

Periodic Disturbance Cancellation by using Dual-Input Describing Function (DIDF) Method

최연욱[†] · 이형기^{*}

(Yeon-Wook Choe · Hyung-Ki Lee)

Abstract - The issue of rejecting periodic disturbances arises in various applications dealing with rotating machinery. A new method using DIDF (Dual-Input Describing Function) is presented for the rejection of periodic disturbances with uncertain frequency. This can be added to an existing feedback control system without altering the closed-loop system stability. The objective is to design a nonlinear compensator to secure specified oscillation amplitude and frequency which are the same as disturbances. We suggest two procedures to determine coefficients for DIDF's synthesis.

The structure of the proposed DIDF is so simple that we can easily synthesize. A number of computer simulations were carried out to demonstrate the salient feature of the proposed DIDF compared to the conventional ones(that is, adaptive algorithms).

Key Words : Periodic Disturbance Cancellation, Describing Function

1. 서 론

주기성을 가지는 외란은, 특히 회전체의 제어와 관련된 다양한 분야에서 발생한다. 예를 들어, 하드디스크에서 데이터의 기록이나 읽기를 위해서 디스크의 회전속도에 따라 헤드를 이동시키는 과정에서 디스크의 편심에 의한 미세 진동이 발생하며, 이로 인해 실제의 트랙과 헤드가 위치하는 트랙 사이에 편차가 발생한다[1]. 이 편차는 하드디스크의 회전속도에 따른 고조파성분에 비례하는 주기성을 가진다. 이와 같이 축을 중심으로 하여 회전하는 기계시스템에 공통적으로 발생하는 외란은, 대부분 경우 실제의 축이 기하학적인 축과 일치하지 않음으로서 발생(즉 물체의 불균형성)하며, 주기성을 가진다.

지금까지 주기외란에 대처하기 위하여 몇 가지의 방법이 제안되어 있다. 그 중 하나는 반복 혹은 학습제어법칙(learning control principle)을 응용한 것으로, 외란이 주기성을 가지며 동시의 그 주기에 대한 정확한 정보가 존재하는 경우 상당한 효과가 있는 것으로 알려져 있다[2]. 그러나 주기성 외란의 주된 주파수는 시간에 따라 조금씩 변동하는 것이 일반적이기 때문에 이러한 경우에는 적절한 방법이라고 할 수 없다. 또 하나의 방법은 적응알고리즘(adaptive algorithm)을 이용한 것으로, 외란의 주기를 온라인(on-line) 상에서 추정하여 이를 제거하는 방법이다[3,4]. 다시 말하면, 외란과 동일한 크기의 입력을 제어대상의 입력단에 인가함

으로서 외란을 제거한다는 것이다. 외란의 주파수에 대한 정확한 정보가 없거나 혹은 시간에 따라 천천히 변동하는 주기를 가지는 경우에도 외란제거 적응알고리즘을 이용하면 외란의 제거가 가능하다는 것이다. 또한 특정 산업계의 현실적인 문제, 즉 시스템의 내부 혹은 외부에서 발생하는 주기성 외란의 제거를 위해 적응피드포워드 제거(Adaptive Feedforward Cancellation: AFC)의 알고리즘이 제안되었다[5,6]. 이는 외란에 대한 기본적인 정보의 존재를 그 전제로 하고 있다.

본 논문에서는 비선형요소를 이용한 주기외란의 제거방법을 제안한다. 일반적으로 비선형요소의 비선형성의 정도가 낮을 경우(예를 들어, on-off, saturation, hysteresis 등), 이것의 해석, 또는 어떤 특정 비선형시스템의 설계 등을 위한 목적으로 기술함수(describing function)가 사용된다. 이 경우 기술함수는 일종의 비선형의 선형화기법으로서, 사인(sine)파가 입력으로 인가되었을 경우의 비선형성의 수학적 선형화로서 주어진다[7]. 특히 비선형요소를 가지는 시스템이 리미터 사이클(limit cycle)의 상태에 있을 경우, 비선형요소에 대한 입력(또는 출력)인 사인파, 즉 리미터 사이클의 크기와 주파수를 예측하기 위해 기술함수가 사용되고 있다. 이와 같이 기술함수는 리미터 사이클의 상태에 있는 시스템의 입출력 관계를 평가하기 위하여 제한적으로 사용되고 있지만, 이외에도 비선형 시스템의 안정성 등의 확인에도 유효하다.

전통적인 기술함수를 확장하는 형식으로 소위 쌍입력 기술함수(DIDF: Dual-Input Describing Function)하는 수학적 표현법이 제안되었다[8]. 이것은 두 개의 사인파 입력을 이용하여 비선형성의 선형화를 시도하는 것으로, 특히 이 방법을 이용하면 비선형 요소의 존재로 인한 리미터 사이클의 상태에 있는 시스템의 입출력 응답의 이해에 도움이 된다.

* 정 회 원 : 부경대 제어계측공학과 교수

† 교신저자, 정회원 : 부경대 제어계측공학과 교수

E-mail : wook@pknu.ac.kr

접수일자 : 2009년 9월 10일

최종완료 : 2009년 10월 30일

이를 목표신호를 추종하는 비선형성을 가진 피드백시스템의 구조에 한정한다면¹⁾, 비선형 요소에 존재하는 두 개의 입력은, 정상상태 오차에 의한 입력과 페루프의 리미터 사이클 상태에 의한 사인파입력으로 구성될 것이다.

본 논문에서는 DIDF가 가지는 특징을 이용하여 주기외란을 제거하는 방법을 제안한다. 이는 기존 시스템의 루프에 사인파를 외부 입력으로 가지는 비선형요소를 삽입하여, 기존 시스템의 안정성 등을 해치지 않고 주기외란을 제거하는 것이다. 이 과정은, 다시 말하면 기존의 시스템에 비선형 요소를 삽입하여 어떻게 페루프를 리미터 사이클의 상태로 가져갈 수 있으며, 특히 리미터 사이클의 크기와 주기를 어떻게 외란의 그것과 일치시키느냐 하는 것으로 요약할 수 있다. 본 논문에서는 주기성 외란을 제거하기 위한 DIDF의 구조와 그의 계수 설정법을 제안하고, 이 결과를 시뮬레이션을 통하여 확인한다.

먼저, 제2장에서는 외란제거와 관련한 DIDF의 구조 등에 대하여 간단히 언급하며, 이를 기존의 시스템에서 적용하여 외란을 제거하기 위한 구조 및 방법 등을 제3장에서 나타낸다. 제4장에서는 이를 기존의 방법과 비교를 위한 몇 가지의 시뮬레이션 결과를 제시하고, 얻어진 결과에 분석과 향후 과제 등을 제5장에 정리하였다.

2. 문제의 제기

2.1 DIDF(Dual-Input Describing Function)

여기서는 먼저 문헌 [9]를 중심으로 DIDF에 관하여 간략히 언급한다.

비사인파(non-sinusoidal)와 같이 높은 정도의 비선형성을 가지는 입력을 비선형요소에 인가하는 경우에는 기술함수를 사용하여 해석하기에 어려움이 따른다. 이와 같이 높은 정도의 비선형성 입력은 대부분의 경우 두 개의 사인파 함수의 합으로 구성되어 있는 것으로 볼 수 있다. 따라서 기술함수의 계산을 이용하기 위한 목적으로, 비선형 요소에 대한 입력은 다음과 같이 나타낼 수 있다(그림 1).

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = h \sin(\omega_1 t + \theta_1) + l \sin(\omega_2 t + \theta_2) \quad (1)$$

두 사인파의 크기 h, l 과 주파수 ω_1, ω_2 는 시스템의 상태와 외부입력에 의해 결정되기 때문에, 두 사인파의 주파수 사이에 어떤 조화(harmonic)의 관계가 성립되지 않는 것으로 보는 것이 타당할 것이다. 하나의 예로서, 시스템이 사인파의 입력에 상응하는 리미터 사이클의 상태에 있는 경우를 들 수 있을 것이다. 이 경우 비선형 요소에 인가되는 신호의 주파수는, 비선형 요소가 가지는 외부 사인파인 ω_2 와 시스템의 리미터 사이클 상태에 의한 주파수 ω_1 으로 구성되어 있는 것으로 볼 수 있다. 또한 식 전개에 적합하지 않는 주기를 가지는 사인파에 대해서는 식(1)의 위상을 독립적으로 적절히 변동시켜 대응할 수 있을 것이다.

1) 예를 들어 그림 2의 구조에서 $K(s)$ 의 위치에 비선형요소 N 이 들어있는 구조를 생각할 수 있다.

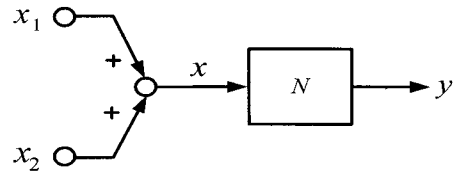


그림 1 두 개의 입력을 가지는 비선형 요소
Fig. 1 Nonlinear element with two sinusoidal inputs

비선형 요소에 대한 두 사인파 입력의 주파수가 조화적으로 연결되어 있지 않다는 전제에서, 크기 l 을 가지는 사인파 신호에 기술함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_l = N_{pl} + jN_{ql} \quad (2.a)$$

$$N_{pl} = \frac{2}{l} \overline{y(0)\sin(\theta_2)}, \quad N_{ql} = \frac{2}{l} \overline{y(0)\cos(\theta_2)} \quad (2.b)$$

크기 h 를 가지는 신호에 대한 기술함수는 식(2)에서 l 과 θ_2 를 h 와 θ_1 으로 교체하면 된다. 따라서 만약 비선형 요소가 정적(static)이며 단가(single-valued)를 가진다면, $y(0)$ 는 틀림없이 $x(0)$ 로 주어지며, 동시에 N_{ql} 은 영으로 되어 식(2.a)는 실수로 된다. 이 경우 두 입력에 대한 기술함수는 다음과 같이 주어진다[9].

$$N_h = \frac{1}{2\pi^2 h} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 y(h \sin \theta_1 + l \sin \theta_2) \sin \theta_1 \quad (3.a)$$

$$N_l = \frac{1}{2\pi^2 l} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 y(h \sin \theta_1 + l \sin \theta_2) \sin \theta_2 \quad (3.b)$$

이로부터 DIDF는 입력의 크기에만 의존한다는 사실을 알 수 있다.

한편, 만약 식(1)에서 신호 x_1 이 x_2 의 크기 l 에 비하여 '천천히 변동하는(slowly varying)' 경우, 즉

$$T \left| \frac{dx_1(t)}{dt} \right| \ll l \quad (4)$$

의 관계가 만족되는 경우를 생각하여 보자. 단 T 는 x_2 의 주기이다. 이는 예를 들어 계단입력을 추종하는 서보시스템이 크기 l 과 주기 ω_2 를 가지는 리미터 사이클의 상태에 있는 것으로 볼 수 있다. 이 경우 비선형요소에 존재하는 두 개의 입력은, 정상상태 오차에 의한 입력과 페루프의 리미터 사이클 상태에 의한 사인파입력으로 구성된다. 여기서 만약 비선형요소의 입력력함수를

$$x(t) = B + A \sin(\omega t + \theta), \quad y(t) = B' + A' \sin(\omega t + \theta) \quad (5.a)$$

로 가정한다면, 비선형요소를 나타내는 기술함수는 다음과 같은 두 개의 DIDF로 나타낼 수 있을 것이다.

$$N_o = \frac{A'}{A} e^{-j\theta} : \text{리미터 사이클 DIDF} \quad (5.b)$$

$$N_s = \frac{B'}{B} : \text{신호 DIDF} \quad (5.c)$$

2.2 문제의 설정

본 논문에서는 주기성 외란을 가지는 피드백 제어 시스템을 대상으로 한다. 즉 그림 2로 주어진 시스템에서, 외란이 존재하지 않는다면 제어대상 $G(s)$ 는 제어기 $K(s)$ 에 의해 제어의 목적이 달성되어 있는 것, 즉 $t \rightarrow \infty$ 에서 $y(t) \rightarrow r(t)$ 가 성립되어 있는 것으로 가정한다. 여기서 $d(t)$ 는 주기외란으로서

$$d(t) = A_d \cos(\alpha_d(t)) \quad (6)$$

로 표현되는 것으로 한다. 이때 크기 A_d 와 주기 $\alpha_d(t) = \omega_d$ 는 일반적으로 알려져 있지 않으나 이것의 중심 주파수는 측정 등을 통하여 근사적으로 파악할 수 있는 것으로 한다.

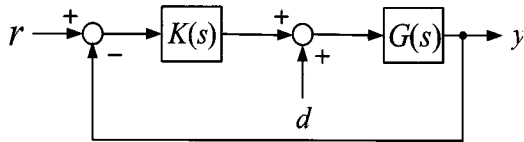


그림 2 주기외란을 가지는 시스템
Fig. 2 A block diagram with periodic disturbance

그림 2의 시스템을 미리 정해진 크기와 주기를 가지는 리미터 사이클의 상태로 가져갈 수 있는 비선형 보상기의 설계하여 페루프에 삽입함으로써 주기외란을 제거하는 것이 본 논문의 목적이다. 기술함수의 표현을 이용하여 비선형 요소의 전달함수를 $N(A, \omega)$ 로 나타낸다. 이때 A 와 ω 는 비선형 요소의 입력인 사인파 함수의 크기와 주파수를 의미한다. 본 논문에서는 위에서 언급한 DIDF를 적용하기 위하여 여분의 입력 x_2 을 가지는 비선형 요소를 루프에 삽입하기로 한다. 이와 같은 비선형 요소의 작용으로 인해, 복소평면에서 나이퀴스트의 임계점(Nyquist's critical point)을 이동시킬 수 있으며, 이 결과로 주기외란의 제거가 가능하다는 것을 보인다. 본 논문에서 제안하는 주기외란의 제거를 위한 시스템의 구조는 그림 3과 같으며, 여기서 N_d 는 외란제거를 위해 사용된 비선형요소를 나타내는 기술함수이다. 위에서 언급한 바와 같이, N_d 는 두 개의 입력, 즉 비선형 요소에 의해 발생하는 리미터 사이클과 여분의 외부 신호를 입력으로 가진다.

그림 3의 특성방정식은

$$1 + (1 + N_d)G(s)K(s) = 0 \quad (7)$$

로 된다. 이 경우 기술함수의 이론에 의하면 주기외란의 제거를 위한 그림 3 시스템의 리미터 사이클 상태(즉 크기와 주파수)는 $-1/(1+N_d)$ 과 $G(j\omega)K(j\omega)$ 의 나이퀴스트 궤적과의

교차점의 위치에 의존하게 된다²⁾. 따라서 DIDF에 의한 외란제거를 위해서는 두 개의 입력을 가지는 기술함수(즉 DIDF)로 주어지는 비선형요소 N_d 의 구조와 계수설정이 중요한 역할을 하게 된다.

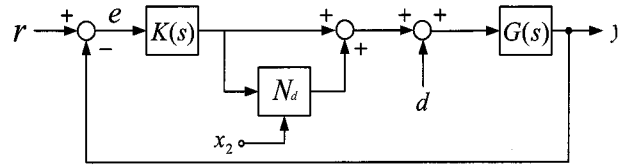


그림 3 외란제거의 구조
Fig. 3 Scheme of disturbance cancellation

3. 주기외란의 제거를 위한 DIDF의 설정

3.1 복소 DIDF와 그의 구성법

여기서는 주기외란을 제거하기 위한 비선형 요소를 나타내는 기술함수 N_d 의 구성법을 제시한다. 그림 3에서 N_d 가 가지는 두 개의 입력을 각각

$$x_1(t) = h \sin(\omega_1 t), \quad x_2(t) = l \sin(\omega_2 t + \theta) \quad (8)$$

으로 나타낸다. 위식의 신호 $x_1(t)$ 은 시스템의 리미터 사이클 상태에 기인하는 입력, 즉 식(5)로 볼 수 있다. 기술함수를 실현하기 위한 가장 좋은 방법은, 위에서도 언급한 바와 같이 N_d 를 여분의 입력 x_2 의 크기 l 의 함수로 주어지는 복소DIDF를 사용하는 것이다[10]. 이 방법은 위상이동의 개념을 적용한다면 허수부를 간단하게 실현할 수 있다는 점이 특징이다. 실제로 그림 3의 N_d 를 실현하기 위하여 사용된 비선형요소는 기함수 및 단가(single-valued)함수이지만(그림 5 참조), 식(2.a)와 같이 두 개의 사인파 입력을 가진다는 점을 이용하면 복소DIDF의 구성은 어렵지 않다.

기술함수로서 비선형성을 취급하기 위해서는 시스템이 만족시켜야 할 다음과 같은 몇 가지 가정이 필요하다.

- (1) 비선형성은 시불변이다.
- (2) 시스템은 저역통과 특성을 가져야 한다.
- (3) 비선형 요소의 출력의 첫 번째 고조파는 비선형 요소의 입력의 첫 번째 고조파와 동일한 주파수를 가진다.

여분의 입력 x_2 의 크기 l 의 함수로 주어지는 복소DIDF에 대한 일반적인 표현방법은 다음과 같다[10].

$$N_d(l) = N_p(l) + jN_q(l), \quad (l > 0) \quad (9)$$

$$N_p(l) = k_p l^2 \quad (10.a)$$

$$N_q(l) = k_q l^2 \quad (10.b)$$

2) 일반적으로 비선형요소 N_d 는 입력인 사인파의 크기와 주파수의 함수이다. 따라서 크기(또는 주파수)의 증감에 따라 $-1/(1+N_d)$ 의 궤적을 복소평면에 나타낼 수 있다.

이때 N_d 가 가지는 두 입력신호의 주파수의 비

$$\gamma = \omega_2 / \omega_1 \quad (11)$$

가 무리수라는 가정을 두면, k_p 와 k_q 는 정수로 된다. N_d 의 실현은 실수부와 허수부를 별도로 구성하고, 비선형요소기함수 및 단가함수라는 조건을 부가한다면, 그림 4의 형태로 식(9)를 구성할 수 있다.

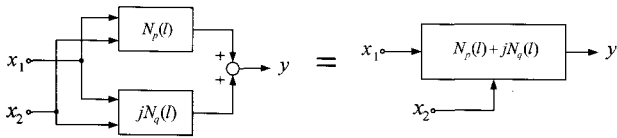


그림 4 복소 DIDF의 구조
Fig. 4 Synthesis of Complex DIDF

식(9)의 복소DIDF를 그림 3에 적용함으로써 페루프시스템을 리미터 사이클의 상태, 다시 말하면 $G(j\omega)K(j\omega)$ 의 궤적이 나이퀴스트평면의 특정한 지점에서 $-1/(1+N_d)$ 와 교차할 수 있게 된다. 따라서 남은 문제는 시스템을 원하는 크기와 주파수를 가지는 리미터 사이클의 상태로 가져갈 수 있는 두 상수 k_p 와 k_q 를 어떻게 설정하는가 하는 것이다. 단 k_p 와 k_q 가 정해지면 식(10)의 형식으로부터 알 수 있는 바와 같이, 복소DIDF의 위상 $\angle N_d$ 은 일정하지만, 크기 $|N_d|$ 는 N_d 가 가지는 여분의 입력 x_2 의 크기 l 의 함수로 된다는 점에 유의한다.

● N_d 의 실현

식(11)이 무리수이며 동시에 $\omega_2 \gg \omega_1$ 가 만족된다는 가정 아래 N_d 의 실수부를 구성하여 보자. 먼저 식(10)의 관계를 식(3.b)에 적용하고, 조건 $\omega_2 \gg \omega_1$ 에서 x_1 은 x_2 에 비해 변화가 거의 없는 것으로 되어 실수부 N_p 가 l 의 함수로 된다. 이러한 사실을 이용하여 두 개의 입력을 가지는 비선형성 $N_d(l)$ 의 (실수부의) 입출력 관계를 나타내면 다음과 같다 [10].

$$y(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{r^3 s N_p(r, s)}{(x_1^2 - r^2)^{1/2} (x_2^2 - s^2)^{1/2}} \partial r \partial s \quad (12)$$

위 식에 식(10)을 대입하고 계산하면³⁾

$$y(x_1, x_2) = 2k_p x_1 x_2^2, \quad x_1 \in (-h, h), \quad x_2 \in (-l, l) \quad (13)$$

가 얻어진다. 한편 N_d 의 허수부에 대해서도 식(13)과 동일한 형태의 식(즉 $2k_q x_1 x_2^2$)이 얻어지나, 허수 'j'의 실현을 위

3) 복소DIDF, 즉 식(9)의 표현을 이용하는 경우 비선형성 N_d 의 실수부와 허수부는 l 만의 함수로 된다. 따라서 식(12)의 $N_p(r, s)$ 에서 변수 r 은 고정하여 적분을 수행한다.

하여 '90° 위상이동'이 필요하다. 이상의 관계로부터 비선형요소 N_d 의 복소DIDF를 실현하기 블록선도는 그림 5와 같다.

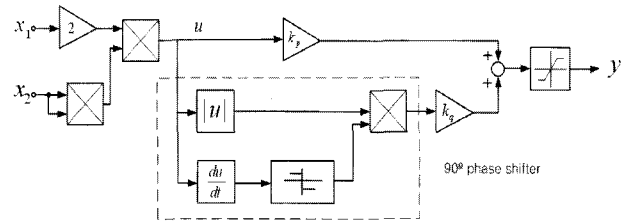


그림 5 DIDF의 구성
Fig. 5 The Construction of complex DIDF

3.2 복소DIDF의 계수설정법

그림 3으로 주어진 시스템에서, 주기의란이 인가되지 않는 경우에는 제어기 $K(s)$ 에 의해 페루프의 안정화와 동시에 목표값 추종과 같은 설계목표가 정상상태에서 달성되어 있는 것으로 가정한다. 그러나 식(6)으로 주어지는 외란 $d(t)$ 가 인가되면 출력 $y(t)$ 은 목표신호 $r(t)$ 에 추종하지 못할 것이라는 것은 쉽게 알 수 있다.

따라서 문제는 주기의란을 제거할 수 있도록 그림 5의 계수 k_p 와 k_q 를 설정하고 이로 인해 페루프시스템이 외란과 동일한 크기 A_d 와 주파수 ω_d 를 가지는 리미터 사이클의 상태로 되는 것이다. 다시 말하면 그림 3의 시스템에서 $G(j\omega)K(j\omega)$ 의 나이퀴스트 궤적이 주파수 $\omega = \omega_d$ 에서 $d(t)$ 와 동일한 크기를 가지는 복소평면상의 한 점 $(p+jq)$ 과 교차할 수 있도록 DIDF의 계수 k_p 와 k_q 를 설정하는 것이다. 이러한 과정은 복소DIDF를 이용하여 페루프전달함수의 주파수 특성을 변형(shaping)하는 것으로 볼 수 있다.

DIDF의 계수를 결정하기 위해서는 위에서 언급한 바와 같이 외란의 크기와 주파수에 대한 개략적인 정보가 필요하다. 이와 같은 외란에 대한 기본적인 자료는 실험 등을 통하여 어렵지 않게 취득할 수 있을 것이다. 이러한 정보와 그림 3의 시스템에 대한 나이퀴스트 선도를 이용하면 DIDF의 계수를 결정할 수 있다. 먼저 비선형 요소의 삽입으로 인한 페루프시스템의 특성다항식은 다음으로 된다.

$$1 + N(l)G_n(j\omega) = 0 \rightarrow G_n(j\omega) = -\frac{1}{N(l)} \quad (14)$$

단 $N(l) = 1 + N_d(l)$ 및 $G_n(s) = K(s)G(s)$ 이다. 여기서는 식(14)가 만족되면 페루프시스템은 주파수 ω 를 가지는 리미터 사이클의 상태로 된다는 사실을 이용한다. 다시 말하면 $G_n(j\omega)$ 과 $-1/N(l)$ 을 복소평면에 나타내고 이들의 교차점 $(p+jq)$ 이 리미터 사이클의 크기와 주파수로 된다는 것을 이용하여 그림 5의 계수 k_p 와 k_q 를 결정하는 것이다. 따라서 외란에 대한 정보를 바탕으로 점 $(p+jq)$ 를 결정하고 이 점에서 식(14)가 만족될 수 있도록 하는 계수 k_p 와 k_q 가 존재한다면, 주기의란 $d(t)$ 를 출력에서 제거할 수 있을 것이다. 이하 이러한 방법으로 계수 k_p 와 k_q 를 구하는 두 가지 방법을 제안

한다.

본 논문에서 제안하는 방법은 주기의란에 대한 개략적인 정보를 바탕으로 할 뿐만 아니라, 비선형 요소의 근사적인 선형화 표현법의 일종인 기술함수를 이용하고 있기 때문에, 이 결과 얻어진 계수 k_p 와 k_q 의 수치상의 정확도에 대해서는 주의가 필요할 것으로 생각된다(예제 참조).

(A) 수학적 접근법

그림 3으로부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$[e(t)] = \frac{1}{1+N(l)G_n(j\omega)} [r(t)] - \frac{G(j\omega)}{1+N(l)G_n(j\omega)} [d(t) - u_d(t)] \quad (15)$$

여기서 $u_d(t)$ 는 비선형 요소 N_d 의 출력이며 다음과 같이 표현한다.

$$u_d(t) = A \cos(\alpha(t)) \quad (16)$$

위식에서 A 와 $\dot{\alpha}(t) = \omega$ 는 외란의 크기와 주파수에 대한 추정값을 각각 나타낸다. 식(15)에서는 식(14)의 표현과 일치시키기 위하여 기존의 형식과 다른 표현법을 사용하였다. 다시 말하면 $[r(t)]$ 는 신호 $r(t)$ 의 푸리에 전개식을 의미한다. 식(9)를 이용하여 복소변수 $N(l)$ 을

$$N(l) = \lambda(l) + j\mu(l) \quad (17)$$

로 나타내고, 이를 이용하여

$$\frac{G(j\omega)}{1+(\lambda+j\mu)G_n(j\omega)} \equiv H_R(\omega) + jH_I(\omega) \quad (18)$$

로 둔다. 다시 말하면, H_R 과 H_I 는 그림 3에서 u_d 에서 e 까지의 페루프시스템의 주파수특성의 실수부와 허수부를 각각 나타내고 있는 것으로 볼 수 있다. 식(6),(16) 및 (18)과 그림 3의 페루프시스템이 안정이라는 사실로부터 식(15)는

$$[e] = H_R A_d \cos(\alpha_d) - H_R A \cos(\alpha) - H_I A_d \sin(\alpha_d) + H_I A \sin(\alpha) \quad (19)$$

$$= H_R (A_d \cos(\alpha_d) - A \cos(\alpha)) - H_I (A_d \sin(\alpha_d) - A \sin(\alpha))$$

로 된다. 따라서 외란이 시스템에 미치는 영향을 제거하기 위해서는 식(19)의 오차 $e(t)$ 를 영으로 만드는 것이다. 조건 $A_d \neq A$ 와 $\alpha_d \neq \alpha$ 아래서 $e(t)$ 를 영으로 만들 수 있는 가장 간단한 방법은, 식(17)을 적절히 선정하여 식(18)의 실수부와 허수부를 동시에 영으로 만드는 것이다. 이를 위해서는 H_R 과 H_I 를 λ 와 μ 의 함수로 전개한다. 먼저

$$G(j\omega) = x_1 + jy_1, \quad G_n(j\omega) = x_2 + jy_2 \quad (20)$$

으로 두고, 이를 식(18)에 대입하여 전개하면

$$H_R(\lambda, \mu) = \frac{x_1(1+\lambda x_2 - \mu y_2) + y_1(\mu x_2 + \lambda y_2)}{(1+\lambda x_2 - \mu y_2)^2 + (\mu x_2 + \lambda y_2)^2} \quad (21.a)$$

$$H_I(\lambda, \mu) = \frac{y_1(1+\lambda x_2 - \mu y_2) - x_1(\mu x_2 + \lambda y_2)}{(1+\lambda x_2 - \mu y_2)^2 + (\mu x_2 + \lambda y_2)^2} \quad (21.b)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 식(21)이 영의 값을 가지도록 하는 변수 λ 와 μ 는

$$\lambda = -\frac{ax+bd}{a^2+b^2}, \quad \mu = -\frac{bc-ad}{a^2+b^2} \quad (22.a)$$

$$a = x_1 x_2 + y_1 y_2, \quad b = x_2 y_1 - x_1 y_2, \quad c = x_1, \quad d = y_1 \quad (22.b)$$

로 주어진다. 식(22.a)로 주어지는 λ 와 μ 를 결정하기 위해서는 식(20)으로 정의된 변수 x_1, x_2, y_1 및 y_2 의 값이 필요하다. 리미터 사이클의 크기와 주파수는 삽입된 비선형 요소의 기술함수에 의해 결정되어진다. 따라서 비선형성 N_d 의 삽입에 의해 발생하는 그림 3 시스템의 리미터 사이클이 외란을 제거할 수 있기 위해서는, 반드시 $\omega = \omega_d$ 에서 $G_n(j\omega)$ 과 $-1/N(l)$ 가 교차하여야 한다. 이 사실로부터 식(20)을 $\omega = \omega_d$ 에서 평가하면 필요한 네 개의 변수값을 얻을 수 있다.

(B) 나이퀴스트 접근법

여기서는 식(17)의 λ 와 μ 를 나이퀴스트 선도를 이용하여 결정하는 방법을 제시한다. 페루프시스템이 바람직한 크기와 주파수의 리미터 사이클 상태에 해당하는 복소평면상의 점을 $(p+jq)$ 로 두면, 식(14)로부터

$$-1/N(\lambda, \mu) = p + jq \quad (23)$$

가 얻어진다. 따라서 만약 외란의 주파수 $\omega = \omega_d$ 에서 식(14), 즉 $G_n(j\omega_d) = p + jq$ 가 성립되도록 점 $(p+jq)$ 를 선정할 수 있다면 식(23)으로부터 미지수 λ 와 μ 를 얻을 수 있을 것이다. 이상의 방법을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 개루프시스템 $G_n(s) = K(s)G(s)$ 에 대한 나이퀴스트 선도를 작성한다.
- (2) 나이퀴스트 선도에서 주파수 ω_d 에 대응하는 점으로부터 변수 p 와 q 를 결정한다.
- (3) 식(23)을 이용하여 λ 와 μ 를 계산하고 이로부터 비선형 요소의 두 변수 k_p 와 k_q 를 얻는다.

● x_2 의 크기 l 의 영향

위에서 제안한 두 가지 방법에는 비선형 요소 N_d 의 두 번째 입력 x_2 의 크기 l 에 대한 조건은 언급되지 않았다. 여기서는 이 점을 확인한다.

위에서 이미 언급한 바와 같이 그림 3의 페루프시스템의 전달함수는 $1+N(l)G_n(s) = 0$ 로 되며, 이 경우의 N_d 가 가지는 변수 k_p 와 k_q 는 l 의 크기에 관계없이 $G_n(j\omega_d) = -1/N(\lambda, \mu)$ 을 만족할 수 있도록 결정되었다. 식(9)와 (10)의 관계로부터 복소DIDF의 위상은 k_p 와 k_q 에 의해 고정되지만, 크기는 x_2 의 크기 l 에 따라 변동한다는 것을 알 수 있다. 일반적으로

그림 3의 특성다항식 $1+(1+N_d(l))G(s)K(s)=0$ 의 근은 변수 l 이 증가함에 따라 허수축으로 접근한다. 따라서 만약 위에서 제안한 두 방법을 이용하여, 시스템을 정해진 크기와 주파수를 가지는 리미터 사이클의 상태로 가져갈 수 있는 두 변수 k_p 와 k_q 를 구하기 어려운 경우에는 l 을 변화시켜 이것을 달성할 수 있을 것이다. 다시 말하면 적절하게 정해진 두 변수 k_p 와 k_q 로서 페루프를 구성한 뒤, l 에 대한 식(14)의 근계적 선도를 이용하여

$$G(j\omega')K(j\omega') = -1/(1+N_d) \quad (24)$$

을 확인하는 것이다. 그러나 이 경우 $\omega'=\omega_d$ 로 된다는 보장이 없기 때문에 이 결과의 사용에는 주의가 필요하다. 이것은 다시 말하면 l 값의 변화로 인해 식(14)를 만족하는 나이퀴스트 선도 상의 위치가 변동하고, 이 결과 리미터 사이클의 크기와 주파수가 달라질 수 있다는 것을 의미하는 것으로 볼 수 있다.

● 페루프 안정성

DIDF이론은 원래 시스템에 발생할 수 있는 불안정성, 리미터 사이클 및 응답속도의 저하 등을 개선하기 위하여 제안되었다. 또한 리미터 사이클의 상태에 있는 통상적인 선형시스템은 일반적인 의미에서 불안정한 모드를 발생시키지 않는 것으로 알려져 있다[9]. 선형시스템에서는 여러 가지 이유로 시스템이 불안정으로 될 가능성이 항상 존재하지만, 리미터 사이클의 상태에는 (리미터 사이클의 상태이기는 하지만) 페루프의 동특성이 변동하거나, 불안정으로 될 가능성이 상당히 낮다. 이는 비선형성 N_d 의 삽입으로 인하여 나이퀴스트 선도의 임계점(critical point)인 $(-1+j0)$ 가 복소평면상의 다른 곳(그림 3의 경우 $-1/(1+N_d)$)으로 이동하였기 때문에 안정성의 확보가 가능하게 된 것으로 볼 수 있다.

대부분의 안정한 시스템에서 (비선형성의 삽입으로) 발생하는 리미터 사이클 상태에서는, 루프이득이 리미터 사이클을 지속할 수 없을 정도로 감소되어 페루프가 불안정으로 되었을 경우에 한하여 전체 시스템의 안정성을 상실한다는 것이 알려져 있다[9]. 본 논문의 경우 안정한 시스템에 비선형성을 삽입하여 전체 시스템을 리미터 사이클의 상태로 가져가는 상황을 고려하고 있기 때문에, 비선형성의 삽입과 관계없이 전체 시스템의 안정성은 항상 유지가 가능하다.

따라서 그림 3의 구조에서 만약 외란이 존재하지 않는 경우, 즉 $d(t)=0$ 인 경우에도 위에서 언급한 바와 같이 페루프의 안정성에는 변화가 없으므로 출력 $y(t)$ 가 목표신호 $r(t)$ 를 추종할 것이라는 사실은 변화가 없다. 그러나 예제에서와 같이(그림 12 참조), 복소DIDF의 삽입으로 시스템이 수렴평형점(convergent equilibrium point)을 중심으로 리미터 사이클의 상태로 되며, 이 결과로 미소한 진동성분이 출력에 나타나기는 하지만, 일반적으로 아주 작은 크기를 가지기 때문에 문제로 되지는 않는다.

4. 예 제

여기서는 시뮬레이션을 통하여 본 논문에서 제안된 방법의 성능을 기존에 제시된 알고리즘의 결과와 비교하여 보기

로 한다. 시뮬레이션은 MathWorks사의 SIMULINK를 이용하여 수행되었다.

[예제 1] 적응알고리즘을 이용한 Bodson의 방법[3]과 비교하기 위하여, [3]에서 제시된 제어대상 $G(s)=100/(s+100)$ 과 주파수 100[rad/sec]의 외란을 사용하였다. 이 경우 본 논문의 방법을 적용하기 위한 블록선도는 그림 2에서 $r=0$ 인 경우이다.

(A) 수학적 접근법: 이 경우 $\omega_d=100$ 및 $K(s)=1$ 이기 때문에, 식(21)로부터 $x_1=x_2, y_1=y_2$ 로 됨을 알 수 있다. 보드선도 등을 이용하면 간단히

$$x_1 = x_2 = 0.4948, y_1 = y_2 = -0.4948$$

이 얻어지고, 이로부터 $N=1+N_d$ 의 관계로부터

$$N = \lambda + j\mu = -1.0104 - j1.0104 \quad (24)$$

$$\rightarrow N_d = N - 1 = -2.0104 - j1.0104$$

로 되어 식(9), (10)으로부터 k_p 와 k_q 가 결정된다.

(B) 나이퀴스트 접근법: $G(j\omega)$ 의 나이퀴스트 선도로부터 페루프가 외란과 동일한 주파수를 가지는 복소평면상의 점은 $p+jq=0.5-j0.5$ 로 된다는 것을 확인할 수 있다. 따라서

$$-1/N = 0.5 - j0.5 \rightarrow N_d = N - 1 = -2 - j1 \quad (25)$$

로 된다. 이 값은 식(24)로부터 얻어진 것과 거의 동일한 값을 알 수 있다. 위 값을 이용한 그림 3의 시스템에 대한 시뮬레이션 결과를 그림 7에 나타내었다. 단 이 경우 x_2 는 크기 $l=1$ 과 주파수 ω_2 는 $\omega_2 \gg \omega_1$ 과 식(11)이 무리수로 될 수 있도록 하는 적절한 값을 선정하였다.

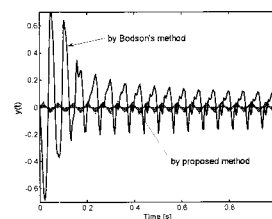


그림 6 시뮬레이션 결과
Fig. 6 Simulation Results

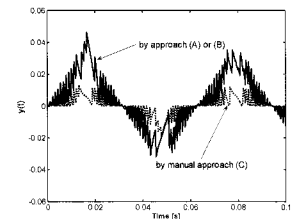


그림 7 수동조작의 결과
Fig. 7 manual approach

그림 6으로부터 본 논문에서 제안한 방법이 Bodson의 알고리즘에 의한 제거법보다 나은 외란제거 특성을 보여주고 있음을 알 수 있다. 특히 Bodson의 '적응알고리즘'으로 인한 큰 초기오차가 본 논문의 방법에서는 거의 사라졌음을 볼 수 있다.

전절에서 언급한 바와 같이, DIDF의 계수를 선정하여 시스템을 외란과 동일한 크기와 주파수의 리미터 사이클의 상태로 만들기는 쉽지 않다. 따라서 여기서 제안한 두 가지 방법으로 계산한 k_p 와 k_q 로 인해 외란이 100% 제거되기는

어려운 것으로 보인다. 이는 다시 말하면 식(23)과 (24)에 의한 두 종류의 k_p 와 k_q 외에 좀 더 높은 정도로 외란을 제거할 수 있는 k_p 와 k_q 가 존재할 수 있다는 것으로 볼 수 있다. 이것의 확인을 위해 $k_p = -100$ 와 $k_q = -3$ 으로 두고 시뮬레이션을 수행한 결과가 그림 7이다. 이러한 사실은 본 논문에서 제안된 계수설정법의 결과로 항상 최적의 계수를 얻을 수 있는 것은 아니라는 점을 보여주고 있는 것으로 볼 수 있다.

외란 주파수의 변동에 대한 로버스터성(robustness)을 확인하기 위하여, 그림 2의 시스템에서 외란 주파수 ω_d 를 50[rad/s]에서 150[rad/s] 사이에서 변동시켰을 경우의 시뮬레이션을 결과를 그림 8, 9에 표시하였다. 그림으로부터 복소DIDF를 이용한 외란제거는 Bodson의 알고리즘에 비하여 외란 주파수의 변화에 대하여 높은 로버스터성을 가지고 있다는 점을 확인할 수 있다.

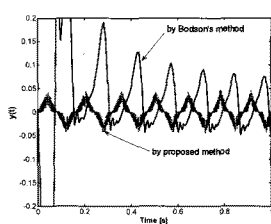


그림 8 낮은 주파수
Fig. 8 low frequency part (50~70 [rad/s])

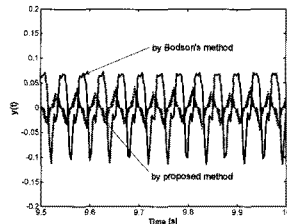


그림 9 높은 주파수
Fig. 9 high frequency part (130~150 [rad/s])

[예제 2] [그림 3]의 구조를 가지는 시스템을 생각한다. 단 제어대상과 제어기는

$$G(s) = \frac{50}{s(s^2 + 15s + 50)}, K(s) = 50 \times \frac{s + 3.5}{s + 2.5}$$

로 주어지며 페루프시스템의 출력은 정상상태에서 오차 없이 기준신호를 추종하는 것으로 가정한다. 복소DIDF를 이용한 주기성 외란의 성능을 확인하기 위하여 크기 2이며, 주파수 π [rad/s]를 가지는 주기외란을 인가하고 이 결과를 시뮬레이션을 이용하여 확인한다.

이 경우는 본 논문에서 제안된 방법으로 얻어진 복소DIDF의 계수로는 주기외란의 완전한 제거가 불가능하였다. 여러 번의 시뮬레이션 결과 이는 두 정수 k_p 와 k_q 에 의한 페루프시스템의 리미터 사이클 상태가, 주파수는 외란에 가까운 값으로 되지만 크기에 상당한 차이를 보이기 때문이다. 따라서 여기서는 N_d 에 대한 여분의 입력 x_2 의 크기 l 을 이용하여 시스템의 리미터 사이클의 크기를 조정하여 보기로 한다. 먼저 복소DIDF의 삽입으로 페루프시스템의 특성 방정식은

$$1 + N(l)G_n(s) = 1 + [(1 + k_p l^2) + j k_q l^2] G(s) K(s) = 0 \quad (26)$$

으로 되며, 이를 크기 l 에 대한 근궤적선도를 나타낸 것이 (그림 10)이다.

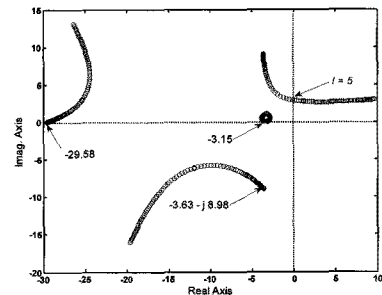


그림 10 l 에 대한 근궤적선도
Fig. 10 Root locus with respect to l

그림으로부터 $l=5$ 에서 한계안정으로 되어 시스템이 리미터 사이클의 상태로 됨을 알 수 있다. 위에서 얻은 k_p 와 k_q 에 와 $l=5$ 를 이용하여 시뮬레이션을 수행한 결과를 (그림 11)에 표시하였다. 그림으로부터 주기외란이 여전히 완전히 제거되지 않고 있으나, 그 크기는 원래 외란 크기의 5% 이내로 되어 있음을 볼 수 있다.

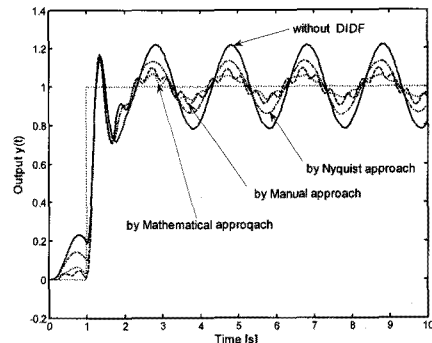


그림 11 시뮬레이션 결과
Fig. 11 System Results of Example 2

상기의 결과를 Bodson의 알고리즘과 비교하기 위하여 목표신호 $r(t)=0$ 으로 두고 동일한 시뮬레이션을 수행하였다. 이 경우 문헌 [3]에서 제안된 알고리즘의 계수설정에 따라 계수를 $g_1=5, g_2=-23, a=1$, 및 $b=55$ 로 두고 시뮬레이션을 실행한 결과가 (그림 12)이다⁴⁾. 그림으로부터 본 논문에서 제안된 방법이 저주파의 외란에 대해 더 나은 제거성능을 가지고 있음을 확인할 수 있다.

삽입한 복소DIDF에 의한 페루프의 안정성을 확인하기 위하여 상기와 동일한 시뮬레이션을 $d(t)=0$ 의 상황에서 수행한 결과가 (그림 13)이다. 이로부터 외란제거를 위해 삽입한 비선형 요소로 인해 페루프가 불안정으로 되지 않는다는 사실을 재확인할 수 있다.

4) Bodson의 방법에 따라 계수를 얻었으나, 계산방법의 차이가 존재하기 때문에 상기의 결과가 Bodson의 알고리즘 적용에 있어 최적인 것인지의 여부는 알 수 없다.

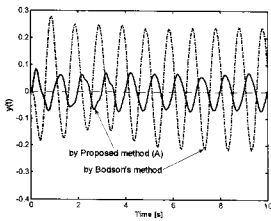


그림 12 시뮬레이션 결과
Fig. 12 Simulation result
 $r(t)=0$

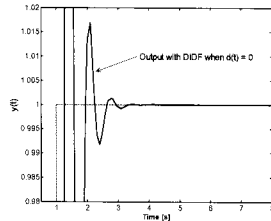


그림 13 시뮬레이션 결과
Fig. 13 Simulation result
 $d(t)=0$

5. 결 론

본 논문에서는 주기외란의 제거를 위한 새로운 방법을 제안하였다. 지금까지 주기성 외란을 제거하기 위한 많은 연구가 행하여졌으나, 이것은 적응 알고리즘(adaptive algorithm)을 기본으로 하는 것으로 주로 음향관련 분야가 적용대상이었다. 이러한 적응 알고리즘은 외란의 정확한 주파수를 알기 어려운 경우 등에서 좋은 결과를 보이는 것으로 알려져 있으나, 제어이론의 적용환경에서 항상 바람직한 효과를 나타내는 것으로 보기는 어려웠다. 본 논문에서 기존의 기술함수에서 사용되는 쌍입력 기술함수를 이용하여, 간단하게 현행의 시스템에 적용할 수 있는 복소DIDF의 외란 제거법을 제안하고, 그 성능을 다양한 시뮬레이션을 통하여 비교·확인하였다. 물론 이 경우 외란에 대한 개략적인 정보의 취득과 정수 k_p 와 k_i 의 선정이라는 관문이 있지만, 대부분의 경우에 간단한 측정으로 외란의 정보를 취득하거나, 또한 본 논문에서 제안한 방법으로 정수는 어렵지 않게 설정 가능한 것으로 생각된다.

현재 본 논문에서 제안한 방법을 이용한 실험을 수행 중이며, 이에 대한 분석과 결과를 가능하면 빠른 시일에 발표할 예정이다. 동시에 향후의 과제로는, 삽입한 복소DIDF로 인한 폐루프시스템의 리미터 사이클 상태(크기와 주파수)와 관련한 좀 더 엄밀한 수식전개가 필요할 것으로 보이며, 특히 x_2 의 크기 l 과 연관성에 대한 연구가 있어야 할 것으로 보인다.

참 고 문 헌

[1] M.D. Sidman, "Control system technology in digital disk drive," in Digital Technical Journal, 8, pp. 61 73, 1989
 [2] M.C. Tsai and W.S. Yao, "Design of a plug in type repetitive controller for periodic inputs," in IEEE AC on Control Systems Technology, vol. 10, no.4, pp. 547 555, 2002
 [3] M. Bodson and S.C. Douglas, "Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency," in Automatica, vol. 33, no. 12, pp. 2213 2221, 1997

[4] L.J. Brown & Qing Zhang, "Periodic disturbance Cancellation with uncertain frequency," Automatica, vol. 40, pp 631 537, 2004
 [5] Yu-Lin Xu, "Using Adaptive Algorithm on Learning and rejection Quasi-Periodic Perturbation," Proc. of 3rd Int'l Conf. on Machine Learning & Cybernetics, Shanghai, pp. 26-29,2004
 [6] T. H. Kandil et al., 'Adaptive feedforward cancellation of Sinusoidal disturbances in super conducting RF cavities," Nuclear Instruments & Methods in Physics Research, A550, pp. 514-520, 2005
 [7] J. E. Gibson, Nonlinear Automatic Control, McGraw Hill Book Co., New York, NY, 1963
 [8] J. C. West, J. L. Douce, and R. K. Livesley, "The dual input describing function and its use in the analysis of nonlinear feedback systems," Proc. IEE vol. 103B, pp.463 474, 1955
 [9] A. Gelb and W.E. Vander Velde, "Multiple Input Describing Functions and Nonlinear System Design," McGraw Hill, 1965
 [5] E. C. Servetas, "A Non Linear Electronic Compensator for Automatic Control Systems," IEEE Trans. on Industrial, Electronics and Control Instrumentation, vol. IECI 22, no.2, pp.201 208 (1975)

저 자 소 개



최연욱 (崔然旭)

1978년 한양대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1980년 한양대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1990년 일본 Kyoto Univ. 전기과 졸업(공학박사). 1990~현재 부경대학교 전기제어공학부 교수



이형기 (李炯基)

1975년 동아대학교 전자공학과(공학사), 1980년 동아대학교 대학원 전자공학과(공학석사), 1985년 동아대학교 대학원 전자공학과 (공학박사). 1980~현재 부경대학교 전기제어공학부 교수