

단자유도 건물의 지진응답제어를 위한 마찰감쇠기 설계

Design of Friction Dampers for Seismic Response Control of a SDOF Building

민 경 원† · 성 지 영*

Kyung-Won Min and Ji-Young Seong

(2009년 8월 25일 접수 ; 2009년 11월 30일 심사완료)

Key Words : Friction Damper(마찰감쇠기), Viscous Damping(점성감쇠), Equivalent Damping Ratio(등가감쇠비), Dynamic Magnification Factor(동적확대계수), Energy Balance(에너지균형), Friction Force Ratio(마찰력비), Resonance Frequency(공진진동수), Steady-state Response(안정상태응답)

ABSTRACT

Approximate analysis for a building installed with a friction damper is performed to get insight of its dynamic behavior. Energy balance equation is used to have a closed analytical form solution of dynamic magnification factor(DMF). It is found out that DMF is dependent on friction force ratio and resonance frequency. Approximation of DMF and equivalent damping ratio of a friction damper is proposed with such assumption that the building with a friction damper shows harmonic steady-state response and narrow banded response behavior near resonance frequency. Linear transfer function from input external force to output building displacement is suggested from the simplified DMF equation. Root mean square of a building displacement is derived under earthquake-like random excitation. Finally, design procedure of a friction damper is proposed by finding friction force corresponding to target control ratio. Numerical analysis is carried out to verify the proposed design procedure.

1. 서 론

마찰감쇠기(이하 감쇠기라 칭함)를 설치하여 지진 등 외력을 받는 건물의 동적변위를 감소시켜줄 수 있다. 감쇠기는 수학적으로 Coulomb형 마찰의 특성을 나타내며 건물의 움직임 방향인 속도와 반대 방향으로 마찰력이 작용한다. 건물은 고유의 점성(viscous) 감쇠를 가지고 있기 때문에 지진가속도 $p(t)$ 를 받는 건물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{u} + c_v\dot{u} + ku + f_d \text{sgn}(\dot{u}) = -mp(t) \quad (1)$$

여기서 m, c_v, k 는 각각 단자유도로 치환된 건물의 질량, 점성감쇠상수, 강성이다. u, \dot{u} 와 \ddot{u} 는 각각 지반에 대한 건물의 변위, 속도와 가속도 응답이다. f_d 와 $\text{sgn}(\dot{u})$ 은 각각 감쇠기의 마찰력과 사인함수이다.

수학적으로 비선형인 위 미분방정식의 정해(closed form analytical solution)을 구하는 일은 외력의 형태에 달려있다. 지진과 같은 랜덤(random)한 하중일 경우에는 불가능하여 수치해석 방법으로 해를 구할 수 있다.

조화하중(harmonic loading)일 경우에는 Den Hartog⁽¹⁾와 Hundal⁽²⁾이 정상상태에서의 정해를 구하였다. Den Hartog는 점성과 쿨롱감쇠가 있는 질량체의 응답을 해석과 실험방법으로 구하여 연속과 불연속 특성을 파악하였다. Hundal은 점성감쇠가 있을 경우 지반조화진동을 받을 때의 정해를 구하

† 교신저자; 정회원, 단국대학교 건축공학과
E-mail : kwmin@dankook.ac.kr
Tel : (031)8005-3734, Fax : (031)8005-3755
* 단국대학교 건축공학과

였다. Liang⁽³⁾은 점성 및 쿨롱 감쇠가 있을 때 자유 진동응답 정해를 구하였다. 모두 미분방정식의 응답을 정상상태의 조화응답으로 가정하여 정해를 구하였기에 마찰력이 조화가진 진폭과 비교하였을 때 일정한 비율로 작아야만 하는 제한이 있다. 조화가진 진폭과 비교하여 마찰력이 클 경우에는 마찰감쇠기가 움직이지 않으므로 에너지가 소산 되지 않는다. 이상현 등은⁽⁴⁾ TMD와 가이드레일간의 마찰력을 고려하여 조화지반가진에서의 최적마찰력을 제시하였다. 정상상태에서 외부하중에 의한 입력에너지가 점성 및 마찰감쇠 에너지로 전부 소산되는 에너지 균형을 이용하여 간단하게 동적확대계수(dynamic magnification factor)를 구할 수 있다. 지진하중은 조화하중과는 달리 랜덤하중이다. 정상상태에서의 응답이 아니라 랜덤응답의 평균응답(root mean square)이 중요하다. 이것은 시간영역의 미분방정식을 진동수영역의 대수방정식으로 변환하여 전달함수를 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 그러나 미분방정식이 선형이어야 하는 제한이 있다. 식 (1)은 비선형 미분방정식이기 때문에 변위 및 하중의 비인 전달함수를 구할 수 없다.

이 연구에서는 조화하중을 받는 단자유도계 건물에 설치된 마찰감쇠기를 등가의 점성감쇠기로 가정하여 아래와 같이 선형형태의 미분방정식으로 변환하는 방법을 적용하였다. 변환방법으로는 한 주기에서 마찰감쇠기로 소산되는 에너지와 등가점성감쇠기의 등가점성감쇠상수 c_{eq} 로 소산되는 에너지와 같다고 하는 가정이다⁽⁵⁾.

$$m\ddot{u} + (c_v + c_{eq})\dot{u} + ku = p(t) \quad (2)$$

여기서 $p(t)$ 는 $F_0 \sin \omega t$ 이고 F_0 와 ω 는 각각 가진진

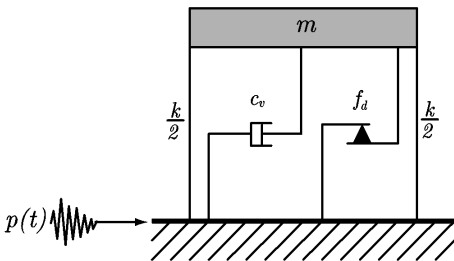


Fig. 1 A single-story building installed with a friction damper subjected to an earthquake

폭과 가진진동수이다. 에너지 균형식을 이용하여 변위응답계수의 해석적인 해를 유도하였으며 등가점성감쇠비를 구하여 마찰감쇠기의 감쇠역할을 파악하였다. 동적확대계수식은 진동수 영역으로 표현이 되어 있으나 하중이 식에서 따로 분리가 되지 않는 즉, 하중에 관해서는 비선형식이다. 동적확대계수, 마찰력, 하중과 진동수비가 모두 등가점성감쇠비에 연관이 있다. 지진하중의 진동수대역이 광역(broad-band frequency)이고 건물의 전달함수 대역이 협소영역(narrow-band frequency)이라고 가정하면 등가점성감쇠비에 관련된 변수를 공진진동수의 변수로 대체할 수 있어 상수라 여길 수 있다. 동적확대계수식의 형태가 전달함수식의 형태로 변환이 되어 랜덤하중에 관한 건물의 평균응답을 구할 수 있다. 이러한 식을 이용하여 응답제어율과 등가감쇠비의 관련식을 유도할 수 있다. 목표로 하는 제어율이 결정되면 마찰감쇠기의 마찰력이 결정되는 설계절차를 제시하고 검증하였다.

2. 동적확대계수식 유도

외부하중을 받는 구조물의 에너지 균형식은 다음과 같이 외부하중에 의한 입력에너지 E_I 가 운동에너지 E_K , 점성감쇠에 의한 소산에너지 E_v , 마찰감쇠기에 의한 등가점성감쇠의 소산에너지 E_{eq} 와 변형에너지 E_s 의 합과 같다는 식으로 나타낼 수 있다.

$$E_I = E_K + E_v + E_{eq} + E_s \quad (3)$$

정상상태 응답에서 한 주기 동안의 에너지변화를 고려하여 보면 E_K , E_s 는 변화가 없다. E_I 는 E_v 와 E_{eq} 의 합으로 나타나며 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\pi F_0 u_0 \sin \phi = (c_v + c_{eq}) \omega u_0^2 \quad (4)$$

여기서 u_0 는 동적변위진폭이다. c_v 와 c_{eq} 를 각각 감쇠비 ξ_v 와 ξ_{eq} 로 변환하여 식 (4)를 구성하면 다음과 같다.

$$\pi F_0 u_0 \sin \phi = 2k\pi (\xi_v + \xi_{eq}) \omega_r u_0^2 \quad (5)$$

여기서 u_0 은 진동수비로 ω/ω_n 이며 ω_n 는 건물의 고유진동수이다. $\sin \phi$ 와 ξ_{eq} 는 각각 다음의 식으로 표

현된다.

$$\sin\phi = \frac{2(\xi_v + \xi_{eq})\omega_r}{\left[(1 - \omega_r^2)^2 + (2(\xi_v + \xi_{eq})\omega_r)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

$$\xi_{eq} = \frac{2f_d}{\pi k \omega_r u_0} \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)을 식 (5)에 대입하면 다음과 같이 변위 u_0 에 대한 2차방정식으로 표현이 되어 근 (root)을 구할 수 있다.

$$F_1 u_0^2 + 2F_2 u_0 + F_3 = 0 \quad (8)$$

위에서 F_1, F_2, F_3 는 각각 다음의 식으로 나타난다.

$$F_1 = (1 - \omega_r^2)^2 + 4\omega_r^2 \xi_v^2 \quad (9)$$

$$F_2 = \frac{8\omega_r \xi_v f_d}{\pi k} \quad (10)$$

$$F_3 = \left(\frac{4f_d}{\pi k}\right)^2 - \left(\frac{F_0}{k}\right)^2 \quad (11)$$

식 (8)에서 2차방정식의 유효근을 구하고 동적확대계수로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{u_0}{u_{st}} = -G_1 F_r + \sqrt{G_2 - G_3 F_r^2} \quad (12)$$

위에서, F_r 은 외력에 대한 마찰력의 비로 f_d/F_0 이며 u_{st} 는 정적변위인 F_0/k 이다. G_1, G_2, G_3 는 각각 다음의 식으로 표현된다.

$$G_1 = \frac{8}{\pi} \frac{\omega_r \xi_v}{(1 - \omega_r^2)^2 + 4\omega_r^2 \xi_v^2} \quad (13)$$

$$G_2 = \frac{1}{(1 - \omega_r^2)^2 + 4\omega_r^2 \xi_v^2} \quad (14)$$

$$G_3 = \left[\frac{(1 - \omega_r^2)}{(1 - \omega_r^2)^2 + 4\omega_r^2 \xi_v^2} \frac{4}{\pi} \right]^2 \quad (15)$$

식 (12)는 항상 0보다 큰 값이다. 다음과 같은 조건식이 유도된다.

$$\sqrt{G_2 - G_3 F_r^2} > G_1 F_r \quad (16)$$

식 (16)에 (13), (14), (15)의 식을 대입하면 다음의 조건식을 유도할 수 있다.

$$F_r < \frac{\pi}{4} \quad (17)$$

식 (17)과 동시에 식 (12)에서 제공근 속의 값이 0보다 크거나 같은 값을 가져야 한다. 하지만 0일 경우에는 변위응답계수의 값이 (-)가 되므로 제공근 속의 값은 항상 0보다 큰 값이어야 하므로 다음과 같은 조건식이 유도된다.

$$F_r < \frac{\pi}{4} \left[1 + \left(\frac{2\omega_r \xi_v}{1 - \omega_r^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

위 식의 $(2\omega_r \xi_v / 1 - \omega_r^2)^2$ 은 항상 1보다 크기 때문에 식 (17)의 조건식이 식 (18)의 부분집합이 된다. 따라서 식 (17)의 조건을 만족하는 범위 안에서 변위응답계수를 구할 수 있으며 Den Hartog⁽¹⁾의 결과와 동일한 것을 알 수 있다.

Fig. 2는 $\xi_v=0.01$ 일 때 동적확대계수를 ω_r 과 F_r 의 변화에 따라 나타낸 것이다. 공진에서 계수가 매우 커지며 F_r 이 커질수록 계수가 작아지는 것을 알 수 있다.

점성감쇠비 ξ_v 가 없는 경우의 동적확대계수식과 조건식은 식 (12)에 $\xi_v=0$ 을 대입하여 다음과 같이 구해진다. 이 결과는 기존의 마찰감쇠만 있는 경우의 결과와 동일하다⁽¹⁾.

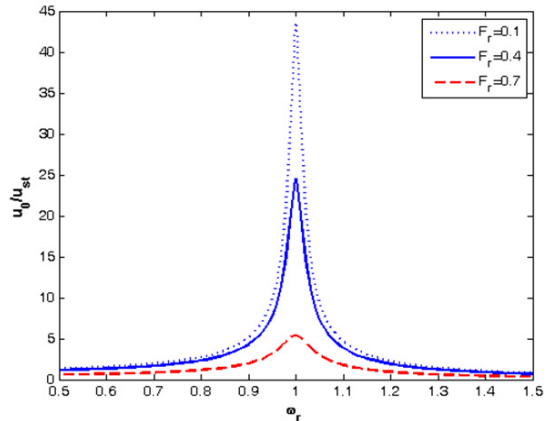


Fig. 2 Dynamic magnification factor u_0/u_{st} with varying ω_r and F_r .

$$\frac{u_0}{u_{st}} = \frac{\left[1 - \left(\frac{4}{\pi} F_r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{|1 - \omega_r^2|} \quad (19)$$

공진인 경우 즉, $\omega_r=1$ 일 때 식(12)는 다음과 같다.

$$\frac{u_0}{u_{st}} = \frac{1 - \frac{4}{\pi} F_r}{2\xi_v} \quad (20)$$

위 식에서 볼 수 있듯이 공진일 경우에는 점성감쇠비 ξ_v 가 있어야 정상상태응답을 의미하는 마찰력 f_d 가 존재한다. ξ_v 가 0일 때는 정상상태를 나타내는 f_d 는 존재하지 않는다. 즉, 공진시에는 조화입력에너지가 마찰에 의한 소산에너지보다 항상 커서 정상상태 응답을 보이지 않고 진폭이 계속 커지는 결과와 일치한다⁽⁵⁾.

3. 근사 등가점성감쇠비

식(12)에서 동적확대계수식에 영향을 주는 요인은 ξ_v , ω_r , F_r 인 것을 알 수 있다. 등가점성감쇠비 ξ_{eq} 도 ξ_v , ω_r , F_r 로만 구성되도록 식(7)을 변형하면 다음과 같이 표현된다.

$$\xi_{eq} = \frac{4}{\pi} F_r \frac{1}{u_0/u_{st}} \frac{1}{2\omega_r} \quad (21)$$

위 식과 같이 ξ_{eq} 은 마찰력비와 진동수비가 주어 진다면 동적확대계수에 좌우된다. Fig. 2는 식(12)에 의하여 구한 동적확대계수를 식(21)에 대입하여 구

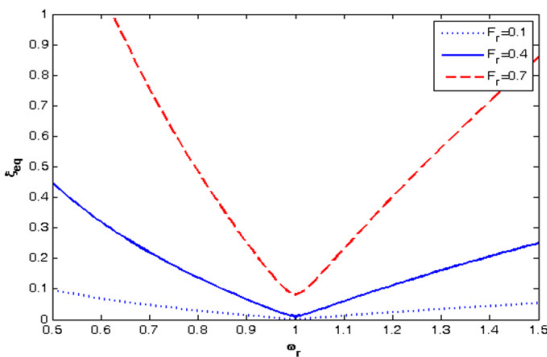


Fig. 3 ξ_{eq} according to various ω_r

한 ω_r 과 ξ_{eq} 의 그림이다. Fig. 2에서 나타나듯 $\omega_r=1$ 일 때 동적확대계수값이 가장 커서 그 때의 ξ_{eq} 가 제일 작게 나타나는 것을 알 수 있다.

Fig. 1에서 마찰력이 있다고 하더라도 동적확대계수 그림은 진동수 대역이 협소영역특성을 나타내는 것을 알 수 있다. 즉 공진에서의 계수값이 지배하므로 식(20)을 식(21)에 대입하여 정리하면 근사감쇠비가 다음과 같이 표현 된다.

$$\xi_{eq} = \frac{F_r}{\left(\frac{\pi}{4} - F_r\right)} \xi_v \quad (22)$$

식(22)의 등가감쇠비는 응답에 관련된 즉 동적확대계수에 관련된 응답의선형 비선형감쇠비가 아닌 근사화된 선형 감쇠비이다. 그러나 마찰력비에 하중이 포함되어 있기 때문에 엄밀한 의미에서의 선형 감쇠비는 아니다.

식(5)에 식(6)을 적용하여 ξ_v 와 ξ_{eq} 로 표현하면 다음과 같이 동적확대계수식이 감쇠비와 마찰력비, 진동수비에 대한 식으로 표현이 된다.

$$\frac{u_0}{u_{st}} = \frac{1}{\left[(1 - \omega_r^2)^2 + (2(\xi_v + \xi_{eq})\omega_r)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (23)$$

식(23)인 근사동적확대계수와 식(12)에서의 해석적인 계수를 위의 방법으로 구한 변위응답계수와 식(12)의 변위응답계수를 Fig. 4에 비교하였다.

Fig. 4의 비교에서 알 수 있듯이 F_r 이 적을 때에는 근사동적확대계수가 해석적인 결과와 매우 흡사한 것을 알 수 있다.

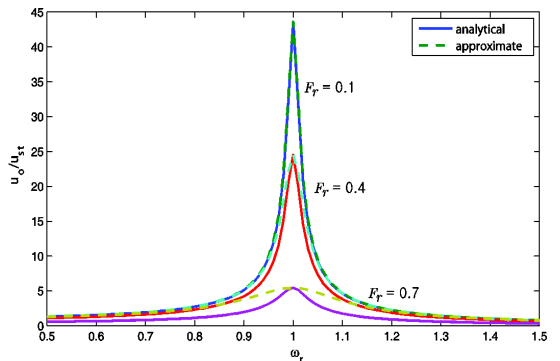


Fig. 4 Comparison of dynamic magnification factors

4. 마찰감쇠기 설계 및 검증

식 (23)에서 정적변위 u_{st} 를 우변으로 이동시켜 정리하면 다음과 같은 전달함수의 형태가 된다.

$$u_0 = H(\omega)F_0 \quad (24)$$

여기서

$$H(\omega) = \frac{1}{k \left[(1 - \omega_r^2)^2 + (2(\xi_v + \xi_{eq})\omega_r)^2 \right]^{1/2}} \quad (25)$$

식 (22)에서와 같이 ξ_{eq} 에는 마찰력비와 건물고유의 점성감쇠비만 존재한다. 건물응답을 감소시키려고 하는 단계에서의 마찰감쇠기 설계는 감쇠기의 설치로 인한 등가감쇠비 증가로 파악하는 것이 일반적이다. 따라서 ξ_{eq} 를 요구하는 변위제어에 따라 구하고 이어서 해당되는 마찰감쇠기의 용량 즉 마찰력을 구하는 설계방법을 이용하기로 한다.

마찰감쇠기는 지진이 가해지는 건물의 변위응답을 감소시켜주어 건물의 붕괴를 방지하는 것이 주목적이기 때문에 제어하려고 하는 응답을 건물의 RMS값(root mean square)이다.

건물에 가해지는 지진하중의 진동수 대역을 광역이라고 하면 건물의 RMS값 σ_f 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_f^2 = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (26)$$

S_0 는 건물의 고유진동수에서의 지진하중 파워스펙트럼이다. 식 (26)은 다음과 같이 구해진다⁽⁶⁾.

$$\sigma_f^2 = \frac{\pi}{2} \frac{S_0}{(\xi_v + \xi_{eq})m^2\omega_n^3} \quad (27)$$

마찰감쇠기가 없을 경우에는 즉, $\xi_{eq}=0$ 일 때 변위 평균으로 식 (27)을 나누면 마찰감쇠기의 변위분산 제어율 J_f 을 구할 수 있다.

$$J_f = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\xi_{eq}}{\xi_v}}} \quad (28)$$

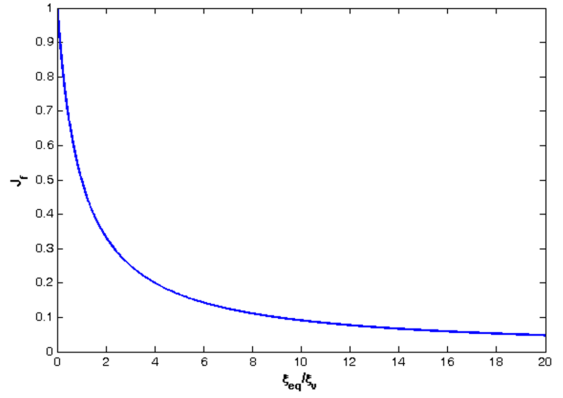


Fig. 5 Control ratio J_f according to $\frac{\xi_{eq}}{\xi_v}$

식 (28)과 Fig. 5에서 알 수 있듯이 제어율은 ξ_v 와 ξ_{eq} 의 비율에 관계한다. 즉 ξ_v 이 작을수록 ξ_{eq} 를 조금 증가시켜도 ξ_{eq}/ξ_v 값이 커져 제어율을 높일 수 있다.

Fig. 5에서 목표제어율이 설정되면 ξ_{eq}/ξ_v 값을 간편히 구할 수 있다. 그리고 식 (22)를 이용하면 다음과 같이 마찰감쇠기의 용량인 마찰력 f_d 를 최종적으로 결정할 수 있다.

$$f_d = \frac{\pi}{4} \frac{\xi_v}{1 + \frac{\xi_{eq}}{\xi_v}} F_0 \quad (29)$$

제시한 간편한 마찰감쇠기 설계절차를 검증하기로 한다. 건물에 가해지는 지진은 El centro 지진하중이며 건물의 RMS값을 30% 감소시키는 즉 목표 제어율을 0.7로 한다. 식 (28)에 의해 제어율이 0.7인 경우를 대입하면 감쇠비 비율 ξ_{eq}/ξ_v 이 1.04이다. $\xi_v=0.01$ 로 한다면 추가로 마찰감쇠기로 요구되는 등가감쇠비 $\xi_{eq}=0.0104$ 이다. 이때 마찰력 f_d 는 식 (29)를 이용하면 $f_d=0.4F_0$ 이다.

F_0 의 산정은 El centro 지진하중의 진동수 대역이 광역이고 건물의 진동수 대역이 협소영역이기 때문에 고유진동수 부근의 푸리에 변환값의 평균을 사용한다. El centro 지진가속도에 건물의 질량을 곱한 $F_0=1047.2N$ 이다. 그 때의 마찰력은 $f_d=419N$ 이다. 건물에 설계된 $f_d=419N$ 의 마찰감쇠기를 설

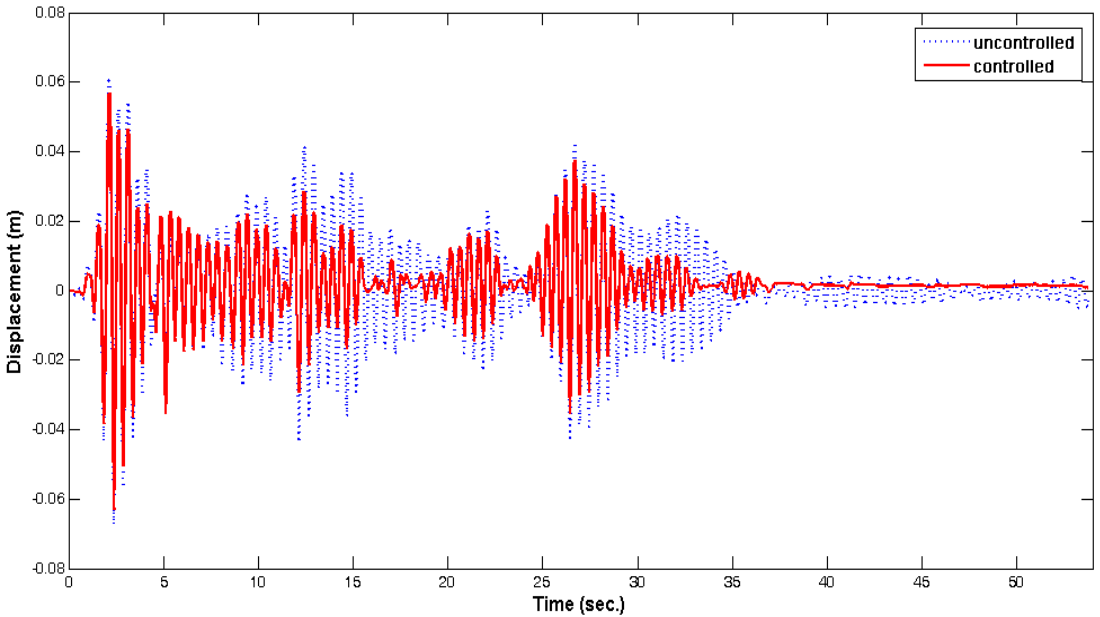


Fig. 6 Uncontrolled and controlled displacements by El centro earthquake

치하여 식 (1)을 수치해석방법으로 구하여 건물의 변위를 마찰감쇠기가 없는 즉, $f_d=0$ 일 때의 변위와 비교하면 Fig. 6과 같다. Fig. 6에서 마찰감쇠기로 인하여 제어가 된 것을 볼 수 있다. 위 변위응답을 하나의 샘플이므로 랜덤프로세스에 의한 RMS값을 구할 수 없다. 그러나 하나의 샘플을 이용하여 일시적 평균제곱(temporal mean square)을 구할 수 있다⁽⁶⁾. 이렇게 하여 구한 위의 제어율이 0.734이다. 따라서 목표 제어율 0.7에 근사하게 마찰감쇠기가 간편하게 설계되는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

마찰감쇠기가 설치된 건물의 동적응답을 파악하기 위하여 응답과 하중에 의존적인 비선형 마찰감쇠기를 등가의 점성감쇠기로 치환하였다. 동적확대계수식을 해석적으로 유도하여 특성을 분석하여 근사화된 계수식과 등가점성감쇠비식을 구하였다. 지진하중을 받는 단자유도 건물의 변위를 제어하기 위한 간편한 설계절차를 제시하였다. 목표제어율이 설계자에 의하여 결정되면 유도된 제어율-감쇠비 비율 식에 따라 감쇠비 비율을 구한 다음, 감쇠비 비율-마찰력비 식에 의거하여 마찰력비를 구한다. 이

어 마찰감쇠기의 마찰력을 구할 수 있게 된다. 설계된 마찰감쇠기를 설치하여 비선형 운동방정식을 수치해석한 결과 제어율이 목표로 한 제어율과 근사하게 나오나 어느 정도의 오차가 있는 것으로 나타났다.

이는 첫째, 마찰감쇠기를 점성감쇠기로 치환한 근사화, 둘째, 동적확대계수식과 등가감쇠비를 공진진동수로 치환한 근사화, 셋째, 동적확대계수를 전달함수로 치환한 근사화, 마지막으로 하나의 샘플만을 이용하여 제어율을 검증한 근사화 등이 누적된 것이라 할 수 있다. 이 논문에서 제시한 간편한 절차에 따르면 비선형 미분방정식의 복잡한 수치해석 과정없이 목표제어율에 부합하는 마찰감쇠기를 설계할 수 있는 장점이 있다. 향후 위의 근사화 과정을 개선하여 목표제어율에 더욱 일치하게 하는 과정 및 건물의 비탄성 거동을 고려한 설계절차 연구가 필요하다.

후 기

이 연구는 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의(No. 2009-0076304) 주관으로 수행된 과제의 연구비 지원에 의해 수행되었습

니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Den Hartog, J. P., 1931, "Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Friction," Trans. ASME, Vol. 53, pp. 107~115.

(2) Hundal, M. S., 1979, "Response of a Base Excited System with Coulomb Viscous Friction," Journal of Sound and Vibration, Vol. 64, No. 3, pp. 371~378.

(3) Liang, J. W., 2005, "Identifying Coulomb and Viscous Damping from Free-vibration Acceleration

Decrements," Journal of Sound and Vibration, Vol. 282, pp. 1208~1220.

(4) Lee, S.-H., Woo, S.-S., Cho, S.-H. and Ching, L., 2007, "Optimal Design of Tuned Mass Damper Considering the Friction between the Moving Mass and the Rail," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 6, pp. 553~559.

(5) Chopra, A. K., 2001, "Dynamics of Structures," Prentice-Hall, U.S.A., p. 844.

(6) Crandall, S. H. and Mark, W. D., 1973, "Random Vibration," Academic Press., U.S.A., p. 165.