Journal of the Korean Data & Information Science Society
2010, **21**(5), 873–882

한국데이터정보과학회지

비재생혼합보증이 종료된 이후의 비용과 비가동시간에 근거한 교체정책에 대한 베이지안 접근†

정기문[1]

[1]경성대학교 정보통계학과

접수 2010년 7월 9일, 수정 2010년 9월 3일, 게재확정 2010년 9월 8일

요 약

본 논문에서는 비재생혼합보증이 종료된 이후의 교체정책에 대한 베이지안 접근을 고려한다. 이때, 비재생혼합보증은 비재생무료교체보증과 비재생비례교체보증의 혼합된 형태가 된다. 최적의 교체주기를 결정하기 위하여 기대비용과 기대비가동시간에 근거한 기준이 사용되는데, 이를 위해서 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간이 각각 구해진다. 시스템의 고장시간이 불확실한 모수를 갖는 와이블분포를 할 때, 베이지안 접근에 근거하여 최적의 교체정책이 제안된다. 이때, 최적의 교체주기를 결정하기 위해서 Jiang과 Ji (2002)에 의해서 제안된 총밸류함수가 사용된다. 끝으로, 본 논문에서 제안된 베이지안 교체정책을 설명하기 위해서 수치적 예를 살펴본다.

주요용어: 기대비가동시간, 기대비용, 비재생혼합보증, 총밸류함수.

1. 서 론

수리가 가능한 시스템 (repairable system)에 대한 예방보전 (Preventive Maintenance; PM)이란 사용자가 시스템을 원하는 수준으로 유지 또는 향상시키기 위하여 시스템에 고장이 발생하기 전에 취하는 일련의 활동이다. 이러한 예방보전과 관련된 연구에 있어서 가장 중요한 관심 사항 중 하나는 시스템에 취해지는 예방보전 활동의 수준을 어떻게 표현 또는 가정하여 모형화를 하는 것이 현실에 근접한 모형이 되겠는가를 고려하는 것이다. 대표적으로 Nakagawa (1986, 1988)는 FR 예방보전모형 (failure rate PM model)을 제안하였고, Canfield (1986)와 Malik (1979)은 AR 예방보전모형 (age reduction PM model)을 제안하였다. 그리고 Lin 등 (2000)은 이 두 모형을 혼합한 형태의 HB 예방보전모형 (hybrid PM model)을 제안하였다.

또한, 수리가 가능한 시스템에는 다양한 형태의 보증정책이 주어지기 때문에, 보증기간이 제공되는 시스템에 대한 사용자 측면의 보전정책 (maintenance policy)과 관련된 연구가 최근까지 활발하게 진행되고 있다 (Sahin과 Polatoglu, 1996; Jung과 Park, 2003; Jung, 2006; Yeh 등, 2007; Chien, 2008; Jung, 2009). 특히, Sahin과 Polatoglu (1996)는 보증기간이 종료된 이후의 사용자 측면의 교체정책 (replacement policy)을 제안하였고, Jung과 Park (2003)은 Sahin과 Polatoglu (1996)가 제안한 보증기간이 종료된 이후의 교체정책을 예방보전정책으로 확장하였다. 또한, Chien (2008)은 재생무료교체보증 (renewing free replacement warranty)이 주어진 시스템에 대하여 일반적인 기령교체 (age replacement policy)모형을 고려하였다. 한편, Yeh 등 (2007)은 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하

† 이 논문은 2010학년도 경성대학교 학술연구비지원에 의하여 연구되었음.
[1] (608-736) 부산광역시 남구 대연3동 314-79, 경성대학교 정보통계학과, 부교수. E-mail: kmjung@ks.ac.kr

면 최소수리 (minimal repair)가 수행되고, 보증기간은 재생되지 않는 비재생무료최소수리보증 (non-renewing free minimal repair warranty)이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 교체정책을 제안하였다.

그런데, 이러한 보전모형에서 시스템의 고장율분포는 실제로 알려지지 않거나 또는 알려진 형태라 하더라도 불확실성 (uncertainty)을 나타내는 모수들을 포함하고 있으므로 이러한 문제를 해결하기 위한 베이즈 관점에서의 연구가 최근까지 많이 진행되고 있다 (Mazzuchi와 Soyer, 1996; Park과 Jun, 1997; Sheu 등, 1999; Han과 Jung, 2002; Jung, 2007). 특히, Mazzuchi와 Soyer (1996)는 일괄교체정책 (block replacement)과 기령교체에 대해 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책을 제안하였고, Sheu 등 (1999)은 시스템에 대한 최소수리 비용을 확률변수로 가정하여 Mazzuchi와 Soyer (1996)의 연구를 확장하였다. 그리고 Han과 Jung (2002)은 비재생보증이 주어진 시스템에 대하여 베이즈 측면에서의 교체모형을 고려하였다.

한편, 앞에서 소개한 보전모형에서는 최적의 보전정책을 결정하기 위해서 단위시간당 기대비용 (expected cost rate per unit time)만을 사용하였다. 그러나 시스템을 운용하는데 있어서 시스템의 비가동시간 (downtime)은 필연적으로 발생하게 될 뿐만이 아니라 사용자에 의해서 중요하게 고려되어야 할 요인이기 때문에 이에 대한 연구가 필요한데, Jung 등 (2008)은 보증기간이 종료된 이후의 비용과 비가동시간에 근거한 최적의 교체정책을 고려하였다. 그리고 Jung 등 (2010)은 Jung 등 (2008)의 연구에 대한 베이지안 접근방법을 제안하였는데, 비재생무료보증과 비재생비례보증이 주어진 경우만을 고려하였고, 무료보증과 비례보증의 혼합 형태인 혼합보증 (combination warranty)에 대해서는 고려하지 않았기 때문에 이들의 연구를 혼합보증이 있는 보전모형으로 확장할 필요가 있다.

따라서 본 연구에서는 비재생무료보증과 비재생비례보증을 모두 포함하는 비재생혼합보증기간이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대하여 기대비용과 기대비가동시간을 함께 고려하는 베이지안 측면의 교체정책을 고려하고자 한다. 즉, 시스템에는 비재생무료보증기간과 비재생비례보증기간을 포함하는 비재생혼합보증기간 (v, w)이 주어지고, 보전기간 (τ) 동안에 시스템에 고장이 발생하면 최소수리가 수행된다. 그리고 보전기간이 종료되는 시점에서는 사용자에 의해서 새 시스템으로 교체된다. 이러한 교체모형에 대하여 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간에 근거한 베이지안 측면의 최적의 교체정책을 제시하고자 한다.

본 논문은 다음과 같은 내용으로 구성된다. 2절에서는 Jung 등 (2008)의 결과에 근거하여 비재생혼합보증기간이 종료된 이후의 교체모형에 대하여 고전적인 접근방법에 의한 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간을 구하고 최적의 교체정책을 결정하는 방법에 대하여 설명한다. 3절에서는 2절에서 고려한 비재생혼합보증기간이 종료된 이후의 교체모형에 대하여 베이지안 측면의 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간을 구하고자 한다. 그리고 이 두 기준을 이용하여 총밸류함수를 정의하고, 이에 근거한 최적의 교체정책을 설정한다. 또한, 모수에 대한 불확실성을 개정하기 위한 순응적 교체정책 (adaptive replacement policy)에 대하여 설명한다. 제 4절에서는 시스템의 고장시간이 와이블분포 (Weibull distribution)를 할 때 수치적 예를 통해서 3절에서 제안된 비재생보증기간이 종료된 이후의 비용과 비가동시간에 근거한 교체모형에 대한 베이지안 접근방법을 설명한다.

2. 비재생혼합보증하에서의 교체정책

2.1. 교체모형

본 절에서는 비재생혼합보증 (non-renewing combination warranty)이 종료된 이후의 기대비용과 기대비가동시간을 함께 고려하는 사용자 측면의 교체모형에 대하여 살펴보고자 하는데, 이를 위해서 다음과 같은 사항들을 가정한다.

가정

i) 시스템에는 비재생혼합보증을 나타내는 v와 w가 주어지는데, 무료보증기간은 $(0, v)$이고, 비례보증기간은 (v, w)가 된다.
ii) 비재생혼합보증이 종료된 이후에 보전기간 동안 시스템에 고장이 발생하면 사용자에 의해서 최소수리가 수행된다.
iii) 무료교체보증기간이 종료되는 시점에서의 시스템의 수명은 y이다.
iv) 무료교체보증기간 동안에 시스템에는 l번의 고장이 발생한다.
v) 시스템은 보전기간이 종료되는 시점에서 사용자에 의해서 교체된다.
vi) d_w는 보증기간 동안에 교체를 위한 비가동시간, d_m은 최소수리를 위한 비가동시간, 그리고 d_r은 시스템을 새 것으로 교체하기 위한 비가동시간이다.
vii) c_m은 최소수리비용, c_{fm}은 보전기간 동안에 발생한 고장으로 인한 비용, c_{fw}은 보증기간 동안에 발생한 고장으로 인한 비용, 그리고 c_r은 교체비용이다.

위와 같은 가정을 통해서 비재생혼합보증이 종료된 이후의 기대비용과 기대비가동시간을 함께 고려하는 교체모형을 고려할 수 있다. 즉, 시스템에는 비재생혼합보증기간 (v, w)이 주어진다. 즉, 비재생혼합보증에서는 무료보증기간인 $(0, v)$ 동안 시스템에 고장이 발생하면 시스템을 무료로 교체해 주고, 비례보증기간인 (v, w) 동안 시스템에 고장이 발생하면 시스템의 사용기간에 비례한 교체비용의 일부를 소비자가 부담하도록 하고 시스템이 교체된다. 그러나 보증기간에 있어서는 재생보증에서처럼 보증기간이 재생되지 않고 처음에 주어진 보증기간이 유지된다. 그러므로 재생혼합보증에서는 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명 (age)은 항상 w이지만 비재생혼합보증에서는 시스템의 수명이 0과 w 사이에 존재하게 된다. 이때, 비재생혼합보증에서 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명을 y라고 하고, 보증기간동안에 발생한 교체 횟수를 l이라고 하자. 여기서 $y = w$이면 $l = 0$이 되고, $l = 0$이면 $y = w$가 된다는 사실을 알 수 있다.

2.2. 기대비용과 기대비가동시간

이 절에서는 2.1절에서 설명한 비재생혼합보증이 종료된 이후의 교체모형에 대하여 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간에 대해서 살펴본다. 먼저, 본 논문에서 고려되는 교체모형에 대한 단위시간당 비용은 Jung 등 (2008)의 결과로부터 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$C_{NC}(\tau) = \frac{1}{w+\tau}\{c_1 + (c_m + c_{fm})N(\tau)\} \tag{2.1}$$

여기서,

$$c_1 = \begin{cases} c_r \dfrac{(w-v)-y}{(w-v)} + c_r + lc_{fw} & , \ 0 < y < w-v \\ c_r + lc_{fw} & , \ y \geq w-v \end{cases}$$

이고, $N(\tau)$는 τ시간 동안의 고장횟수, y는 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명, l은 보증기간 동안의 시스템의 고장횟수, c_m은 최소수리비용, c_{fm}은 보전기간 동안에 발생한 고장으로 인한 비용, c_{fw}은 보증기간 동안에 발생한 고장으로 인한 비용, 그리고 c_r은 교체비용이다.

신뢰성이론에서 고장시간 T의 분포로 가장 널리 사용되는 분포 중의 하나인 와이블분포를 고려하면 시스템의 고장율함수는 다음과 같다.

$$h(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0. \tag{2.2}$$

만약, 시스템의 고장시간이 와이블분포를 가진다고 가정하고 α와 β가 주어지면, 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 구해진다.

$$E[C_{NC}(\tau)|\alpha,\beta]=\frac{1}{w+\tau}\left\{c_1+c_m\alpha((y+\tau)^{\beta}-y^{\beta})\right\}. \tag{2.3}$$

또한, 단위시간당 비가동시간은 Jung 등 (2008)의 결과로부터 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$D_{NC}(\tau)=\frac{1}{w+\tau}\left\{ld_w+d_r+d_mN(\tau)\right\}. \tag{2.4}$$

여기서 l은 보증기간 동안의 시스템의 고장횟수, d_w는 보증기간 동안에 교체를 위한 비가동시간, d_m은 최소수리를 위한 비가동시간, 그리고 d_r은 시스템을 새 것으로 교체하기 위한 비가동시간이다.

만약, 시스템의 고장시간이 식 (2.2)와 같은 고장률함수를 갖는 와이블분포를 가진다고 가정하고 α와 β가 주어지면, 단위시간당 기대비가동시간은 다음과 같이 된다.

$$E[D_{NC}(\tau)|\alpha,\beta]=\frac{1}{w+\tau}\left\{ld_w+d_r+d_m\alpha((y+\tau)^{\beta}-y^{\beta})\right\}. \tag{2.5}$$

2.3. 최적의 교체정책

이 절에서는 식 (2.3)의 단위시간당 기대비용과 식 (2.5)의 단위시간당 기대비가동시간을 함께 고려한 최적의 교체정책을 설명하고자 하는데, 자세한 내용은 Jung 등 (2008)에 나타나 있다. 두 기준에 근거한 최적의 교체정책을 설정하기 위해서 단일 기준에 의한 최적의 교체정책을 살펴보자. 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간은 서로 다른 측정 단위를 사용하고 있기 때문에 이러한 문제를 해결하기 위한 방법이 필요하다. 이를 위해서 Jiang와 Ji (2002)에 의해서 제안된 총밸류함수를 이용한다. $v_1(\tau)$를 단위시간당 기대비용에 대한 밸류함수 (value function)라고 하자. 이때, 식 (2.3)에 있는 단위시간당 기대비용의 최소값을 $C_{\min}$이라고 하면 $v_1(\tau)$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_1(\tau)=\frac{C_{\min}}{E[C_{NC}(\tau)|\alpha,\beta]}. \tag{2.6}$$

그리고, $v_2(\tau)$를 단위시간당 기대비가동시간에 대한 밸류함수라고 하면, $v_2(\tau)$는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_2(\tau)=\frac{D_{\min}}{E[D_{NC}(\tau)|\alpha,\beta]}. \tag{2.7}$$

여기서 $D_{\min}$은 식 (2.5)에 있는 단위시간당 기대비가동시간의 최소값을 의미한다.

이제, 밸류함수 $v_1(\tau)$와 $v_2(\tau)$를 이용하여 다음과 같은 총밸류함수를 정의할 수 있다.

$$V(\tau)=w_1v_1(\tau)+w_2v_2(\tau). \tag{2.8}$$

여기서 w_1은 단위시간당 기대비용에 대한 가중치이고 w_2는 단위시간당 비가동시간에 대한 가중치로써 $w_1+w_2=1$을 만족한다. 따라서, 식 (2.8)에 있는 총밸류함수를 최대화하는 값이 두 기준을 함께 고려한 최적의 보전기간 τ^*가 된다.

3. 베이지안 측면의 최적의 교체정책

2절에서는 비재생혼합보증이 종료된 이후의 비용과 비가동시간에 근거한 교체모형에 대하여 살펴보았다. 그런데, 이러한 교체모형에서 시스템의 고장율분포는 실제로 알려지지 않거나 또는 알려진 형태라 하더라도 불확실성을 나타내는 모수들을 포함하고 있으므로 이러한 문제를 해결하기 위한 베이즈 관점에서의 연구가 필요하다. 따라서 이 절에서는 비재생혼합보증이 종료된 이후의 비용과 비가동시간에 근거한 교체모형에 대한 베이즈 접근방법에 대하여 살펴보고자 한다.

3.1. 기대비용과 기대비가동시간

고장시간 T가 식 (2.2)의 고장률함수를 갖는 와이블분포를 한다고 가정하자. 이 때, 식 (2.2)에서 정의된 고장률함수 $h(t)$에 포함된 두 모수 α와 β에 대한 사전확률분포를 Mazzuchi와 Soyer (1996)의 연구에서와 같이 고려하자. 즉, α는 다음과 같은 감마분포를 따른다고 가정하자.

$$f(a) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \alpha^{a-1} e^{-b\alpha},\ \alpha > 0. \tag{3.1}$$

여기서 a, $b > 0$이고, 이 값은 사전확률분포의 초모수 (hyperparameter)를 나타낸다. 또한, 형태모수 β의 사전확률분포를 가정하기 위해 다음과 같은 베타분포를 고려하고자 한다.

$$g(\beta) = \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \frac{(\beta-\beta_L)^{c-1}(\beta_U-\beta)^{d-1}}{(\beta_U-\beta_L)^{c+d-1}},\ 0 \le \beta_L \le \beta \le \beta_U. \tag{3.2}$$

식 (3.2)에 정의된 베타분포에서 사전정보의 불확실성을 가능한 잘 나타내도록 하기 위해서는 다음과 같이 이산형 베타분포 (discretization of bata density)의 형태로 변형시켜 사용하는 것이 좋다 (Mazzuchi와 Soyer, 1996).

$$\begin{aligned} P_l &= \Pr(\beta = \beta_l) \\ &= \int_{\beta_l-\delta/2}^{\beta_l+\delta/2} g(\beta)d\beta,\ l = 1, 2, \cdots, k. \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기서, $\beta_l = \beta_L + \delta(2l-1)/2$, $\delta = (\beta_U - \beta_L)/k$이다.

그리고, 모수들이 사전독립 (prior independent)이라고 가정하면, α와 β의 결합사전확률분포 (joint prior probability distribution)는 식 (3.1)과 (3.3)에 의해 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} p(\alpha,\beta) &= f(\alpha)\Pr(\beta=\beta_l) \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-1}e^{-b\alpha}P_l. \end{aligned} \tag{3.4}$$

이제 베이즈관점에서의 단위시간당 기대비용은 모수 α와 β의 사전확률분포를 고려하여 다음과 같이 구할 수 있다 (Han과 Jung, 2002).

$$\begin{aligned} E[C(\tau)] &= E_{\alpha,\beta}[E[C_{NC}(\tau)|\alpha,\beta]] \\ &= \sum_{l=1}^{m} \frac{c_1 + (c_m + c_{fm})\left(\dfrac{a}{b}\right)\left((y+\tau)^{\beta_l} - y^{\beta_l}\right)}{w+\tau} P_l, \end{aligned} \tag{3.5}$$

여기서 P_l은 식 (3.3)에 주어져 있으며, c_1은 다음과 같이 정의된다.

$$c_1 = \begin{cases} c_r \dfrac{(w-v)-y}{(w-v)} + c_r + lc_{fw} & , \ 0 < y < w-v \\ c_r + lc_{fw} & , \ y \geq w-v \end{cases}$$

그리고 베이즈관점에서의 단위시간당 기대비가동시간도 모수 α와 β의 사전확률분포를 고려하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[D(\tau)] &= E_{\alpha,\beta}[E[D_{NC}(\tau)|\alpha,\beta]] \\ &= \sum_{l=1}^{m} \frac{ld_w + d_r + d_m \left(\dfrac{a}{b}\right)((y+\tau)^\beta - y^\beta)}{w+\tau} P_l, \end{aligned} \tag{3.6}$$

여기서 P_l은 식 (3.3)에 주어져 있다.

3.2. 최적의 교체정책

이 절에서는 식 (3.5)에 주어진 베이즈관점에서의 단위시간당 기대비용과 식 (3.6)에 주어진 베이즈관점에서의 단위시간당 기대비가동시간을 함께 고려한 최적의 교체정책을 고려하고자 한다. 이러한 두 기준에 근거한 최적의 교체정책을 결정하는 방법은 앞의 2.2절에서 설명한 방법과 유사하다. 먼저, $v_{B1}(\tau)$를 단위시간당 기대비용에 대한 밸류함수라고 하자. 이때, 식 (3.5)에 있는 단위시간당 기대비용의 최소값을 $C_{\min}$이라고 하면 $v_{B1}(\tau)$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_{B1}(\tau) = \frac{C_{\min}}{E[C(x)]}. \tag{3.7}$$

그리고, $v_{B2}(\tau)$를 단위시간당 비가동시간에 대한 밸류함수라고 하면, $v_{B2}(\tau)$는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_{B2}(\tau) = \frac{D_{\min}}{E[D(x)]}. \tag{3.8}$$

여기서 $D_{\min}$은 식 (3.6)에 있는 단위시간당 기대비가동시간의 최소값을 의미한다.

결국, 식 (3.7)의 $v_{B1}(\tau)$와 식 (3.8)의 $v_{B2}(\tau)$를 이용하여 다음과 같은 총밸류함수를 정의할 수 있다.

$$V_B(\tau) = w_3 v_{B1}(\tau) + w_4 v_{B2}(\tau). \tag{3.9}$$

여기서, w_3은 단위시간당 기대비용에 대한 가중치이고 w_4는 단위시간당 비가동시간에 대한 가중치로써 $w_3 + w_4 = 1$을 만족한다. 따라서, 식 (3.9)에 있는 총밸류함수를 최대화하는 값을 두 기준을 함께 고려한 베이즈관점에서의 최적의 보전기간 τ_B^*가 된다.

만약 본 논문에서 고려된 비재생혼합보증이 종료된 이후의 교체정책에서 무료보증기간이 없으면, 즉 $v = 0$이면 식 (3.5)의 단위시간당 기대비용은 비재생비례보증이 종료된 이후의 교체모형에 대한 베이즈관점에서의 단위시간당 기대비용과 동일하게 되고, 비례보증기간이 없으면, 즉 $v = w$이면 식 (3.5)의 단위시간당 기대비용은 비재생무료보증이 종료된 이후의 교체모형에 대한 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용과 동일하게 된다. 따라서 이러한 특별한 경우 즉, $v = 0$ 또는 $v = w$인 경우에는 본 논문의 결과와 Jung 등 (2010)에서 고려한 교체모형에 대한 베이즈 관점에서의 교체정책과 동일하게 됨을 알 수 있다.

3.3. 순응적 교체정책

이 절에서는 순응적 교체정책을 고려하고자 한다. 이를 위해서 보증기간 동안 마지막으로 고장이 발생하여 시스템을 교체한 시점 이후부터 시스템을 새 것으로 교체하기 전까지 발생한 n개의 고장시간 (failure time)을 $t_1, t_2, \cdots, t_n$이라고 하면, 우도함수 (likelihood function)는 다음과 같이 구해진다.

$$L(\alpha, \beta | t_1, t_2, \cdots, t_n) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \alpha\beta t_i^{\beta-1} \right\} \exp\left\{ -\alpha(y+\tau)^{\beta} \right\}. \tag{3.10}$$

따라서, 식 (3.4)에서 정의된 모수들의 결합사전확률분포와 식 (3.10)의 우도함수를 이용하면 α와 β의 결합사후확률분포 (joint posterior probability distribution)는 다음과 같다.

$$f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \cdots, t_n) \propto \prod_{i=1}^{n} \left[\alpha\beta_l t_i^{\beta_l - 1} \exp\left\{ -\alpha(y+\tau)^{\beta_l} \right\} \alpha^{a-1} \exp\left\{ -b\alpha \right\} P_l \right]. \tag{3.11}$$

또한, $f(\alpha | \beta_l, t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(\alpha, \beta_l, t_1, t_2, \cdots, t_n) / \Pr(\beta = \beta_l, t_1, t_2, \cdots, t_n)$이므로 α의 조건부사후확률분포 (conditional posterior probability distribution)는 다음과 같다.

$$f(\alpha | \beta_l, t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{\left\{ b + (y+\tau)^{\beta_l} \right\}^{a+n}}{\Gamma(n+a)} \alpha^{(a+n)-1} \exp\left\{ -\alpha \left(b + (y+\tau)^{\beta_l} \right) \right\}. \tag{3.12}$$

위에서 정의된 식 (3.12)는 모수가 각각 $a^* = a + n$와 $b^* = b + (y+\tau)^{\beta_l}$인 감마분포임을 알 수 있다. 또한, 식 (3.11)과 식 (3.12)를 이용하면 P_l^*는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \Pr(\beta = \beta_l | t_1, t_2, \cdots, t_n) &= P_l^* \\ &= \frac{\beta_l^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} t_i \right\}^{\beta_l - 1} / \left\{ b + (y+\tau)^{\beta_l} \right\}^{a+n}}{\sum_{j=1}^{m} P_j B_j^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} t_i \right\}^{\beta_j - 1} / \left\{ b + (y+\tau)^{\beta_j} \right\}^{a+n}} P_l. \end{aligned} \tag{3.13}$$

이제 α와 β의 주변사후확률분포는 더 이상 독립이 아니며, 최적의 보전정책은 식 (3.5)와 식 (3.6)에서 a, b, P_l의 값을 위에서 구한 a^*, b^*, P_l^*로 대체시킴으로써 얻을 수 있다. 즉, a^*, b^*, P_l^*로 대체된 식 (3.5)와 식 (3.6)을 최소화하는 $\tau_{B,c}^*$과 $\tau_{B,d}^*$를 각각 구한 후 이를 이용하여 식 (3.9)의 총밸류함수를 새롭게 구할 수 있고, 이 총밸류함수를 최대화하는 값이 두 기준을 함께 고려한 최적의 보전기간 τ_B^*가 되는 것이다.

4. 수치적 예

이 절에서는 본 논문에서 고려한 단위시간당 기대비용과 기대비가동시간에 근거한 최적의 교체정책에 대한 베이즈 접근 방법을 모의자료를 통해서 설명하고자 한다. 이릉 위해서 Mazzuchi와 Soyer (1996)의 논문에서와 동일하게 식 (3.1)와 식 (3.3)에 있는 α와 β의 사전확률분포에서 $a = 2.1$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 2$, $\beta_L = 1$, $\beta_U = 3$이라고 가정하고, $c_r = 30$, $c_m = 3$, $d_r = 35$, $d_m = 5$이라고 가정하자.

표 4.1에는 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간에 근거한 베이즈 교체정책에서의 최적의 보전기간이 나타나 있다. 먼저, $y = 0.1$이고 $w_3 = 0.5$일 때, 사전확률분포만을 이용하여 식 (3.9)의 총밸류함수 $V_B(\tau)$를 최대로 하는 베이즈 관점에서의 최적의 보전기간을 구해 보면, 최적의 보전기간은 $\tau_B^* = 2.679$이 됨을 알 수 있다. 즉, 총밸류함수를 최대로하기 위해서는 2.679단위시간에서 새로운 시스템으로 교체하면 된다는 것이고, 이때의 단위시간당 기대비용은 $E[C(\tau_B^*)] = 25.768011$이고, 단위시간당 기대비가동시간은 $E[D(\tau_B^*)] = 21.993239$이다. 그리고 위와 같이 결정된 최적의 베이즈 교체정책

($\tau_B^* = 2.679$)을 표 4.1에 있는 Cycle 1의 고장자료에 적용함으로써 새로운 최적의 베이즈 교체정책을 결정할 수 있다. 즉, 사전확률분포에 의해 결정된 최적의 보전기간을 이용하여 a^*, b^*와 P_l^*를 구하고, 이들 값을 사용하여 총밸류함수를 다시 구할 수 있으며, 이와 같이 구해진 총밸류함수를 최대로 하는 최적의 보전주기를 다시 찾으면, 표 4.2에 제시된 바와 같이 $\tau_B^* = 2.392$이가 된다. 같은 방법으로 Cycle 2와 Cycle 3의 시스템 고장자료에 대해서도 각각 베이즈 관점에서의 최적의 보전기간을 구했으며, 이 결과를 표 4.2에 제시하였다. 또한, 다른 w_3의 값에 대해서도 동일한 방법으로 최적의 보전기간을 결정할 수 있으며, 앞에서와 같은 의미를 부여할 수 있다. 이러한 순응적 교체정책은 실제로 발생되는 시스템의 고장자료에 대한 정보와 이전에 얻어진 최적의 교체정책의 정보를 모두 고려하여 새로운 최적의 교체정책을 결정하게 되므로 모수에 대한 불확실성을 개정할 수 있는 방법이 된다.

표 4.1 단위시간당 기대비용과 기대비가동시간에 근거한 최적의 베이즈 교체정책

y	Optimal Policy	w_3				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	τ_B^*	2.547	2.611	2.679	2.749	2.821
	$V_B(\tau_B^*)$	0.99925	0.99822	0.99787	0.99820	0.99923
0.4	τ_B^*	2.385	2.329	2.275	2.223	2.171
	$V_B(\tau_B^*)$	0.99945	0.99872	0.99848	0.99872	0.99946

표 4.2 단위시간당 기대비용과 기대비가동시간에 근거한 순응적 교체정책

Cycle	고장자료					l	y	τ_B^*	$V_B(\tau_B^*)$
0	based on the prior					1	0.1	2.679	0.99787
1	0.23886*	0.34063	0.61730	0.75832	0.81644	1	0.26114	2.392	0.99964
	0.89211	1.28697	1.32275	1.59933	1.89400				
2	0.06746*	0.54753	0.74183	0.77638	0.89433	1	0.43254	2.264	0.99848
	0.95937	0.96309	0.98799	1.04741	1.39670				
3	0.14949*	0.28799*	0.36531	0.38413	0.61981	2	0.06252	2.842	0.99808
	0.66464	0.97217	1.01994	1.05152	1.09623				

* denotes the time of failure before the warranty is expired.

5. 결 론

본 논문에서는 비재생혼합보증이 있는 수리가 가능한 시스템에 대한 최적의 교체정책에 대하여 베이즈 관점의 접근방법을 고려하였다. 특히, 시스템을 운용하는데 필연적으로 발생하는 비용과 비가동시간을 함께 고려한 Jung 등 (2010)의 연구결과를 일반적인 보증형태인 비재생혼합보증이 있는 시스템에 대한 베이즈 측면의 교체정책으로 확장하였다. 즉, 본 논문에서 고려된 최적의 교체정책에서 무료보증기간이 없으면 비재생비례보증이 종료된 이후의 교체모형에 대한 베이즈 접근법과 동일하게 되고, 비례보증기간이 없으면 비재생무료보증이 종료된 이후의 교체모형에 대한 베이즈 관점의 접근법과 동일하게 된다.

그리고 고장시간이 불확실성을 내포하는 모수 α와 β를 갖는 와이블분포를 할 때 베이즈 관점에서 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간을 각각 구하였다. 그리고 이 두 기준을 동시에 고려한 최적의 교체주기를 결정하기 위해서 기대비용에 근거한 밸류함수와 기대비가동시간에 근거한 밸류함수로 부터 정의되는 총밸류함수를 사용하였다. 더불어, 모수에 대한 불확실성을 개정할 수 있는 순응적 교체정책에 대해서도 살펴보았다.

참고문헌

Canfield, R. V. (1986). Cost optimization of periodic preventive maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 78-81.

Chien, Y. H. (2008). A general age replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty. *European Journal of Operational Research*, **186**, 1046-1058.

Han, S. S. and Jung, G. M. (2002). Bayesian maintenance policy for a repairable system with non-renewing warranty. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **13**, 55-65.

Jiang, R. and Ji, P. (2002). Age replacement policy: A multi-attribute value model. *Reliability Engineering and System Safety,* **76**, 311-318.

Jung, G. M. and Park, D. H.(2003). Optimal maintenance policies during the post-warranty period. *Reliability Engineering and System Safety*, **82**, 173-185.

Jung, K. M. (2006). Optimal preventive maintenance policy for a repairable system. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **17**, 367-377.

Jung, K. M. (2007). A Bayesian approach to PM model with random maintenance quality. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **18**, 689-696.

Jung, K. M. (2009). Two PM policies following the expiration of free-re[air warranty. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **20**, 999-1007.

Jung, K. M., Han, S. S. and Park, D. H. (2008). Optimization of cost and downtime for replacement model following the expiration of warranty. *Reliability Engineering and System Safety*, **93**, 995-1003.

Jung, K. M., Han, S. S. and Park, D. H. (2010). A Bayesian approach to maintenance policy based on cost and downtime after non-renewing warranty. *Communication in Statistics-Theory and Method*, **39**, 2321-2332.

Lin, D., Zuo, M. J. and Yam, R. C. M. (2000). General sequential imperfect preventive maintenance models. *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering*, **7**, 253-266.

Malik, M. A. K. (1979). Reliable preventive maintenance scheduling. *AIIE Transactions*, **11**, 221-228

Mazzuchi, T. A. and Soyer, R. (1996). A Bayesian perspective on some replacement strategies. *Reliability Engineering and System Safety*, **51**, 295-303.

Nakagawa, T. (1986). Periodic and sequential preventive maintenance policies. *Journal of Applied Probability*, **23**, 536-542.

Nakagawa, T. (1988). Sequential imperfect preventive maintenance policies. *IEEE Transactions on Reliability*, **37**, 295-298.

Park, K. S. and Jun, C. H. (1997). An optimum maintenance policy: A Bayesian approach to periodic incomplete preventive maintenance with minimal repair at failure. *Proceedings of '97 Conference of the Korean Operations Research and Management Science Society*, 193-196.

Sahin, I. and Polatoglu, H. (1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty. *IEEE Transactions on Reliability,* **45**, 220-228.

Sheu, S. H., Yeh, R. H., Lin, Y. B. and Juang, M. G. (1999). A Bayesian perspective on age replacement with minimal repair. *Reliability Engineering and System Safety*, **65**, 55-64.

Yeh, R. H., Chen, M. Y. and Lin, C. Y. (2007). Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty. *European Journal of Operational Research*, **176**, 1678-1686.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2010, **21**(5), 873–882

한국데이터정보과학회지

A Bayesian approach to replacement policy following the expiration of non-renewing combination warranty based on cost and downtime[†]

Ki Mun Jung[1]

Department of Informational Statistics, Kyungsung University

Received 9 July 2010, revised 3 September 2010, accepted 8 September 2010

Abstract

This paper considers a Bayesian approach to replacement policy following the expiration of non-renewing combination warranty. The non-renewing combination warranty is the combination of the non-renewing free replacement warranty and the non-renewing pro-rata replacement warranty. We use the criterion based on the expected cost and the expected downtime to determine the optimal replacement period. To do so, we obtain the expected cost rate per unit time and the expected downtime per unit time, respectively. When the failure times are assumed to follow a Weibull distribution with uncertain parameters, we propose the optimal replacement policy based on the Bayesian approach. The overall value function suggested by Jiang and Ji (2002) is utilized to determine the optimal replacement period. Also, the numerical examples are presented for illustrative purpose.

Keywords: Expected cost, expected downtime, non-renewing combination warranty, overall value function.

[†] This research was supported by Kyungsung University Research Grants in 2010.

[1] Associate professor, Department of Informational Statistics, Kyungsung University, Busan 608-736, Korea. E-mail: kmjung@ks.ac.kr