

# 초기 비틀림각 및 장착 각의 영향을 고려한 단면 테이퍼진 회전 블레이드의 진동해석

## Vibration Analysis of Rotating Blades with the Cross Section Taper Considering the Pre-twist Angle and the Setting Angle

이 준 희\*·유 흥 희†

Jun Hee Lee and Hong Hee Yoo

(2009년 6월 12일 접수 ; 2009년 12월 14일 심사완료)

**Key Words** : Vibration Analysis(진동해석), Rotating Pre-twisted Blade(초기 비틀림각을 갖는 회전 블레이드), Tapered Cross Section(테이퍼진 단면), Setting Angle(장착 각), Hybrid Deformation Variable Modeling(복합 변형변수를 이용한 모델링), Loci Veering(궤적 휨 현상)

### ABSTRACT

Equations of chordwise and flapwise bending motions for the vibration analysis of rotating pre-twisted blades having tapered cross section and setting angle are derived by using hybrid deformation variable modeling. The two motions are couples to each other due to the pre-twisted angle of the beam cross section. The derived equations are transformed into dimensionless forms in which dimensionless parameters are identified. The effects of the dimensionless parameters on the modal characteristics of rotating pre-twisted blades having tapered cross section and orientation angle are investigated. The eigenvalue loci veering phenomena are also investigated and discussed in this work.

### 1. 서 론

회전 블레이드는 발전용 터빈 블레이드, 헬리콥터의 날개, 인공위성 안테나 그리고 풍력 발전기의 블레이드 등의 회전운동을 하는 시스템의 모델로 사용되어왔다. 그리고 원심력을 받는 구조물의 동적 안정성과 진동에 관한 연구는 기계공학, 항공우주공학 그리고 토목공학 등 많은 분야에 걸쳐 연구자들의 관심의 대상이 되어왔고, 이러한 구조물의 회전운동이 진동특성의 변화에 미치는 영향을 예측하기 위한 연구가 많이 이루어져 왔다.

회전하는 구조물의 동적 특성에 대한 연구는 일

찍이 Southwell에 의해 시작되었다<sup>(1)</sup>. 그는 회전운동에 따른 외팔보의 고유진동수 변화를 계산할 수 있도록 모델을 제시하였고, 그 후 Schilhansl<sup>(2)</sup>은 회전 외팔보의 굽힘 진동방정식을 유도하고 이에 Ritz 방법을 통해 Southwell 방정식의 정확성을 확인하였다. 1970년대를 거치며 전산기의 발전과 더불어 종래의 해석적 방법을 떠나 수치적인 방법<sup>(3)</sup>으로 진동을 해석하려는 연구 결과들이 등장하게 되었다. 이 방법들은 고유진동수를 더 정확하게 구할 수 있을 뿐만 아니라 모드형상도 구할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 이후 회전하는 외팔보의 선형 운동방정식을 복합 변형 변수를 이용하여 정의하고, Kane의 방법을 이용한 보 구조물의 다양한 연구들이 수행되었다<sup>(4-6)</sup>. 한편, 불균일보의 하나인 테이퍼진 단면을 가진 보에 대한 연구에서 Lee는<sup>(7)</sup> 분포 중동력을 받는 테이퍼진 Euler-Bernoulli 보에 대한 동

† 교신저자; 정희원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

Tel : (02)2220-0446, Fax : (02)2293-5070

\* 정희원, 한양대학교 대학원 기계공학과

적 안정성을 수행하였다. 그리고 Rossi와 그의 공동 연구자들은<sup>(8)</sup> 단이 있는 Timoshenko 보와 폭이 균일한 테이퍼진 Timoshenko 보에 대한 자유진동에 대해 연구하였다.

회전운동을 하는 대부분의 구조물들은 불균일한 단면형상과 초기 비틀림각 그리고 허브에 장착되어 있는 자세각인 장착각을 가지고 있다. 이때 위의 조건들로 만들어진 구조물은 회전운동을 함에 따라 시스템의 동적 특성 변화를 일으키게 된다. 이러한 동적 특성의 변화는 처음에 소개했던 예제들과 같은 시스템의 작동 성능과 밀접한 관계가 있으므로, 회전운동과 더불어 불균일한 단면과 초기 비틀림각 그리고 자세각을 갖는 블레이드의 연구가 필요하다. 이 연구의 목적은 위의 세가지 요소를 가진 블레이드의 진동해석을 수행하고, 회전 각속도, 테이퍼진 보의 너비와 두께의 비 그리고 초기 비틀림각과 자세각의 크기 등에 따른 해석 결과를 도출하여 시스템의 동적 특성을 종합적으로 조사하고 시스템의 분석 및 설계를 위한 기반을 구축하는데 있다.

이 논문의 구성은 서론에 이어 복합 변형 변수를 이용하여 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 외팔보의 굽힘 방향 운동방정식을 Kane의 방법<sup>(9)</sup>으로 유도하였으며 무차원 변수를 사용해 진동방정식을 무차원화하였다. 3장에서는 유도된 진동방정식에 근거하여 수치 해석을 실시하고, 그 해석 결과를 보이고 동적 특성의 변화에 대해 논의 하였다. 마지막 장에서는 이 논문의 결론을 요약하여 수록하였다.

## 2. 진동방정식 유도

### 2.1 운동방정식

이 장에서는 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 블레이드의 운동방정식의 유도 과정을 간략히 소개하기로 한다(참고문헌 (9, 10)). 그리고 다음의 가정들을 전제로 하여 진동 특성 변화를 확인하였다. 첫째, 외팔보는 대칭이며 재질은 균질하고 등방성이다. 둘째, 전단 효과와 회전 관성효과는 고려하지 않았다.

Fig. 1은 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 블레이드의 형상을 나타낸다. 그림에서 보의 탄성축과 중심축은 동일 선상에 위치하고  $\hat{a}_1, \hat{b}_1$

과  $\hat{b}'_1$ 은 서로 일치한다.  $\hat{a}_2$ 과  $\hat{b}_2$  혹은  $\hat{a}_3$ 과  $\hat{b}_3$ 이 이루는 각  $\theta_1$ 은 자세각을 나타낸다. 그리고  $\hat{b}_2$ 과  $\hat{b}'_2$  혹은  $\hat{b}_3$ 과  $\hat{b}'_3$ 이 이루는 각  $\theta_0$ 는 자유단의 단면이 고정단의 단면에 비해 비틀린 각도이다. Fig. 2는 변형시 탄성축 상에 점들의 위치변화에 따른 탄성 변위들의 의미와 기준 좌표계를 나타내고 있다.  $\hat{a}_1$ 과  $\hat{a}_2$ 은 기준틀(reference frame) A에 부착된 단위 벡터들을 나타낸다. 탄성축상에 위치한 임의의 질점  $p_0$ 가 변형후  $p$ 의 위치로 움직일 때 그 변위벡터는  $\vec{u}$ 로 나타내고 있으며 그의  $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$  방향 성분은 각각  $u_1, u_2, u_3$ 로 나타내고 있다. 또한  $s$ 는 임의의 질점에서 인장된 길이를 나타낸다. 연속체의 방정식을 근사화하기 위해 가상모드를 이용하여  $s, u_2, u_3$ 를 다음과 같이 근사화한다.

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

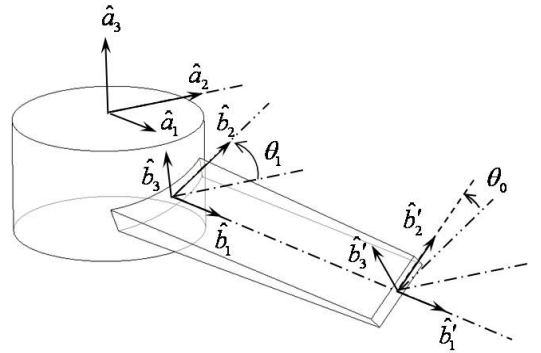


Fig. 1 Configuration of a pre-twisted blade having tapered cross section and orientation angle

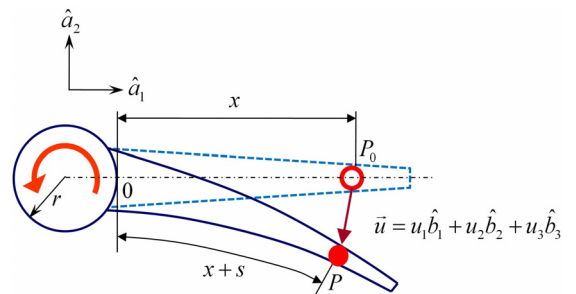


Fig. 2 Deformation of the blade neutral axis

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

$$u_3(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_3} \phi_{3i}(x) q_{3i}(t) \quad (3)$$

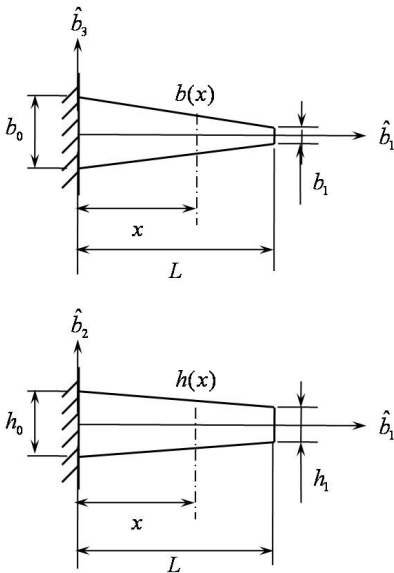
여기서,  $\phi_i, \phi_{2i}, \phi_{3i}$ 는  $s, u_2, u_3$ 를 나타내기 위한 가상모드들이며  $q_i, q_{2i}, q_{3i}$ 는 시간의 함수인 일반좌표들을 나타내고  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ 는 일반좌표의 개수이다. 반경  $r$ 인 강체축  $A$ 가  $\hat{a}_3$  방향으로 일정한 속력  $\Omega$ 로 회전할 때  $A$ 의 각속도와 블레이드의 고정점  $O$ 의 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\omega}^A = \omega_3 \bar{a}_3 \quad (4)$$

$$\bar{v}^O = r\Omega \bar{a}_2 \quad (5)$$

**Table 1** Direction cosine between the two coordinate systems

Orientation angle ( $\theta_1$ )					
$c_{11}$	1	$c_{12}$	0	$c_{13}$	0
$c_{21}$	0	$c_{22}$	$\cos \theta_1$	$c_{23}$	$-\sin \theta_1$
$c_{31}$	0	$c_{32}$	$\sin \theta_1$	$c_{33}$	$\cos \theta_1$



**Fig. 3** A blade with tapered cross section

이때  $P$ 점의 속도  $\bar{v}^P$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \bar{v}^P = & [r\Omega c_{21} + \dot{u}_1 + \Omega(c_{32}u_3 - c_{33}u_2)] \hat{b}_1 \\ & + [r\Omega c_{22} + \dot{u}_2 + \Omega\{c_{33}(x+u_1) - c_{31}u_3\}] \hat{b}_2 \quad (6) \\ & + [r\Omega c_{23} + \dot{u}_3 + \Omega\{c_{31}u_2 - c_{32}(x+u_1)\}] \hat{b}_3 \end{aligned}$$

여기서  $c_{ij}$ 는  $\hat{a}_i$ 와  $\hat{b}_j$  좌표계간의 방향 코사인을 나타내며 좌표계간에는 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= c_{11}\hat{b}_1 + c_{12}\hat{b}_2 + c_{13}\hat{b}_3 \\ \hat{a}_2 &= c_{21}\hat{b}_1 + c_{22}\hat{b}_2 + c_{23}\hat{b}_3 \\ \hat{a}_3 &= c_{31}\hat{b}_1 + c_{32}\hat{b}_2 + c_{33}\hat{b}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

이 연구에서는 Fig. 1에서와 같이 자세각 중에  $\hat{a}_2$ 과  $\hat{b}_2$  혹은  $\hat{a}_3$ 과  $\hat{b}_3$ 이 이루는 각  $\theta_1$ 만을 고려하였고 Table 1은 자세각  $\theta_1$ 에 의한 방향 코사인 값을 나타내고 있다. 식 (3)에서 나타나는  $u_1$ 은  $s, u_2$ 와  $u_3$ 로 표시되어야 하며 이를 위해 참고문헌 (12)에서 제안된 다음의 근사화된 관계식이 유도되어 사용된다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left[ \left( \frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma \quad (8)$$

속도  $\bar{v}^P$ 를 이용하면 시스템의 운동방정식은 다음 식으로부터 유도될 수 있다.

$$\int_0^l \rho(x) \left( \frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \frac{d\bar{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (9)$$

여기서  $\rho(x)$ 와  $l$ 은 보의 단위 길이당 질량과 길이를 의미한다. 그런데 Fig. 3에서와 같이 테이퍼진 단면을 가진 블레이드의 경우 단위 길이당 단면적이 일정하게 변하기 때문에  $\rho(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho(x) = \rho_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \quad (10)$$

식 (10)에서 사용된  $\rho_0$ 는 고정단에서의 단위 길이당 질량이며,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 다음과 같이 각각 자유단의

두께  $h_1$  과 폭  $b_1$  그리고 고정단의 두께  $h_0$  와 폭  $b_0$  의 비로 이루어진다.

$$\alpha = \frac{b_1}{b_0}, \quad \beta = \frac{h_1}{h_0} \quad (11)$$

또한 식 (9)의  $U$ 는 보의 인장 및 굽힘에 의한 탄성에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 + EI_3(x) \left( \frac{d^2u_2}{dx^2} \right)^2 + EI_2(x) \left( \frac{d^2u_3}{dx^2} \right)^2 + 2EI_{23}(x) \left( \frac{d^2u_2}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2u_3}{dx^2} \right) dx \quad (12)$$

여기서,  $E$  와  $A(x)$ 는 블레이드의 각각 탄성계수와 단면적이다. 임의의 단면에서 블레이드의 2차 면적 모멘트와 프로덕트를 나타내는  $I_2, I_3$  과  $I_{23}$ 을 주면 적 모멘트  $I_2^*$ 와  $I_3^*$ 로 나타낼 수 있다.

$$A(x) = b_0 h_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \quad (13)$$

$$I_2(x) = \frac{I_2^*(x) + I_3^*(x)}{2} + \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \cos(2\theta) \quad (14)$$

$$I_3(x) = \frac{I_2^*(x) + I_3^*(x)}{2} - \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \cos(2\theta) \quad (15)$$

$$I_{23}(x) = \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \sin(2\theta) \quad (16)$$

$$I_2^*(x) = \frac{h_x b_x^3}{12} = \frac{h_0 b_0^3}{12} \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right)^3 \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \quad (17)$$

$$I_3^*(x) = \frac{b_x h_x^3}{12} = \frac{b_0 h_0^3}{12} \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right)^3 \quad (18)$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{l} x \quad (19)$$

여기서  $\theta$ 는 블레이드의 임의의 단면에서 비틀림각을 나타내며 따라서 블레이드의 고정단에서  $\theta=0$ , 그리고 자유단에서  $\theta=\theta_0$ 이다. 자세각과 초기 비틀림각을 갖는 테이퍼진 회전 블레이드의 운동 방정식은 이상의 과정을 종합하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} [M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + (K_{ij}^s - \Omega^2 M_{ij}^{11}) q_{1j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} -2c_1 \Omega M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} 2s_1 \Omega M_{ij}^{13} \dot{q}_{3j} = r \Omega^2 P_{1i} + \Omega^2 Q_{1i} \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} 2c_1 \Omega M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} [K_{ij}^{B23} + s_1 c_1 \Omega^2 M_{ij}^{23}] q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} [K_{ij}^{B2} - \Omega^2 (r K_{ij}^{GA2} + K_{ij}^{GB2} + c_1^2 M_{ij}^{22})] q_{2j} = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} - \sum_{j=1}^{\mu_1} 2s_1 \Omega M_{ij}^{31} \dot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} [K_{ij}^{B32} + s_1 c_1 \Omega^2 M_{ij}^{32}] q_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} [K_{ij}^{B3} - \Omega^2 (r K_{ij}^{GA3} + K_{ij}^{GB3} + s_1^2 M_{ij}^{33})] q_{3j} = 0 \quad (17)$$

여기서 나타나는 행렬요소들은 다음 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^l \rho_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \phi_{ai} \phi_{bj} dx$$

$$K_{ij}^s = \int_0^l EA_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \phi'_{1i} \phi'_{1j} dx$$

$$K_{ij}^{B2} = \int_0^l EI_3(x) \phi_{2i}'' \phi_{2j}'' dx$$

$$K_{ij}^{B3} = \int_0^l EI_2(x) \phi_{3i}'' \phi_{3j}'' dx$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{Bab} &= \int_0^l EI_{23}(x)\phi_{ai}''\phi_{bj}'' dx \\
 K_{ij}^{GAa} &= \int_0^l \rho_0 \left( (\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{x^3}{3l^2} + (\alpha + \beta - 2) \frac{x^2}{2l} \right. \\
 &\quad \left. + x - \frac{(2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2)l}{6} \right) \phi_{ai}'\phi_{aj}' dx \\
 K_{ij}^{GBa} &= \int_0^l \rho_0 \left( (\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{x^4}{4l^2} + (\alpha + \beta - 2) \frac{x^3}{3l} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^2}{2} - \frac{(1 + \alpha + \beta + 3\alpha\beta)l^2}{12} \right) \phi_{ai}'\phi_{aj}' dx \\
 P_{ai} &= \int_0^l \rho_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) \phi_{ai} dx \\
 Q_{ai} &= \int_0^l \rho_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{l} \right) \left( 1 + (\beta - 1) \frac{x}{l} \right) x \phi_{ai} dx
 \end{aligned} \tag{18}$$

운동방정식 (16)과 (17)은  $\theta=0$ 이거나  $I_2^* = I_3^*$ 인 경우를 제외하면 항상 서로 연성(coupled) 되어 있음을 알 수 있으며, 이 연성효과에 의한 진동특성 변화가 이 논문의 주요 관심사이다.

### 2.2 무차원 진동방정식

회전 블레이드의 경우 인장방향 모드에 의한 고유진동수는 굽힘모드에 의한 진동수에 비해 일반적으로 훨씬 높다. 따라서 이 두 방향 모드들은 거의 서로 간섭 효과를 가지지 않는다는 가정하에 식 (16)과 (17)만을 이용하여 진동해석을 수행하였다. 또한 식 (16)과 (17)을 무차원화된 진동방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 무차원 변수들을 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \tag{19}$$

$$\xi \equiv \frac{x}{l} \tag{20}$$

$$\vartheta_{aj} \equiv \frac{q_{aj}}{l} \tag{21}$$

$$\delta \equiv \frac{r}{l} \tag{22}$$

$$\gamma \equiv \Omega T \tag{23}$$

$$\kappa \equiv \frac{I_2^*(\xi)}{I_3^*(\xi)} \tag{24}$$

식 (23)에서  $T$ 는 다음과 같이 정의되는 변수이다.

$$T = \sqrt{\frac{\rho_0 l^4}{EI_3^*}} \tag{25}$$

무차원 변수로 정의된 식 (24)를 이용하여 식 (14)~(16)을 다시 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{I_2(\xi)}{I_3^*(\xi)} = \frac{1}{2}(\kappa + 1) + \frac{1}{2}(\kappa - 1)\cos(2\theta_0\xi) \tag{26}$$

$$\frac{I_3(\xi)}{I_3^*(\xi)} = \frac{1}{2}(\kappa + 1) - \frac{1}{2}(\kappa - 1)\cos(2\theta_0\xi) \tag{27}$$

$$\frac{I_{23}(\xi)}{I_3^*(\xi)} = \frac{1}{2}(\kappa - 1)\sin(2\theta_0\xi) \tag{28}$$

이상의 관계식을 이용하여 식 (16)과 (17)을 무차원화된 방정식들로 만들고, Table 1의 방향 코사인을 이용하여 자세각  $\theta_1$ 을 고려하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{\vartheta}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} (K_{ij}^{B23} + s_1 c_1 \gamma^2 M_{ij}^{23}) \vartheta_{3j} \\
 &+ \sum_{j=1}^{\mu_2} [K_{ij}^{B2} - \gamma^2 (\delta K_{ij}^{GA2} + K_{ij}^{GB2} + c_1^2 M_{ij}^{22})] \vartheta_{2j} = 0 \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, \mu_2)
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\mu_3} M_{ij}^{33} \ddot{\vartheta}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} (K_{ij}^{B32} + s_1 c_1 \gamma^2 M_{ij}^{32}) \vartheta_{2j} \\
 &+ \sum_{j=1}^{\mu_3} [K_{ij}^{B3} - \gamma^2 (\delta K_{ij}^{GA3} + K_{ij}^{GB3} + s_1^2 M_{ij}^{33})] \vartheta_{3j} = 0 \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, \mu_2)
 \end{aligned} \tag{30}$$

여기서

$$m_{ij}^{ab} = \int_0^l (1 + (\alpha - 1)\xi)(1 + (\beta - 1)\xi) \varphi_{ai} \varphi_{bi} d\xi$$

$$k_{ij}^{B2} = \int_0^1 (1 + (\alpha - 1)\xi)(1 + (\beta - 1)\xi)^3 \left\{ \frac{1}{2}(\kappa + 1) - \frac{1}{2}(\kappa - 1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{2i}'' \varphi_{2j}'' d\xi$$

$$k_{ij}^{B3} = \int_0^1 (1 + (\alpha - 1)\xi)(1 + (\beta - 1)\xi)^3 \left\{ \frac{1}{2}(\kappa + 1) + \frac{1}{2}(\kappa - 1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{3i}'' \varphi_{3j}'' d\xi$$

$$K_{ij}^{Bab} = \int_0^1 (1 + (\alpha - 1)\xi)(1 + (\beta - 1)\xi)^3 \left\{ \frac{1}{2}(\kappa - 1)\sin(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{ai}'' \varphi_{bj}'' d\xi$$

$$k_{ij}^{GAa} = \int_0^1 \left( (\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{\xi^3}{3} + (\alpha + \beta - 2) \frac{\xi^2}{2} + \xi - \frac{(2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2)}{6} \right) \varphi_{ai}' \varphi_{aj}' d\xi$$

$$k_{ij}^{GBa} = \int_0^1 \left( (\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) \frac{\xi^4}{4} + (\alpha + \beta - 2) \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{(1 + \alpha + \beta + 3\alpha\beta)}{12} \right) \varphi_{ai}' \varphi_{aj}' d\xi$$

$\varphi_{aj}$  는  $\phi_{aj}$  와 동일한 함수값을 가지나  $\xi$  의 함수이며  $\dot{\mathcal{G}}_{aj}$  는  $\mathcal{G}_{aj}$  의  $\tau$  에 관한 2차 미분을 나타낸다. 식 (29)와 (30)에서  $\mathcal{G}_{2j}$  와  $\mathcal{G}_{3j}$  로 구성된 column 벡터를  $\underline{g}$  라 하고 이 벡터를 시간에 대한 조화함수로 가정하면

$$\underline{g} = e^{j\lambda\tau} \underline{\eta} \quad (32)$$

여기서  $\lambda$  는 고유진동수이고  $\underline{\eta}$  는 모드형상을 나타내는 모드벡터이다. 식 (32)를 이용하면 식 (29)와 (30)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda^2 M \underline{\eta} = K \underline{\eta} \quad (33)$$

여기서  $M$  과  $K$  는 대칭 정방행렬들로 그 요소들은 다음과 같이 표시된다.

$$M = \begin{bmatrix} \bar{M}^{22} & 0 \\ 0 & \bar{M}^{33} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$K = \begin{bmatrix} \bar{K}^{22} & \bar{K}^{23} \\ \bar{K}^{32} & \bar{K}^{33} \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서

$$\bar{K}^{22} = \bar{K}^{B2} - \gamma^2 (\delta \bar{K}^{GA2} + \bar{K}^{GB2} + c_1^2 \bar{M}^{22}) \quad (36)$$

$$\bar{K}^{23} = \bar{K}^{B23} + s_1 c_1 \gamma^2 \bar{M}^{23} \quad (37)$$

$$\bar{K}^{32} = \bar{K}^{B32} + s_1 c_1 \gamma^2 \bar{M}^{32} \quad (38)$$

$$\bar{K}^{33} = \bar{K}^{B3} - \gamma^2 (\delta \bar{K}^{GA3} + \bar{K}^{GB3} + s_1^2 \bar{M}^{33}) \quad (39)$$

### 3. 수치 해석 결과

#### 3.1 제안한 방법의 검증

이 장에서는 앞에서 유도된 무차원 진동방정식을 사용하여 수치 해석을 수행하였다. 수치 해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드(assumed modes) 들로는 정지된 블레이드의 굽힘 진동모드들을 사용하였으며 10개의 모드를 이용하였다.

Table 2는 이 연구에서 구해진 수치 해석 결과들의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위해 우선 장착각과 회전운동이 없으며 균일한 단면을 가진 경우에 대해

**Table 2** Comparison of the lowest four natural frequencies( $\gamma=0$ ,  $\kappa=0.25$ ,  $\alpha=\beta=1$ ,  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\delta=0.25$ )

	$\theta_0$	Present	Ref.(13)	Ref.(14)
1st.	30°	1.7623	1.7623	1.7620
	60°	1.7748	1.7737	1.7742
	90°	1.7950	1.7948	1.7949
2nd.	30°	3.4793	3.4788	3.4787
	60°	3.3800	3.3790	3.3790
	90°	3.2429	3.2422	3.2426
	3rd.	30°	11.1696	11.1681
60°		11.6055	11.6025	11.6064
90°		12.2666	12.2631	12.2611
4th.	30°	21.4500	21.4451	21.4568
	60°	20.1611	20.1497	20.1769
	90°	18.7445	18.7246	18.7661

서 기존의 결과들(참고문헌 (13), (14))과 비교하였다. 이 결과들은 가장 낮은 4개의 고유진동수를 비

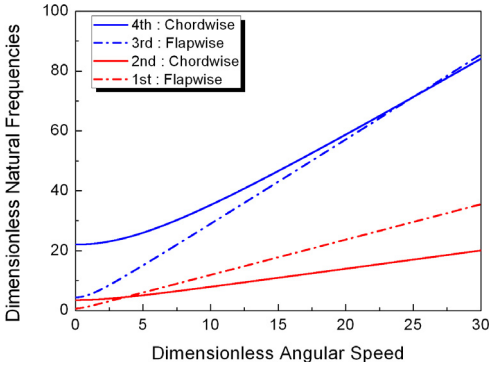
**Table 3** Comparison of the lowest two natural frequencies ( $\kappa=0.0025$ ,  $\alpha=\beta=1$ ,  $\theta_0=30^\circ$ ,  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\delta=0.667$ )

		1st.	2nd.
$\gamma=0.000$	Ref.(15)	0.1766	1.0001
	Present	0.1764	0.9825
$\gamma=0.0882$	Ref.(15)	0.2217	1.0273
	Present	0.2200	1.0203
$\gamma=0.1763$	Ref.(15)	0.3166	1.1321
	Present	0.3157	1.1253
$\gamma=0.2645$	Ref.(15)	0.4277	1.2852
	Present	0.4288	1.2796

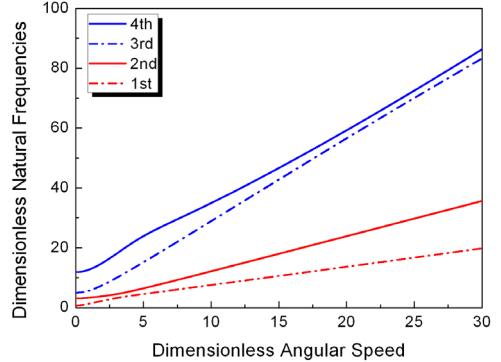
교하였고 서로 오차가 최대 약 0.1% 정도 이내에서 일치하고 있으므로 동등한 결과라고 할 수 있다. Table 3은 블레이드가 회전하는 경우에 평판이론에 의한 기존의 결과(참고문헌 (15))와 이 연구의 결과를 서로 비교하고 있다. 두 결과는 가장 낮은 2개의 고유진동수를 각각 비교하였고 서로 최대 오차가 약 1.5% 정도 범위에서 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 이상의 결과 비교는 이 연구에서 제시된 모델링을 검증하고 신뢰성을 보여준다고 판단된다.

단면 테이퍼, 초기 비틀림각과 장착각을 변화시킨 경우 Figs. 4~5는 회전 각속도를 증가시킬 때 초기 비틀림각과 장착각의 영향에 따른 블레이드의 고유진동수 변화를 나타내고 있다.

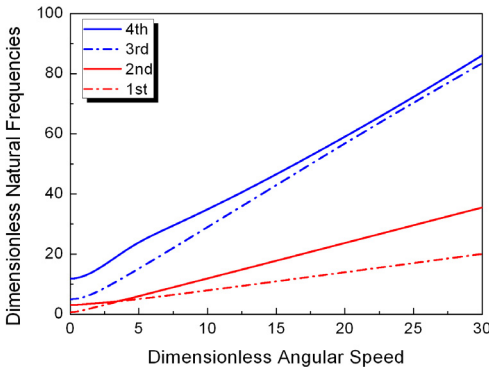
Fig. 4는 초기 비틀림각  $\theta_0$ 가  $0^\circ$ 인 경우와  $30^\circ$ 인



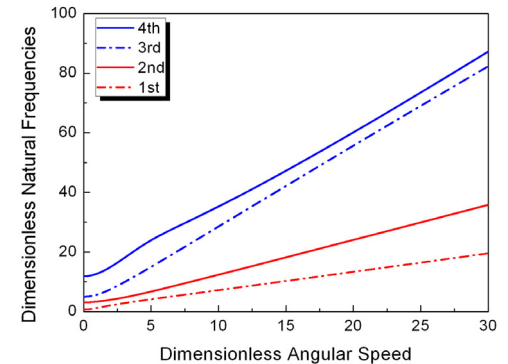
(a) The lowest four natural frequencies of a blade ( $\theta_0=0^\circ$ )



(a) The lowest four natural frequencies of a pre-twisted blade ( $\theta_1=30^\circ$ )



(b) The lowest four natural frequencies of a blade ( $\theta_0=30^\circ$ )



(b) The lowest four natural frequencies of a pre-twisted blade ( $\theta_1=45^\circ$ )

**Fig. 4** Variation of natural frequencies versus angular speed with different pre-twist angle ( $\kappa=0.04$ ,  $\alpha=\beta=1$ ,  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\delta=0.25$ )

**Fig. 5** Variation of natural frequencies versus angular speed with different setting angle ( $\kappa=0.04$ ,  $\alpha=\beta=1$ ,  $\theta_0=30^\circ$ ,  $\delta=0.25$ )

경우에 무차원 회전 각속도의 변화에 따른 가장 낮은 4개의 고유진동수 변화를 보여준다. Fig. 4(a)와 같이 초기 비틀림각이 없는 경우에 고유진동수의 궤적이 서로 교차하는 것을 볼 수 있다. 그러나 Fig. 4(b)처럼  $\theta_0$ 가 존재하게 되면 더 이상 고유진동수의 궤적은 교차하지 않고 일정거리까지 접근했다가 멀어지는 휨 현상(Loci veering) 발생하는 것을 확인 할 수 있다(참고문헌 (16)). 이는 무차원 진동방정식의 연성효과에 의해서 발생된다.

Fig. 5는 초기 비틀림각과 장착각이 동시에 존재할 경우에 무차원 회전 각속도의 변화에 따른 가장 낮은 4개 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸다. 그 결과 초기 비틀림각이 존재하므로 고유진동수의 궤적들간의 휨 현상을 볼 수 있고 장착각이 증가함에 따라서 휨 현상이 일어나는 지점에서 두 궤적의 사이가 멀어지는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 6은 블레이드의 두께 방향 테이퍼 비  $\beta$ 의 변화에 따라 가장 낮은 4개의 고유진동수의 변화를 나타내며, 비교를 위해 폭 방향 테이퍼 비  $\alpha$ 는 1로 고정하였다.  $\beta$ 가 감소함에 따라 3, 4차 고유진동수가 증가하고 따라서 고유진동수 궤적간의 사이도 멀어지면서 Fig. 6(b)의 4차 고유진동수 궤적처럼 굽힘 진동방정식의 연성효과에 따른 초기의 휨 현상이 사라지고 더 완만해지는 것을 확인할 수 있다.

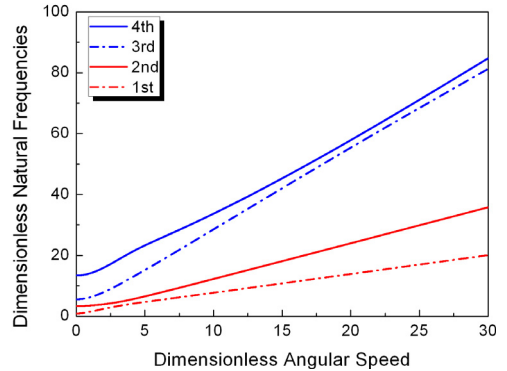
### 3.3 초기 비틀림각에 따른 모드형상의 변화

Figs. 4~6에서 보는 바와 같이 초기 비틀림각  $\theta_0$ 의 영향으로 시스템의 고유진동수 궤적의 휨 현상이 나타나는 것을 확인하였다. 또한 휨 현상과 함께 모드형상(mode shape)의 변화도 관찰 할 수 있는데 Fig. 7과 8에서는 특히 초기 비틀림각의 변화에 따른 모드형상의 변화에 대해 주목하였다. 이 연구에서는 모드형상을 면내와 면외 방향으로 구분하고 각각 블레이드의 고정단을 기준으로 하여 회전하는 방향을 면내 방향으로, 이에 수직한 방향을 면외 방향으로 정의하여 나타내었다.

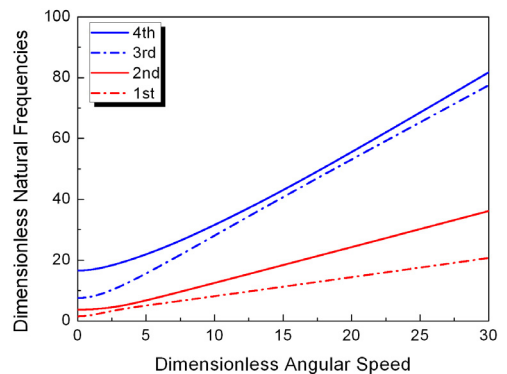
Fig. 7(a)는  $\theta_0$ 이  $10^\circ$ 일 때 무차원 회전 각속도  $\gamma$ 에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 보여준다. 1, 2차 고유진동수는  $\gamma$ 가 약 3.6인 지점에서 휨 현상이 일어나고 있으며, Fig. 7(b)에서는  $\gamma$ 가 3.6인 지점을 전후로 하여 모드형상이 서로 바뀌는 현상을 확인할 수 있다. 특히, 1차 고유진동수에 모드형상

의 경우 면외 방향으로 모드가 지배적으로 움직이다가 면내 방향으로 모드가 우세하게 바뀌고 있고, 2차에서는 이와 반대로 지배적이었던 면내 방향의 모드가 면외 방향의 모드로 서로 역전되는 것을 확인할 수 있다. 이러한 현상은 4, 5차 고유진동수의 모드형상에서 나타난다.  $\gamma$ 가 약 4.5인 지점에서 4차와 5차 고유진동수의 모드가 서로 뒤바뀌는 것을 볼 수 있다.

Fig. 8(a)는  $\theta_0$ 이  $40^\circ$ 일 때 무차원 회전 각속도  $\gamma$ 에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 보여준다.  $\gamma$ 가 약 3.5인 지점에서 1, 2차 고유진동수간의 휨 현상이 일어나고 있으며, Fig. 8(b)에서는  $\gamma$ 가 3.5인 지점을 전후로 하여 모드형상이 역전되는 현상을 보여주고 있다. 또한 1차 고유진동수의 경우 모드형상이 면외



(a) The lowest four natural frequencies of a pre-twisted blade( $\beta=0.8$ )



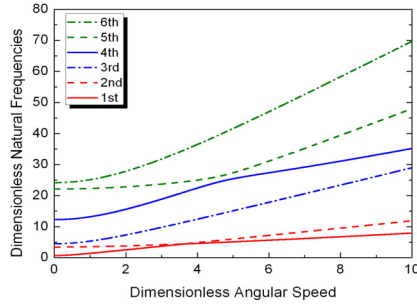
(b) The lowest four natural frequencies of a pre-twisted blade( $\beta=0.5$ )

Fig. 6 Variation of natural frequencies versus angular speed with different setting angle( $\kappa=0.04$ ,  $\alpha=1$ ,  $\theta_0=30^\circ$ ,  $\theta_1=30^\circ$ ,  $\delta=0.25$ )

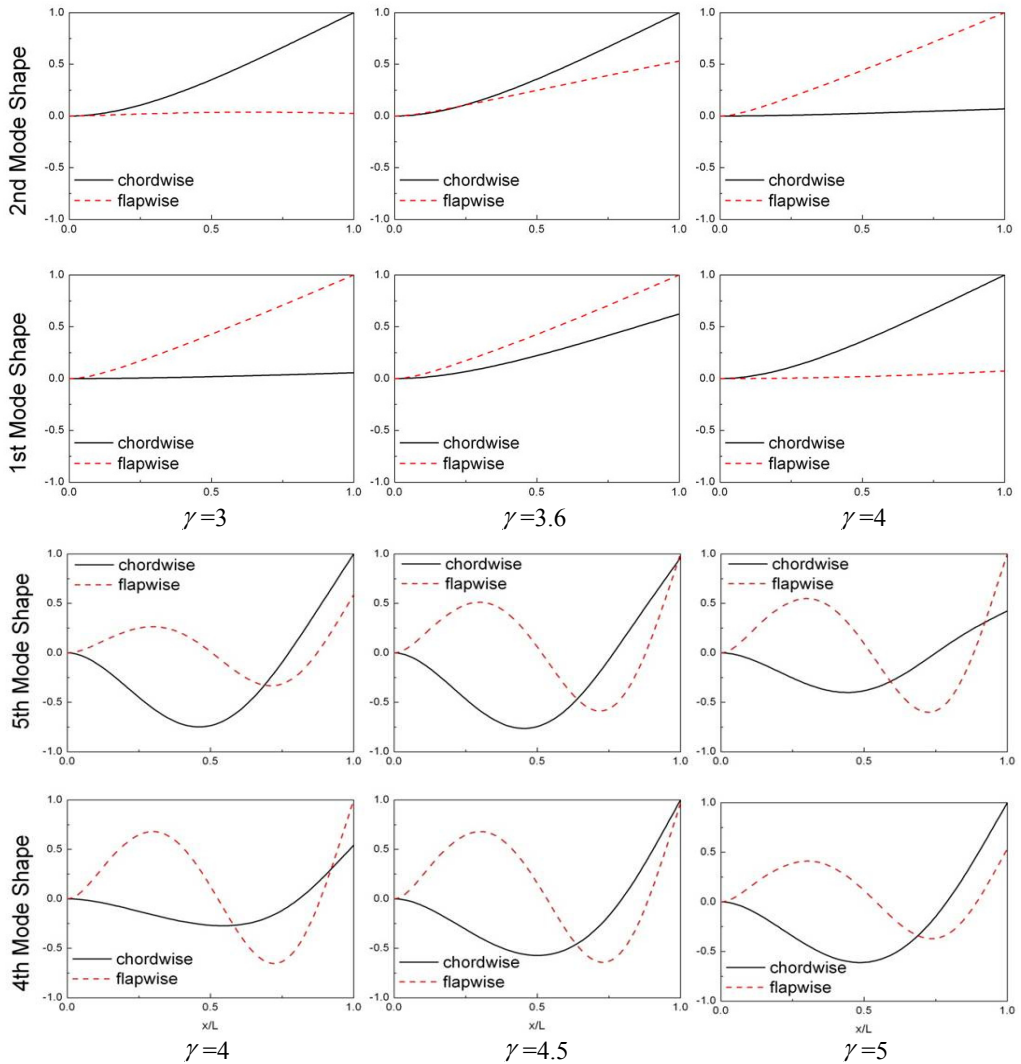


방향에서 면내 방향으로 지배적인 경향을 보이고 있으며 2차 고유진동수에서도 모드형상이 면내 방

향에서 면외 방향으로 우세하게 변하고 있다. 하지만 4, 5차 고유진동수의 모드형상은 서로 뒤바뀌지



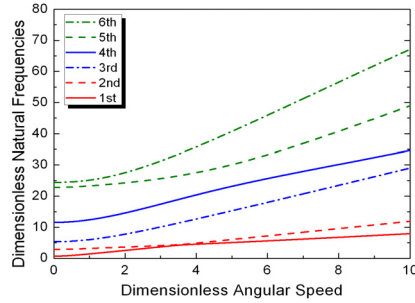
(a) Variation of natural frequencies versus angular speed ( $\theta_0=10^\circ$ )



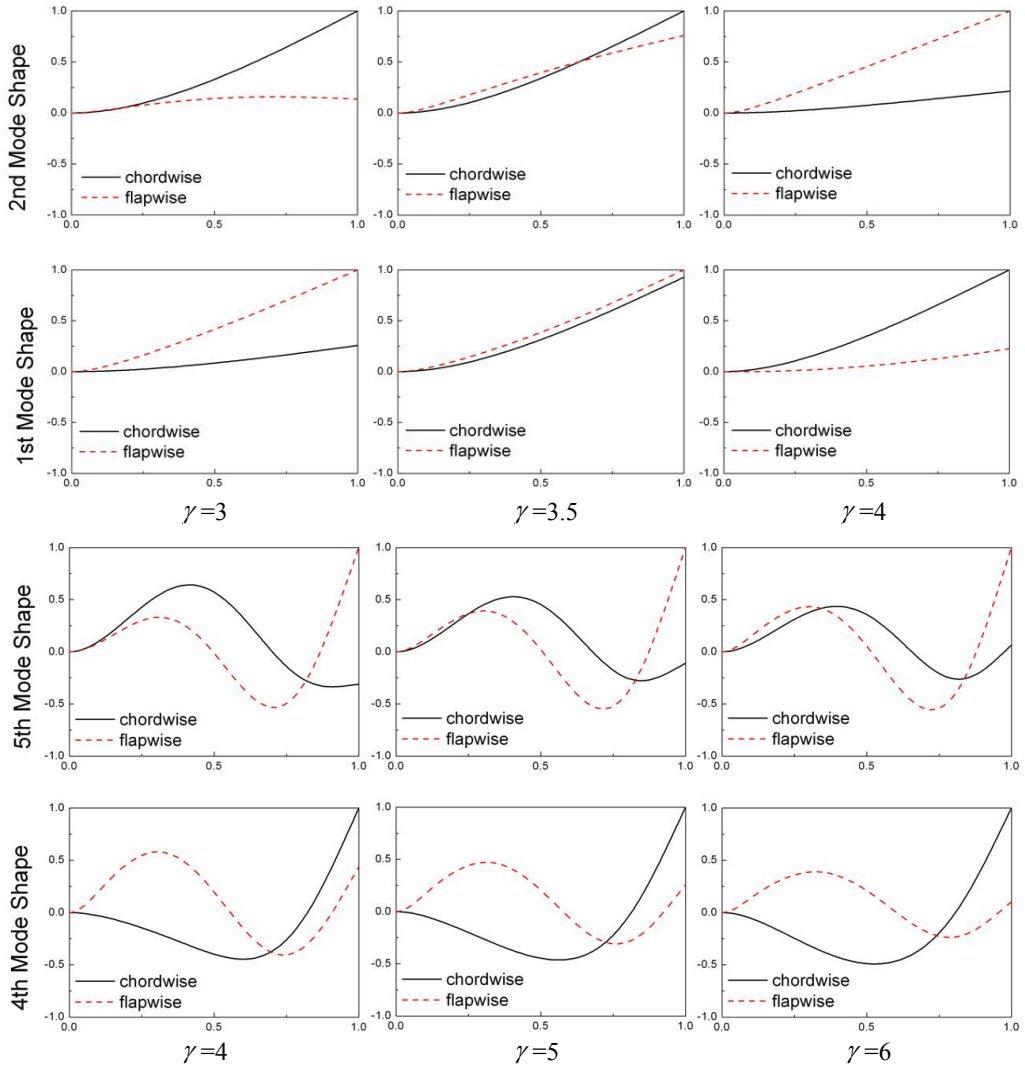
(b) Mode shape variations associated with loci veering ( $\theta_1=10^\circ$ )

Fig. 7 Variation of the natural frequencies and mode shapes ( $\kappa=0.04, \alpha=\beta=1, \theta_1=0^\circ, \delta=0.25$ )

않으며 4차의 모드형상은 면내 방향이 지배적으로 속적으로 나타나는 것을 확인 할 수 있다. Fig. 8(a) 그리고 5차의 모드형상은 면외 방향이 우세하게 지 에서 4, 5차 고유진동수의 궤적간의 휨 현상을 확



(a) Variation of natural frequencies versus angular speed ( $\theta_0=40^\circ$ )



(b) Mode shape variations associated with loci veering ( $\theta_0=40^\circ$ )

**Fig. 8** Variation of the natural frequencies and mode shapes ( $\kappa=0.04$ ,  $\alpha=\beta=1$ ,  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\delta=0.25$ )

인할 수 있지만 휨 현상과 동반되는 모드형상의 역전현상이 일어나지 않았다. 그리고 Fig. 8(a)에서 4, 5차의 고유진동수의 궤적이 Fig. 7(a)와 비교하여 더 완만하고 궤적 사이의 거리도 멀리 떨어져있는 것을 확인 할 수 있다. 휨 현상이 일어나는 두 고유진동수의 이러한 현상은 초기 비틀림각이 시스템의 진동특성 변화에 상당한 영향을 미치게 됨을 예측할 수 있다.

#### 4. 결 론

단면 테이퍼, 초기 비틀림각 그리고 장착각의 영향을 고려한 회전 블레이드의 진동특성을 예측하기 위해 진동방정식을 유도하였으며 이를 이용하여 해석 결과를 도출하였다. 수치해석 결과는 회전 각속도, 초기 비틀림각, 단면 테이퍼비, 장착각, 축 반경 비등의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 보여 주었는데 기존의 수치해석 결과와 비교함으로써 이 연구에서 제시된 방법의 신뢰성과 정확성을 검증할 수 있었다. 이 논문에서는 초기 비틀림각의 영향에 따라 고유진동수 궤적이 서로 교차하지 않고 서로 빗겨가는 veering 현상을 보여줄 뿐만 아니라 단면 테이퍼비와 장착각의 영향에 따라 veering 현상이 완만하게 혹은 급격하게 나타나는 것을 보여 주었다. 또한, 고유진동수 궤적간의 휨 현상과 이에 수반되는 모드형상의 변화를 관찰할 수 있었으며 특히 초기 비틀림각에 따라 굽힘 진동식간의 연성효과에 영향을 미치게 되고 블레이드 시스템의 고유진동수 궤적간의 휨 현상과 모드형상 같은 진동 특성을 예측하는데 중요한 조건임을 확인하였다.

#### 후 기

이 논문은 2009년도 2단계 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었습니다.

#### 참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.

(2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a

Rotating Cantilever Beam," J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.

(3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. Sound and Vibration, Vol. 56, No. 2, pp. 175~185.

(4) Buffinton, K. and Kane, T., 1985, "Dynamics of a Beam Moving Over Supports," International Journal of Solids and Structures, Vol. 21, No. 7, pp. 617~643.

(5) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, No. 2, pp. 139~151.

(6) Lai, S., 1994, "Nonlinear Finite Element modeling of a High Speed Rotating Timoshenko Beam Structure," International Journal of Mechanical Science, Vol. 36, No. 9, pp. 849~861.

(7) Lee, S. Y. and Kuo, Y. H., 1991, "Elastic Stability of Non-uniform Columns," Journal of Sound and Vibration, Vol. 148, No. 1, pp. 11~24.

(8) Rossi, R. E., Laura, P. A. and Gutierrez, R. H., 1990, "A Note on Transverse Vibrations of a Timoshenko Beam of Non-uniform Thickness Clamped at One End and Carrying a Concentrated Mass at the Other," Journal of Sound and Vibration, Vol. 143, No. 3, pp. 491~502.

(9) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics : Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.

(10) Yoo, H. H., 1991, "A Linear Dynamic Modeling using Hybrid Deformation Variables for Rotating Structures," J. of KSAS, Vol. 19, No. 3, pp. 32~39.

(11) Yoo, H. H., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 8, No. 5, pp. 765~774.

(12) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of flexible Beams Undergoing Over-all Motions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.

(13) Carnegie, W. and Thomas, J., 1972, "The

Coupled Bending-bending Vibration of Pre-twisted Tapered Blading,” *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 94, pp. 255~266.

(14) Dokumaci, E., Thomas, J. and Carnegie, W., 1967, “Matrix Displacement Analysis of Coupled Bending-bending Vibrations of Pre-twisted Blading,” *Journal of mech. Eng. Sci.*, Vol. 9, pp. 247~251.

(15) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, “Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, pp. 429~449.

(16) Leissa, A., 1974, “On a Curve Veering Aberration,” *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Vol. 25, pp. 99~111.