 갖는다. 형상함수(Shape function)는 처짐에 대해 포물선 함수인 Hermite 보간함수를, 면내변위 및 처짐각에 대해서는 선형 함수인 Lagrangian 보간함수를 병용하였다.

식(7)은 평판요소의 전체 강성행렬은 나타낸 것이다.

$$[K]_r = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R]^T [S][R] d\xi d\eta \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^1 \\ \kappa_y^1 \\ \kappa_{xy}^1 \\ \kappa_x^f \\ \kappa_y^f \\ \kappa_{xy}^f \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yx}^0 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -f_{i,xx} & -g_{i,xx} & -h_{i,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{i,yy} & -g_{i,yy} & -h_{i,yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2f_{i,xy} & -2g_{i,xy} & -2h_{i,xy} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ w_x \left(= \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ w_y \left(= \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서, $[R]$ 은 변형률-변위행렬로서 $[\epsilon] = [R][\delta]$ 이며 식(8)과 같다. $[S]$ 는 식(5)에서 표현한 단면력과 변형률 관계식이다. N_i 는 Lagrangian 2차 보간함수이며, f_i, g_i, h_i 는 Hermite 3차 보간함수를 의미한다. 세부적인 함수식은 부록 A-II에 수록하였다.

3. 해석 예 및 결과분석

복합적층 및 샌드위치 구조물은 등방성과 달리 전단 변형효과에 민감하게 거동한다. 이에 최근까지 발표된 대표적인 전단변형함수에 따른 거동특성을 분석하고자 폭두께비, 길이비 및 강성비를 매개변수로 설정하였다. 우선, 요소수에 따른 해석치의 변동영향을 최소화하기 위해 Fig. 2와 같이 수렴성을 분석하여 적정분할수를 24×24로 설정하였다.

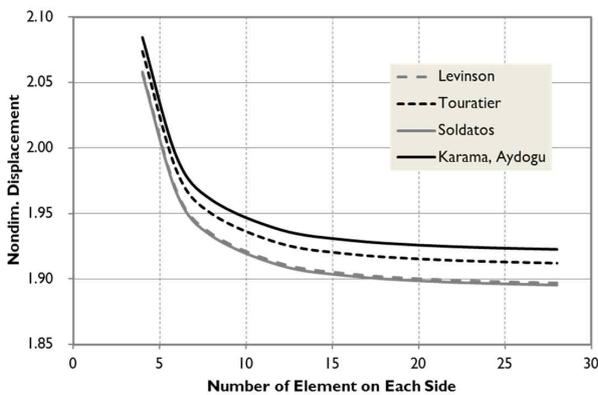


Fig. 2 길이비에 따른 임계좌굴하중

4.1 등분포하중을 받는 등방성 판

등분포하중을 받는 단순지지된 등방성판의 탄성계수 (E)와 포아송 비(ν)는 각각 1.0과 0.3이다. 해석결과치는 다음 식으로 무차원화하여 Table 2에 비교하였다.

$$\bar{w} = w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) \frac{100Eh^3}{qa^4}, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{qa^2}$$

다양한 전단변형함수 $f(z)$ 에 대한 본 연구의 유한 요소 결과값은 Reddy(1984)의 해석적인 해(A analytical solution)와 비교하여 유사한 거동을 보였으며, 본 연구의 비교대상들은(Levinson, Touratier, Soldatos, Karama and Aydogu) 모든 폭두께비(a/h)에서 상호 일치한 결과값을 나타내고 있다. 즉, 등방성 판은 전단변형함수의 영향을 크게 받지 않는다.

Table 2 등분포하중을 받는 등방성 판의 처짐 및 응력

a/h	구분	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$
10	Reddy	4.770	0.2899
	Present (Levinson)	4.6744	0.2899
	Present (Touratier)	4.6740	0.2900
	Present (Soldatos)	4.6744	0.2898
	Present (Karama)	4.6730	0.2901
	Present (Aydogu)	4.6730	0.2901
20	Reddy	4.570	0.2683
	Present (Levinson)	4.5018	0.2885
	Present (Touratier)	4.5017	0.2885
	Present (Soldatos)	4.5018	0.2885
	Present (Karama)	4.5014	0.2885
	Present (Aydogu)	4.5014	0.2885
50	Reddy	4.496	0.2667
	Present (Levinson)	4.4534	0.2881
	Present (Touratier)	4.4534	0.2881
	Present (Soldatos)	4.4534	0.2881
	Present (Karama)	4.4534	0.2881
	Present (Aydogu)	4.4534	0.2881

4.2 Sin하중을 받는 적층판

Sin하중(Sinusoidal transverse load) p 을 받는 단순지지된 복합적층판의 경우에 한하여 Pagano(1970) 및 Reddy(1984)의 해석치(A analytical Solution)과 비교하였다. 적층조건은 대칭 크로스-플라이에 한하여 동일한 두께를 갖는 직교이방성 층으로 구성되되, 재료물성치는 다음과 같다.

Table 3 Sin하중을 받는 복합적층판의 처짐 및 응력 ($a/b=1.0$, $[0/90/90/0]$)

a/h	구분	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	Pagano	1.9540	0.7200	0.6630	0.2920	0.2910	0.0467
	Reddy	1.8937	0.6651	0.6322	0.2389	0.2064	0.0440
	Present (Levinson)	1.8992	0.6662	0.6339	0.2398	0.2072	0.0445
	Present (Touratier)	1.9144	0.6841	0.6366	0.2471	0.2171	0.0455
	Present (Soldatos)	1.8976	0.6646	0.6336	0.2391	0.2063	0.0444
	Present (Karama)	1.9249	0.7014	0.6384	0.2541	0.2273	0.0464
	Present (Aydogdu)	1.9249	0.7014	0.6384	0.2541	0.2273	0.0464
10	Pagano	0.7430	0.5590	0.4010	0.1960	0.3010	0.0275
	Reddy	0.7147	0.5456	0.3888	0.1531	0.2640	0.0268
	Present (Levinson)	0.7174	0.5474	0.3900	0.1537	0.2651	0.0270
	Present (Touratier)	0.7225	0.5508	0.3922	0.1588	0.2799	0.0272
	Present (Soldatos)	0.7169	0.5471	0.3898	0.1532	0.2638	0.0270
	Present (Karama)	0.7267	0.5543	0.3941	0.1641	0.2953	0.0274
	Present (Aydogdu)	0.7267	0.5543	0.3941	0.1641	0.2953	0.0274
20	Pagano	0.5170	0.5430	0.3080	0.1560	0.3280	0.0230
	Reddy	0.5060	0.5393	0.3043	0.1234	0.2825	0.0228
	Present (Levinson)	0.5082	0.5413	0.3054	0.1240	0.2836	0.0230
	Present (Touratier)	0.5097	0.5422	0.3061	0.1278	0.3001	0.0230
	Present (Soldatos)	0.5081	0.5412	0.3053	0.1236	0.2821	0.0230
	Present (Karama)	0.5110	0.5431	0.3068	0.1317	0.3173	0.0231
	Present (Aydogdu)	0.5110	0.5431	0.3068	0.1317	0.3173	0.0231
100	Pagano	0.4385	0.5390	0.2760	0.1410	0.3370	0.0216
	Reddy	0.4343	0.5382	0.2708	0.1117	0.2897	0.0213
	Present (Levinson)	0.4363	0.5408	0.2719	0.1122	0.2909	0.0215
	Present (Touratier)	0.4364	0.5408	0.2719	0.1154	0.3081	0.0215
	Present (Soldatos)	0.4363	0.5408	0.2719	0.1119	0.2893	0.0215
	Present (Karama)	0.4364	0.5408	0.2719	0.1187	0.3259	0.0215
	Present (Aydogdu)	0.4364	0.5408	0.2719	0.1187	0.3259	0.0215

$$p = p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2$$

$$\nu_{12} = 0.25, E_2 = 1.0$$

수직처짐 및 면내·전단응력은 다음 식을 적용하여 무차원화하였다.

$$\bar{w} = w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \frac{100E_2h^3}{q_0a^4}, \bar{\sigma}_x = \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \frac{h^2}{q_0a^2}$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \text{ or } \frac{h}{6}\right) \frac{h^2}{q_0a^2}, \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right) \frac{h^2}{q_0a^2}$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \frac{h}{q_0a}, \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right) \frac{h}{q_0a}$$

Table 3은 적층배열 $[0/90/90/0]$ 을 갖는 정사변형 적층판의 무차원 최대처짐(\bar{w}) 및 응력($\bar{\sigma}, \bar{\tau}$)을 폭두께비 (a/h)에 따라 비교한 것이다. Table 4는 Table 3과 동일한 조건하에 적층배열 $[0/90/0]$ 에 대한 해석결과를 비교

Table 4 Sin하중을 받는 복합적층판의 처짐 및 응력 ($a/b=1.0$, $[0/90/0]$)

a/h	구분	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	Pagano	-	0.755	0.556	0.051
	Reddy	1.922	0.734	-	-
	Present (Levinson)	1.927	0.736	0.504	0.050
	Present (Touratier)	1.940	0.757	0.504	0.051
	Present (Soldatos)	1.926	0.734	0.504	0.050
	Present (Karama)	1.949	0.777	0.504	0.052
10	Pagano	-	0.590	0.288	0.029
	Reddy	0.713	0.568	-	-
	Present (Levinson)	0.715	0.570	0.270	0.028
	Present (Touratier)	0.721	0.575	0.272	0.028
	Present (Soldatos)	0.715	0.570	0.270	0.028
	Present (Karama)	0.726	0.579	0.273	0.028
100	Pagano	-	0.539	0.181	0.021
	Reddy	0.434	0.539	-	-
	Present (Levinson)	0.436	0.541	0.181	0.022
	Present (Touratier)	0.436	0.541	0.181	0.022
	Present (Soldatos)	0.436	0.541	0.181	0.022
Present (Karama)	0.436	0.541	0.181	0.022	

Table 5 Sin하중을 받는 복합적층판의 처짐 및 응력 ($a/b=3.0$, $[0/90/0]$)

a/h	구분	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	Pagano	2.8200	1.1000	0.1190	0.0334	0.3510	0.0281
	Reddy	2.6411	1.0356	0.1028	0.0348	0.2724	0.0263
	Present (Levinson)	2.6496	1.0381	0.1030	0.0350	0.2735	0.0265
	Present (Touratier)	2.6743	1.0694	0.1037	0.0357	0.2863	0.0270
	Present (Soldatos)	2.6470	1.0352	0.1029	0.0350	0.2723	0.0265
	Present (Karama)	2.6924	1.0995	0.1040	0.0362	0.2995	0.0274
10	Pagano	0.9190	0.7250	0.0435	0.0152	0.4200	0.0123
	Reddy	0.8622	0.6924	0.0398	0.0170	0.2859	0.0115
	Present (Levinson)	0.8658	0.6949	0.0400	0.0171	0.2871	0.0116
	Present (Touratier)	0.8734	0.7009	0.0402	0.0174	0.3034	0.0117
	Present (Soldatos)	0.8650	0.6944	0.0399	0.0171	0.2856	0.0116
	Present (Karama)	0.8804	0.7068	0.0405	0.0176	0.3207	0.0118
20	Pagano	0.6100	0.6500	0.0299	0.0119	0.4340	0.0093
	Reddy	0.5980	0.6430	0.0292	0.0143	0.3220	0.0091
	Present (Levinson)	0.5965	0.6433	0.0290	0.0140	0.2892	0.0092
	Present (Touratier)	0.5986	0.6448	0.0291	0.0142	0.3060	0.0092
	Present (Soldatos)	0.5964	0.6431	0.0290	0.0140	0.2877	0.0092
	Present (Karama)	0.6005	0.6463	0.0292	0.0144	0.3241	0.0092
50	Pagano	0.5200	0.6280	0.0259	0.0110	0.4390	0.0084
	Reddy	-	-	-	-	-	-
	Present (Levinson)	0.5205	0.6287	0.0259	0.0132	0.2898	0.0085
	Present (Touratier)	0.5208	0.6289	0.0259	0.0133	0.3068	0.0085
	Present (Soldatos)	0.5204	0.6287	0.0259	0.0131	0.2883	0.0085
	Present (Karama)	0.5211	0.6292	0.0259	0.0134	0.3250	0.0085
100	Pagano	0.5080	0.6240	0.0253	0.0108	0.4390	0.0083
	Reddy	0.5070	0.6240	0.0253	0.0129	0.2886	0.0083
	Present (Levinson)	0.5096	0.6266	0.0254	0.0130	0.2899	0.0084
	Present (Touratier)	0.5097	0.6267	0.0254	0.0132	0.3069	0.0084
	Present (Soldatos)	0.5096	0.6266	0.0254	0.0130	0.2884	0.0084
	Present (Karama)	0.5097	0.6267	0.0254	0.0133	0.3252	0.0084

하였다. 또한, 적층배열 $[0/90/0]$ 을 갖는 직사각형($b/a=3$) 적층판의 무차원 처짐 및 응력을 Table 5에 정리하였으며, Fig.3은 Pagano(1970)의 정해(Elasticity, w_p)에 대한 수직처짐비율(w/w_p)을 도식화한 것이다. 각 전단변형 함수에 의한 해석치는 서로 유사하며, 수직처짐의 경우 최대 6% 정도의 오차를 보인다. 그 차이는 폭두께

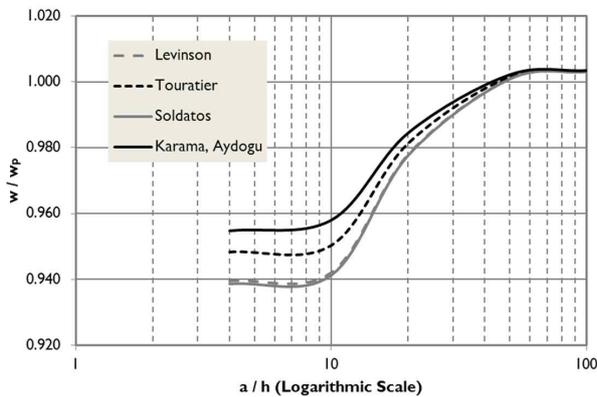


Fig. 3 폭두께비에 따른 처짐비율(w/w_p , Table 5)

비가 작아질수록 크게 발생한다. 대체적으로 적층판 해석에 있어서 Karama와 Aydogu에 의한 지수함수형태의 전단변형함수가 가장 우수한 결과를 나타낸다.

4.3 등분포하중을 받는 샌드위치판

본 절의 해석모델은 등분포하중 q 를 받는 단순지지된 정사변형 샌드위치판(Sandwich plate)이다. 샌드위치판은 복합면재(Facings)와 심재(Core)로 구성되며, 각 층의 두께는 면재 $h_1 = h_3 = 0.1h$, 심재 $h_2 = 0.8h$ 로 설정한다. 재료물성치는 다음과 같이 강성행렬로 제시하되, R 을 매개변수로 전단변형함수별 거동차이를 비교·분석하였다.

$$\bar{Q}_{core} = \begin{bmatrix} 0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.524886 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.262931 & 0 & 0 \\ sym. & & & 0.266810 & 0 \\ & & & & 0.159914 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{facings} = R\bar{Q}_{core}$$

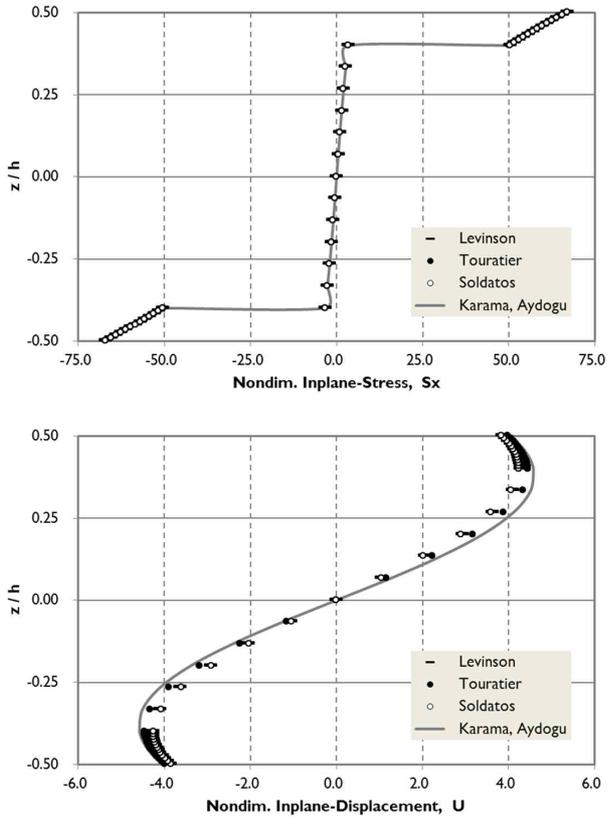


Fig. 3 샌드위치판의 두께방향 면내응력 및 변위분포 ($a/b=1, a/h=10, R=15$, Table 6)

최대수직처짐 및 응력은 다음과 같이 무차원화하였으며, Srinivas(1973)와 Pandya and Kant(1988)의 결과와 비교하여 Table 6에 정리하였다. Fig. 3은 $R=15$ 에 대한 두께방향 면내응력 $\bar{\sigma}_x$ 와 변위 \bar{u} 분포를 나타낸 것이다.

$$\bar{\sigma}_x^1 = \frac{\sigma_x(a/2, b/2, h/2)}{q}, \quad \bar{\sigma}_x^{2,3} = \frac{\sigma_x(a/2, b/2, 2h/5)}{q}$$

$$\bar{\sigma}_y^1 = \frac{\sigma_y(a/2, b/2, h/2)}{q}, \quad \bar{\sigma}_y^{2,3} = \frac{\sigma_y(a/2, b/2, 2h/5)}{q}$$

$$\bar{w} = \frac{0.999781 w(a/2, b/2, 0)}{hq}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}(0, b/2, 0)}{q}$$

다양한 전단변형함수 $f(z)$ 에 대한 샌드위치판의 유한요소 결과값은 비교대상간 유사한 거동을 보였으며, Pandya and Kant(1988)보다 Srinivas(1973)의 정해에 더 근접한 결과를 나타낸다.

단, Karama와 Aydogu 모델은 해석결과에서 보듯이 완벽히 일치하나, 이는 부록 A-I에 수록된 강성행렬 전 객식에서 볼 수 있듯이 $f(z)$ 의 함수형태만 다를 뿐 결과적으로 동일한 강성행렬을 갖기 때문이다. 또한, 적층 및 샌드위치판(대략 $R > 5$)에서는 Karama, Aydogu 및 Touratier(이하 ‘함수-1’)가 Levinson 및 Soldatos(이하 ‘함수-2’)보다 큰 해석값을 나타내었고, 등방성 및 샌드

Table 6 등분포하중을 받는 샌드위치판의 처짐 및 응력 ($a/b=1, a/h=10, h_1=h_3=0.1h, h_2=0.8h$)

R	구분	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}$
5	Srinivas	258.970	60.353	46.623	9.340	38.491	30.097	6.161	4.364
	Pandya and Kant	256.130	62.380	46.910	9.382	38.930	30.330	6.065	3.089
	Present (Levinson)	257.437	60.495	47.102	9.420	38.519	30.291	6.058	3.963
	Present (Touratier)	257.465	60.552	47.091	9.418	38.543	30.287	6.057	4.120
	Present (Soldatos)	257.424	60.490	47.103	9.421	38.516	30.291	6.058	3.948
	Present (Karama)	257.250	60.612	47.095	9.419	38.557	30.280	6.056	4.266
	Present (Aydogdu)	257.250	60.612	47.095	9.419	38.557	30.280	6.056	4.266
10	Srinivas	159.380	65.332	48.857	4.903	43.566	33.413	3.500	4.096
	Pandya and Kant	152.330	64.650	51.310	5.131	42.830	33.970	3.397	3.147
	Present (Levinson)	154.778	65.491	50.053	5.005	43.294	33.676	3.368	3.638
	Present (Touratier)	155.305	65.547	49.958	4.996	43.369	33.679	3.368	3.843
	Present (Soldatos)	154.718	65.486	50.063	5.006	43.286	33.676	3.368	3.619
	Present (Karama)	155.521	65.615	49.898	4.990	43.419	33.672	3.367	4.032
	Present (Aydogdu)	155.521	65.615	49.898	4.990	43.419	33.672	3.367	4.032
15	Srinivas	121.720	66.787	48.299	3.238	46.424	34.955	2.494	3.964
	Pandya and Kant	110.430	66.620	51.970	3.465	44.920	35.410	2.361	3.035
	Present (Levinson)	114.702	67.013	50.387	3.359	45.668	35.201	2.347	3.388
	Present (Touratier)	115.644	67.049	50.175	3.345	45.820	35.222	2.348	3.633
	Present (Soldatos)	114.605	67.011	50.408	3.361	45.653	35.199	2.347	3.365
	Present (Karama)	116.253	67.106	50.015	3.334	45.932	35.225	2.348	3.862
	Present (Aydogdu)	116.253	67.106	50.015	3.334	45.932	35.225	2.348	3.862

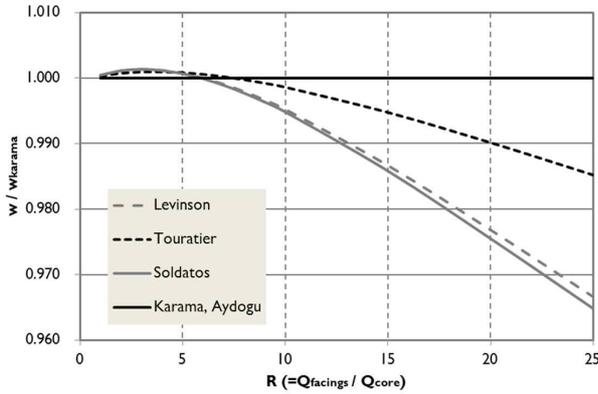


Fig. 4 강성비율(R)에 따른 상대처짐비교 ($a/b=1, a/h=10, Table 6$)

위치판($R \leq 5$)에서는 그 반대현상을 나타내었다. 이는 R 변화에 따른 샌드위치판 수직처짐을 Karama에 대한 상대비율로 나타낸 Fig. 4에서 더욱 분명해진다. 단편적인 예에 불과하나, 섬유 보강각도로 층간 강성차이가 발생하는 적층구조에서는 ‘함수-2’보다는 ‘함수-1’을 적용함이 안전측이며, ‘함수-1’이 정해(Pagano 1970; Srinivas 1973)에 더욱 근접한 결과값을 보여주었다.

4. 결론

본 연구는 Hermite 및 Lagrangian 보간함수에 의한 혼합정식화(Mixed formulation)로 유한요소모델을 작성하고, Levinson(1980), Touratier(2003), Karama et al.(2003) 그리고 Aydogu(2009)에 의한 다양한 전단변형함수별 등방성 및 복합적층/샌드위치판의 거동을 상호·비교하였다.

그 결과, 전단변형함수별 거동(처짐 및 응력)은 해석 모델 및 매개변수별로 서로 유사하게 나타났으며, 정해에 근접한 우수한 결과를 보였다. 그러나, 지금까지 발표된 전단변형함수 $f(z)$ 는 전단변형을 표현 가능한 수식(포물선, 삼각함수, 지수함수 등)으로 근사화하였을 뿐, 구조거동의 개선 및 발전경향이 두드러지지 않았다. 다만, 적층 및 샌드위치 구조형식에 있어서 Karama et al.(2003)와 Aydogu(2009)이 상대적으로 우수한 결과를 보이고 있는바 전단변형함수로 지수함수를 적용함이 적절할 것으로 판단된다.

본 연구결과를 토대로 추후 적층배열(대칭, 역대칭, 비대칭) 및 섬유 보강각도를 매개변수로 휨해석 뿐만 아니라 좌굴 및 자유진동해석을 수행하여 전단변형함수를 상호 비교분석할 필요가 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

1. 박원태, 손병직, 천경식 (2004) 단순지지된 비등방성

경사판의 고차전단변형에 의한 정적거동 비교분석, *대한토목학회 논문집*, 제24권 6A호, pp.1173-1182.

2. 천경식, 홍대기, 장석운 (2003) 삼각함수를 이용한 복합적층보의 지그재그 모델, *대한토목학회 논문집*, 제23권 3-A호, pp.421-428.

3. 천경식, 최회권, 장석운 (2003) 다양한 Serendipity 유한요소에 따른 복합적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동해석 비교연구, *대한토목학회 논문집*, 제23권 5A호, pp.901-909.

4. Aydogdu M (2009) A new shear deformation theory for laminated composite plates, *Compos Struct*, Vol.89(1), pp.94-101.

5. Idlbi A, Karama M and Touratier M (1997) Comparison of various laminated plates theories, *Compos Struct*, Vol.37, pp.173-184.

6. Kant T and Swaminathan K (2002) Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Compos Struct*, Vol.56, pp.329-344.

7. Karama M, Afaq KS and Mistou S (2003) Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int J Solids Struct*, Vol.40, pp.1525-1546.

8. Levinson M (1980) An accurate simple theory of statics and dynamics of elastic plates, *Mech Res Commun*, Vol.7, pp.343-350.

9. Mindlin RD (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *J Appl Mech*, Vol.18, pp.31-38.

10. Murthy MVV (1981) An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates, NA SA Technical Paper.

11. Pagano NJ (1970) Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J Compos Mater*, Vol.4(1), pp.20-34.

12. Pandya BN and Kant T (1988) Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations, *Int J Solids Struct*, Vol.24, pp.419-451.

13. Reddy JN (1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J Appl Mech*, Vol.51, pp.745-752.

14. Reissner E (1945) Reflection on the theory of elastic plates, *J Appl Mech*, Vol.38, pp.1453-1464.

15. Srinivas S (1973) A refined analysis of composite laminates, *J Sound Vib*, Vol.30, pp.495-507.

16. Soldatos KP (1992) A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, *Acta Mech* Vol.94, pp.195-200.

17. Touratier M (1991) An efficient standard plate theory, *Int J Eng Sci*, Vol.29(8), pp.901-916.
18. Whitney JM and Pagano NJ. (1970) Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *J Appl Mech*, Vol.37(4), pp.1031-1036.

자연좌표계(Natural coordinates)로서, 4절점 유한요소의 경우 식(A-4)와 같이 나타낸다.

부 록

A-I

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 Reddy(1984) 등의 참고문헌에 수록되어있는바, 지면상 전단변형함수 $f(z)$ 에 의한 강성행렬 E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} 및 \bar{A}_{ij} 에 대해서만 아래 표와 같이 적분식을 전개한다. 여기서 Erf는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{Erf}(1.000) = 0.843 \quad (\text{A-1})$$

A-II

본 연구에서 적용한 유한요소 형상함수인 Lagrangian 및 Hermite 보간함수는 각각 식(A-2), (A-3)과 같다. 이때, (ξ_i, η_i) 는 요소(Element)내 i 번째 절점(Node)에 대한

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \\ N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2) \\ g_i &= \frac{a}{16}\xi_i(1 + \xi\xi_i)^2(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i - 1) \\ h_i &= \frac{b}{16}\eta_i(1 + \eta\eta_i)^2(1 + \xi\xi_i)(\eta\eta_i - 1) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix}_{i=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

여기서, $\xi = 2(x - x_c)/a$, $\eta = 2(y - y_c)/b$ 이고, a 와 b 는 평면요소 길이를, (x_c, y_c) 는 전체좌표계에서의 요소 중심위치를 의미한다.

구분	f	$E_y (= \int f dz)$	$F_y (= \int zf dz)$
Levinson	$f_1(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$	$\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3h^2} z^4$	$\frac{1}{3} z^3 - \frac{4}{15h^2} z^5$
Touratier	$f_2(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$-\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$\left(\frac{h}{\pi}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 z \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Soldatos	$f_3(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	$h^2 \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) z^2$	$h^2 z \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{3} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) z^3 - h^3 \sinh\left(\frac{z}{h}\right)$
Karama	$f_4(z) = z e^{-2(z/h)^2}$	$-\frac{1}{4} h^2 e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	$-\frac{1}{4} h^2 z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} + \frac{1}{8} h^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Erf}\left[\frac{\sqrt{2}z}{h}\right]$
Aydogu	$f_5(z) = (z/3)^{-2(z/h)^2/\ln 3}$		
구분	$H_y (= \int f^2 dz)$	$\bar{A}_y (= \int (f')^2 dz)$	
Levinson	$\frac{1}{3} z^3 - \frac{8}{15} \frac{z^5}{h^2} + \frac{16}{63} \frac{z^7}{h^4}$	$z - \frac{8}{3} \frac{z^3}{h^2} + \frac{16}{5} \frac{z^5}{h^4}$	
Touratier	$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 z - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{\pi}\right)^3 \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)$	$\frac{1}{4} \left[2z + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \right] = \frac{z}{2} + \frac{h}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)$	
Soldatos	$-\frac{1}{2} h^2 z + \frac{1}{12} \frac{(1+e)^2}{e} z^3 - \frac{(1+e)\sqrt{e}}{e} \left(h^2 z \cosh\frac{z}{h} - h^3 \sinh\frac{z}{h} \right) + \frac{h^3}{4} \sinh\frac{2z}{h}$	$\left[\frac{1}{4} (1+e) + 1 \right] z - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \sqrt{e} \right) h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + \frac{h}{4} \sinh\left(\frac{2z}{h}\right)$	
Karama			
Aydogu	$-\frac{1}{8} h^2 z e^{-4\left(\frac{z}{h}\right)^2} + \frac{1}{32} h^3 \sqrt{\pi} \text{Erf}\left[\frac{\sqrt{4}z}{h}\right]$	$\left(\frac{z}{4} - \frac{2z^3}{h^2} \right) e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} + \frac{3}{16} h \sqrt{\pi} \text{Erf}\left[\frac{2z}{h}\right]$	