

천수흐름 해석을 위한 2차원 유한요소모형의 개발

Development of 2D Finite Element Model for the Analysis of Shallow Water Flow

서일원* · 송창근**

Seo, Il Won · Song, Chang Geun

Abstract

A finite element model for analyzing surface water flow was developed. Shallow water equation was discretized and solved by Galerkin and Newton-Raphson method. Triangular or rectangular elements can be mixed together to construct meshes. The algebraic equation was solved by frontal method which is very efficient in finite element problem. The developed model was applied to rectangular meandering channel with two bends and transverse velocities and water depth distributions were examined. High velocity was located near the inner bank at the apexes of the bends and velocity distribution was symmetrical about the centerline at the midsection of two bend and super elevation also occurred. Simulation results showed very good agreement with measured data. Another numerical simulation was carried out in mild, steep, adverse and abrupt bottom change slope and channels with weir. 12 water surface profiles of gradually varied flow were correct in terms of hydraulic interpretation.

Keywords : surface water flow, shallow water equation, finite element method, Galerkin, meandering channel, gradually varied flow

요 지

본 연구에서는 지표수 흐름 해석을 위한 2차원 유한요소모형을 개발하였다. 개발된 수치모형에서는 2차원 흐름 해석을 위한 천수방정식을 Galerkin법과 Newton-Raphson법에 의해 이산화하였으며 지형에 따라 삼각망과 사각망을 혼용하여 사용할 수 있도록 하였다. 구성된 대수방정식의 해는 유한요소법을 푸는데 매우 효율적인 프론탈 기법에 의해 구하였다. 개발된 모형을 두 개의 만곡부를 가지는 실험실 사행수로에 적용하여 만곡부에서의 횡방향 유속 및 수심 분포를 분석한 결과 만곡부에서 편수위 현상을 잘 재현함을 알 수 있었다. 또한 내측의 유속이 외측에 비해 빠르게 나타났고 유속분포는 두 만곡부의 중심을 기준으로 대칭적이었으며, 모의결과와 수리실험에 의한 실측값이 매우 잘 일치하였다. 본 모형을 완경사, 급경사, 역경사, 급격한 하상변화가 있는 수로와 위어를 포함한 수로에 적용하여 12개의 점변화류 수면곡선을 모의한 결과 수리학적으로 적합한 수면형상이 도출되었다.

핵심용어 : 지표수 흐름, 천수방정식, 유한요소법, Galerkin, 사행수로, 점변화류

1. 서 론

하천, 하구 및 연안 영역에서는 일반적으로 수심에 비해 폭이 매우 넓으므로 종방향 유속과 횡방향 유속을 수심방향으로 평균한 유속장을 구하는 천수흐름 해석이 널리 이용된다. 3차원 연속방정식과 운동량방정식을 시간 적분과 수심 적분하여 얻어지는 천수방정식을 수치모형화하여 지형자료, 경계조건 및 매개변수 등을 입력하면 수평 2차원 평면 내에서의 유속 및 수심을 구할 수 있다. 천수방정식의 해는 위어, 댐 및 교량과 같은 수리 구조물을 계획하고 설계하는데 있어서 수리학적 거동을 해석하는데 이용되며 사행, 여울과 소 및 난류 분포 등에 의한 침식과 퇴적을 예측하는 데에도 활용될 수 있다. 또한 구해진 유속장은 오염 확산 및 유사이송 문제를 해석하기 위한 입력자료로 활용되며 생태모형

에서는 어류 서식의 적합도를 산정하는 기본 자료인 유속과 수심 정보를 제공하는 데에도 사용된다. 또한 홍수범람모형 구성을 위한 기본 해석엔진으로 활용되기도 한다.

국내에서의 2차원 천수방정식에 관한 수치해석은 유한차분법을 중심으로 이루어져 왔다. 이갑덕 등(1981)과 최병호(1983)가 각각 울산만과 경기만의 조석해석을 유한차분법을 이용해 수행한 바 있으며, 이길성과 강주환(1989)은 천수방정식의 유한차분특성을 연구하였다. 김창완 등(1995)과 이진희 등(1996)은 유한체적법을 이용해 2차원 하천흐름을 해석하였다. 이에 반해 유한요소법에 관한 연구로는 주로 외국의 상용프로그램의 적용에 국한되었는데 오정선 등(2004)은 사행수로에 RMA-2와 RMA-4 모형을 적용하여 오염운(pollutant cloud)이 최대유속선과 일치하여 거동하는 경향을 분석하였으며, 김승용(2002)은 한강 인도교로부터 전류구간까지의 흐

*정회원 · 교신저자 · 서울대학교 건설환경공학부 교수 (E-mail : seoilwon@snu.ac.kr)

**정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 박사과정 (E-mail : bay680@snu.ac.kr)

를 상태를 분석하기 위해 RMA-2 모형을 적용하고 신곡수 중보 구간에서는 실측자료와 비교하였고 윤용남과 박무중(1994)은 FESWMS 모형을 한강하류부에 적용하여 흐름을 해석하였다. 서일원 등(2008)은 신곡수중보로부터 유도지점까지 총 36.8 km에 이르는 구간에 RMA-2 모형과 RAM4 모형을 적용하여 감조하천에서 조위에 의한 정방향 및 역방향 흐름 특성을 분석하고 이에 따른 오염확산 거동을 모의한 바 있다. 모형의 개발에 관한 연구로는 윤태훈(1982)이 항만 내 토사이동을 예측하기 위한 유한요소모형을 개발한 연구, 한건연 등(2003)이 급변부정류 해석을 위한 SU/PG 유한요소법을 개발하여 적용한 연구, 김태범 등(2006)이 CDG 기법을 천수방정식에 적용하여 도수현상과 단면축소수로에서의 흐름분석을 수행한 연구가 있다.

국외에서는 다음과 같은 연구가 진행되었다. Dupont(1973), Thomee와 Wendroff(1974)는 일반적인 쌍곡선 편미분 방정식에 Galerkin법을 적용하여 수렴도와 정확도를 분석하였으며 천수방정식에 관한 수학적 분석은 Cullen(1976)과 Navon(1977)이 제시한 바 있다. Weare(1976)는 FDM과 FEM 기법으로 천수방정식을 푸는 시간을 비교하여 FEM방법이 더 많은 시간이 소요되므로 질량집중(mass lumping) 행렬을 이용하여 계산시간을 줄이는 것을 제안하였다. Staniforth(1987)은 텐서곱방법(tensor product method)을 이용한 사각망을 사용하면 삼각망을 사용하는 경우에 비해 보다 효율적인 알고리즘을 구성할 수 있음을 증명하였다. 또한 FDM의 경우와 동일한 CFL 조건을 적용하여 해의 안정성을 분석할 수 있으며 해의 정밀도는 FDM에 비해 우수하나 계산시간이 더 오래 걸린다고 언급하였다. Taylor와 Huyakorn(1978)은 천수방정식의 비선형항을 일관질량행렬(consistent mass matrix)을 이용한 양해 반복법, 집중질량행렬(lumped mass matrix)을 이용한 양해 반복법, 음해 Newton-Raphson 방법 등의 3가지로 풀고 해의 양상을 비교하여 음해 Newton-Raphson법이 가장 효율적이라고 제시하였다. Praegman(1982)은 천수방정식을 FDM과 FEM으로 이산화하고 계산시간을 비교한 결과 큰 차이가 없다고 주장하고 조도계수가 해의 안정성과 정확성에 중요한 역할을 미치며 시간차분에 의한 영향은 작다고 하였다. Engelman 등(1982)은 직교좌표계와 일치하지 않는 지형의 경우에 범선 및 접선 방향 경계조건을 부여하는 방법을 일반화하여 제시하였다. Oden과 Carey(1982)는 천수방정식에서 자유수면과 유속에 대한 보간함수를 설정하는 것이 매우 중요하며 보간함수의 차수를 잘못 적용하게 되면 격자를 조밀하게 구성해도 해가 수렴하지 않게 된다고 주장한 바 있다. Walters와 Carey(1983)는 Navier-Stokes 방정식의 경우 수치진동은 압력에만 나타나지만 천수방정식의 경우 연속방정식에 자유수면에 관한 시간 미분항이 존재하므로 수면과 유속 결과가 연동되어 해 전체에 이질적인 수치진동이 발생할 수 있다고 주장하고, 유속과 수면을 모두 2차 함수로 보간한 경우 수치진동이 가장 심하며 유속을 1차, 수면을 2차 함수로 보간한 경우에도 가성모드(spurious mode)에 의해 진동이 발생하는 것을 지적하였다. 하지만 유속을 2차, 수면을 1차 함수로 보간한 경우에는 가성모드가 발생하지 않아서 수치진동이 없었으며 두 변수를 모두 1차 함수로 보간한 경우에도 이와 매우 유사한 결

과를 얻을 수 있다고 제시하였다.

본 연구의 목적은 천수흐름 해석을 위한 2차원 유한요소 모형을 개발하고, 개발된 모형에 의한 수치모의 결과를 수리 실험자료와 비교하여 모형의 적용성을 검증하는 것이다. 본 논문에서는 Navier-Stokes 방정식으로부터 텐서형 난류점성 계수를 갖는 천수방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식에 유한요소법을 적용하여 수치모형을 구성하였다. 개발된 수치 모형을 두 개의 만족부를 가지는 사행수로에 적용하고 유속 구조 모의 결과를 실측자료와 비교하여 모형을 검증하였다. 나아가서 5개의 하상경사를 가지는 점변화류에 대한 12개의 수면 형상을 모의하여 다양한 하상조건 및 경계조건에 따른 모형의 적용성을 검증하였다.

2. 수학적 모형

유체 운동의 순간적 변동을 묘사하는 식 (1a)과 같은 Navier-Stokes 방정식의 주요 변수인 유속, 밀도 및 압력을 평균과 변동량으로 분해하고 Reynolds 평균법칙을 적용하여 시간평균을 취하면 난류의 평균적 흐름에 대한 운동방정식인 식 (1b)와 같은 Reynolds 방정식을 얻을 수 있다(Daily와 Harleman, 1966).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g \delta_{3i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_M \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - g \delta_{3i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_M \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (1b)$$

여기서 $i=1,2,3$, \bar{u}_i 와 \bar{p} 는 유속 u_i 과 압력 p 의 시간평균값, g 는 중력가속도, δ_{3i} 는 i 가 3인 경우는 1, 나머지 경우에는 0이며 ν_M 은 분자동점성계수이다. $\overline{u_i' u_j'}$ 는 유속 변동량의 상관관계에 의해 생성된 항으로 Boussinesq가 제안한 와점성계수(eddy viscosity) 개념(Daily와 Harleman, 1966)을 도입하여 평균유속의 경사와 비례한다고 가정하고 비례상수를 ν_T 로 두면 식 (1b)는 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g \delta_{3i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_T + \nu_M) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2)$$

위 식에서 시간평균을 나타내는 overbar는 편의상 생략하였다. 식 (2)에 연직방향 가속도는 중력가속도에 비해 매우 작다는 정수압 가정과 압력과 밀도를 정수압 상태인 p_0 , ρ_0 와 흐름에 의해 발생하는 p' , ρ' 로 구분하여 $p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$ 와 $\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$ 로 간주하는 Boussinesq 가정(Kowalik과 Murty, 1993)을 도입하면 연직방향 압력 경사항은 임의의 깊이 z 부터 자유수면인 $z = H + h(x, y, t)$ 까지 $\int_z^{H+h} dp = -\int_z^{H+h} g(\rho_0 + \rho') dz$ 와 같이 적분된다. 자유수면에서의 압력은 대기압(p_a)과 같으므로 이상의 과정을 거쳐 식 (2)는 다음과 같은 형태로 유도된다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} - g \frac{\partial (H+h)}{\partial x_i} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{H+h} \rho' dz + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_T + \nu_M) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

식 (3)의 경우 $i=3$ 에 해당하는 연직방향 식은 정수압 가정과 Boussinesq 가정에 의해 수평방향 압력 경사항에 포함되므로 $i=1, 2$ 의 값을 갖게 된다.

수심방향으로 적분된 천수방정식을 유도하기 위해 식 (3)을 그림 1과 같이 바닥 $z=H(x, y)$ 에서부터 자유수면

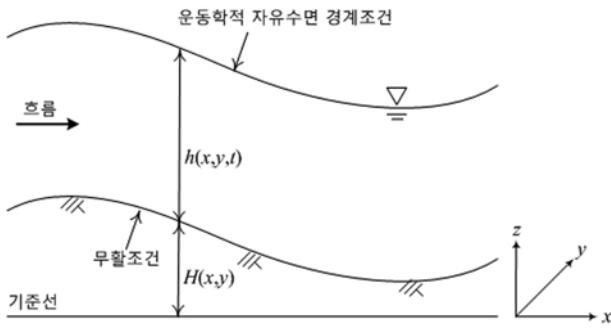


그림 1. 좌표계 및 수면과 바닥에서의 경계조건

$z = H + h(x, y, t)$ 까지 Leibnitz 법칙을 이용하여 연직방향으로 적분하고 운동학적 자유수면 경계조건과 바닥에서의 무활조건(no slip condition)을 적용한 후 밀도의 성층화를 무시($\rho = 0$)하면 다음과 같은 천수방정식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} - g \frac{\partial(H+h)}{\partial x_i} + \frac{\tau_{x_i}^s - \tau_{x_i}^b}{h \rho_0} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_T + v_M) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (4)$$

여기서, \tilde{u}_i 는 연직방향 평균 유속으로 $\tilde{u}_i = \frac{1}{h} \int_H^{H+h} u_i dz$ 이다. 식 (4)를 간략화하기 위해 다음과 같은 4가지 가정이 필요하다. 첫 번째는 대기압 경사항인 $\partial p_a / \partial x_i$ 은 폭풍해일예측의 경우를 제외하고는 일반적으로 무시할 수 있으므로 생략한다(Weiyan, 1992). 두 번째는 수표면 전단력인 $\tau_{x_i}^s$ 항에 관한 것으로 풍속이 유속의 100 배를 초과하는 경우에만 중요한 인자로 작용하므로 이 항 역시 일반적인 경우에는 무시할 수 있다(Vreugdenhil, 1994). 세 번째는 바닥 전단력에 해당하는 $\tau_{x_i}^b$ 항에 관한 것으로 1차원 Saint-Venant 방정식의 하상마찰경사항에 Chezy식($S_f = u^2 / (C^2 R)$)과 Manning 계수와 관계식($C = R^{1/6} / n$)을 적용하고 2차원으로 확장하면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\tau_{x_i}^b = \rho g h S_{f x_i} = \rho g h \frac{u_i \sqrt{u_j \cdot u_j}}{C^2 h} = \rho g n^2 \frac{u_i \sqrt{u_j \cdot u_j}}{h^{1/3}} \quad (5)$$

마지막은 점성계수에 관한 것으로 와점성계수(ν_T)가 분자 점성계수(ν_M)에 비해 월등히 크므로 분자점성계수를 무시한다는 가정이다. 위의 4 가지 가정을 도입하면 식 (4)는 다음과 같이 단순화된다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial(H+h)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - g n^2 \frac{u_i \sqrt{u_j \cdot u_j}}{h^{4/3}} \quad (6)$$

위 식에서 수심평균을 나타내는 tilde는 편의상 생략하였다. 본 연구에서는 다음과 같이 와점성계수를 텐서형태로 변형한 운동량보존방정식을 선택하여 수평 2차원 평면 내에서 4 개의 방향성을 가지는 난류점성계수를 도입하고 다양한 흐름 조건에서 복잡한 유속구조를 보다 정확히 재현할 수 있도록 하였다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial(H+h)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - g n^2 \frac{u_i \sqrt{u_j \cdot u_j}}{h^{4/3}} \quad (7)$$

위 식에서 u_i 는 i 가 1인 경우에는 x 방향 수심평균 유속, i 가 2인 경우에는 y 방향 수심평균 유속이다. g 는 중력가속도, n 은 조도계수를 의미하며 ν_{ij} 는 텐서 형태의 난류점성계수를 나타낸다. H 와 h 는 기준선으로부터 하상까지의 거리

와 수심을 나타낸다. 여기에 대응하는 질량보존방정식은 다음과 같은 식을 채택하였다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

3. 수치모형

본 연구에서 지배방정식인 식 (7)~(8)을 이산화하기 위해 사용된 수치기법은 유한요소법으로 다음과 같은 장점을 가진다. 우선 불규칙한 지형을 다른 수치기법에 비해 훨씬 효율적이고 정확하게 재현할 수 있으며(Huebner 등, 1995; Davies, 1980; Pinder와 Gray, 1977) 지형 적응형 격자(adaptive mesh)를 사용하여 격자의 크기나 노드수, 해의 정확도 등을 최적화 할 수 있는 장점이 있다(Heinrich와 Pepper, 1999; Kamiadakis와 Sherwin, 2005; Chung, 1992). 또한 다양한 Neumann 경계조건에 매우 직접적이고 용이하게 적용할 수 있으며(Gresho와 Sani, 1998; Fletcher, 1984) 탄탄한 수학적 기반을 근거로 한 수치기법이므로 오차, 수렴, 해의 정확도 등에 관한 수학적 분석이 가능한 장점도 있다(Strang과 Fix, 1973; Axelsson과 Barker, 1984; Thomee, 1984; Wait와 Mitchell, 1985). 유한요소법은 절점이 아닌 요소에 기초하기 때문에 다양한 보간함수를 채택하면 요소 내부의 절점에 대하여 정확한 수치해를 얻을 수 있다(Ghanem, 1995).

본 연구에서는 다음과 같은 과정을 통하여 지배방정식을 수치 모형화하였다. 주요 미지수인 유속 및 수심 변수를 \mathbf{u} 로 대표하면 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$\mathbf{u}(x, y, t) \approx \mathbf{u}^h(x, y, t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j^h(t) N_j(x, y) \quad (9)$$

여기서, $N(x, y)$ 은 요소의 형상과 치수에 따라 결정되는 형상함수이다. 식 (9)를 지배방정식인 식 (7)~(8)에 대입하면 근사된 값이므로 다음과 같은 0이 아닌 잔차식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^h) \neq 0 \quad (10)$$

Galerkin법에 의한 가중잔차법을 이용하여 식 (10)의 내적을 취하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_i d\Omega = 0 \quad (11)$$

운동량방정식이 2차 편미분 방정식이므로 난류점성항을 Green 정리를 이용하여 weak form으로 바꾸고 각 요소별 절점에 관한 적분식의 형태로 나타내면 질량보존방정식과 x, y 방향 운동량방정식은 각각 다음 식 (12a)와 (12b) 및 (12c)로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} h_j^h N_j N_i d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} u_j^h N_i \left(\sum_{k=1}^n h_k^h N_k \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} v_j^h N_i \left(\sum_{k=1}^n h_k^h N_k \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} h_j^h \\ & \left[\int_{\Omega^e} N_i \left(\sum_{k=1}^n u_k^h N_k \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} N_i \left(\sum_{k=1}^n v_k^h N_k \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega \right] = 0 \quad (12a) \end{aligned}$$

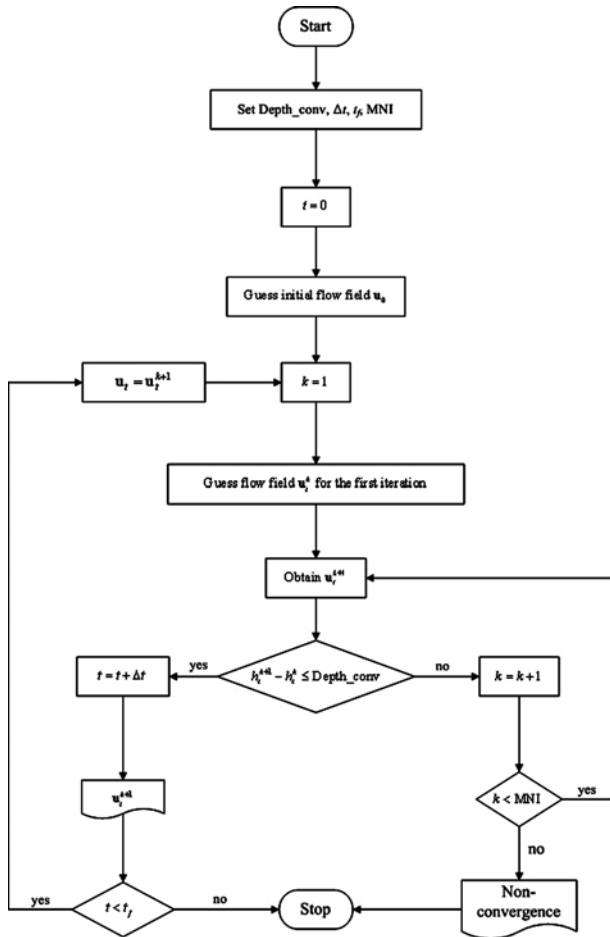


그림 3. 모형의 계산 흐름도

4. 모형의 검증

4.1 사행수로 유속장 모의

본 연구에서 개발한 수치모형을 그림 4와 같은 폭이 1 m, 중심각 150°, 사행도 1.52인 두 개의 만곡부를 가지는 직사각형 단면 사행수로에 적용하여 만곡부에서의 횡방향 유속 및 수심 분포를 분석하였으며, 서일원 등(2006)이 초당 50개의 유속 측정이 가능한 micro-ADV 장치를 이용하여 실측한 8개의 수리실험 케이스 중 4개의 케이스를 선정하여 모형의 검증을 실시하였다(표 1 참조).

수치모의에 필요한 격자망은 그림 5와 같이 518개의 격자점과 448개의 요소를 가지는 사각망으로 제작하였으며, 표 1에 제시된 바와 같이 30 l/s와 60 l/s의 유량을 상류단 경계조건으로 입력하고 각 유량에 대하여 두 개의 수심을 하류단 경계조건으로 입력하여 총 4개의 모의 조건을 구성하였다. 수심 수렴 정도(depth convergence criteria)가 0.1 mm 이하가 될 때를 정상상태로 간주하여 수치모의를 수행하였

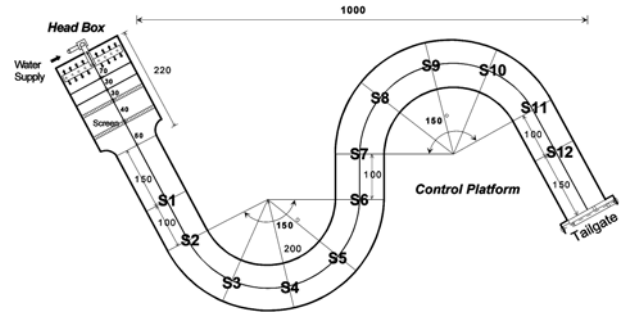


그림 4. 사행수로 모의결과 검증을 위한 수리실험장치 평면도 (서일원과 박성원, 2009)

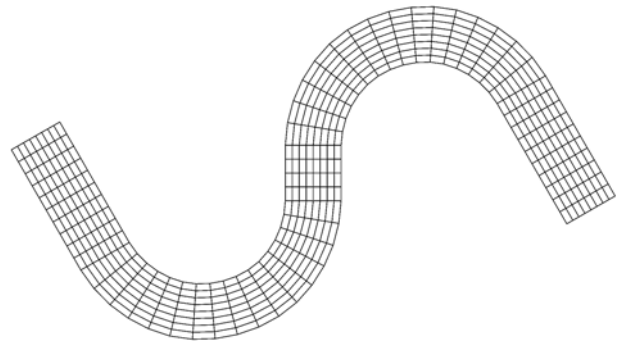


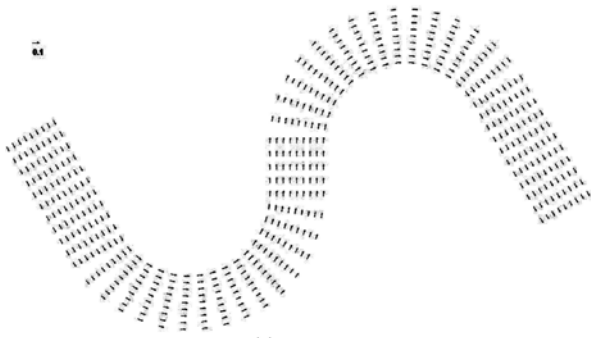
그림 5. 사행수로 격자망 구성

다. 조도계수의 경우 Chow(1973)에 제시된 페인트칠 된 매끄러운 철인 경우의 거칠기 정도인 0.013으로 하였다. 난류 점성계수의 경우 상온의 정류된 실험수로인 점을 감안하여 $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 로 입력하였다. 난류동점성계수의 값을 정하기 위해 10^{-1} - $10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ 범위의 값 중 32개를 적용해 본 결과 10^{-1} - $10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ 의 범위 값을 적용한 경우 만곡부에서의 유속이 적합하게 계산되지 않았으며 10^{-7} - $10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ 범위의 값을 적용한 경우에는 흐름의 분리 현상이 과도하게 발생하였다. 10^{-3} - $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 범위의 값을 적용한 경우 만곡부 내외측의 유속차를 정확히 계산하였으며 만곡부에서의 흐름양상은 직선부를 중심으로 대칭적이었다. 이 범위의 난류동점성계수 값을 적용한 경우 모의결과는 모두 거의 일치하였으므로 본 연구에서는 $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 의 난류동점성계수값을 적용하였다.

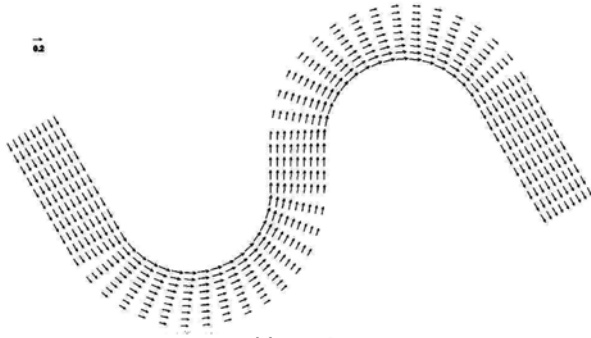
그림 6은 RUN1-2와 RUN2의 유속벡터도를 도시한 것이다. RUN1-2의 경우 유속이 느리며 만곡부 내측과 외측의 유속차가 크지 않았으나, RUN2-1과 RUN2-2의 경우 첫 번째와 두 번째 만곡부에서 내측의 유속이 외측에 비해 빠른 것을 확인할 수 있다. RUN2의 등유속도 및 등수심도를 그림 7과 8에 도시하였다. 만곡부 유입 이전에는 수로 폭 방향으로 균일한 유속이 발생하나 첫 번째 만곡부에 접근하면서 내측의 유속이 외측에 비해 40% 이상 빠르게 분포하며 첫 번째 만곡부가 종료된 이후의 직선구간인 S6~S7 사

표 1. 사행수로 모의조건

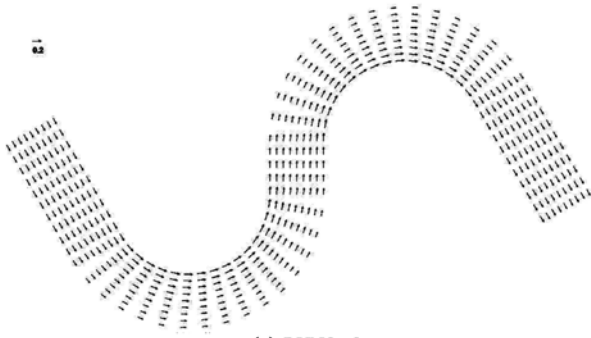
구분	상류단 경계조건 유량 (l/s)	하류단 경계조건 수심 (cm)	조도 계수	난류동 점성계수 (m^2/s)	비고
RUN1-1	30	15	0.013	$\nu_{xx} = \nu_{yy} = \nu_{yx} = \nu_{xy} = 10^{-3}$	요소수: 448 격자수: 513 정상상태
RUN1-2		40			
RUN2-1	60	30			
RUN2-2		40			



(a) RUN1-2

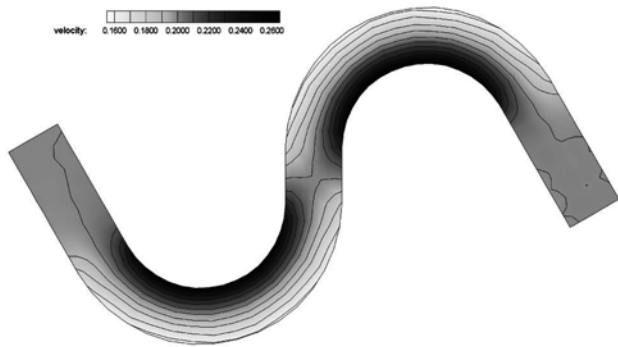


(b) RUN2-1

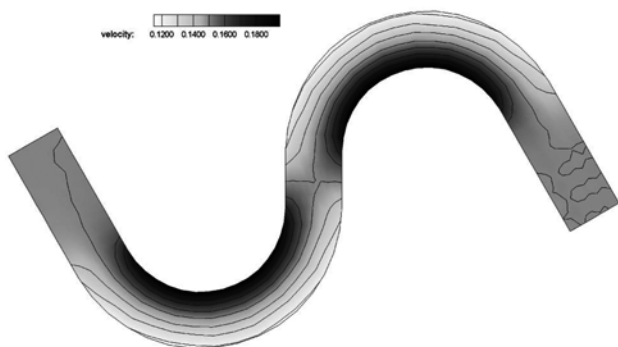


(c) RUN2-2

그림 6. 유속 벡터도

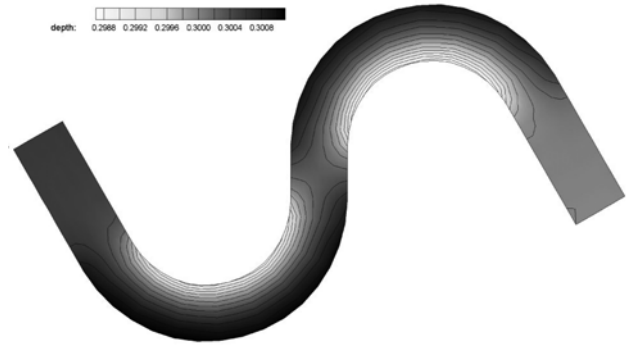


(a) RUN2-1

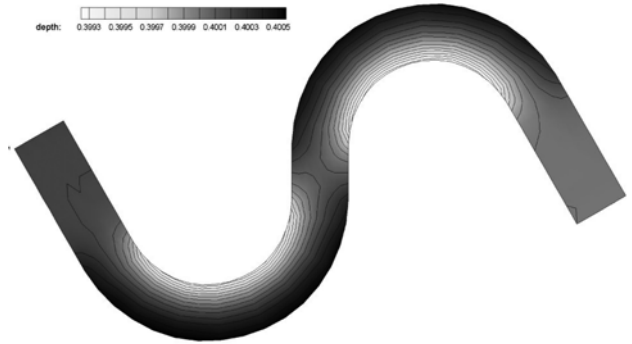


(b) RUN2-2

그림 7. RUN2 등유속도

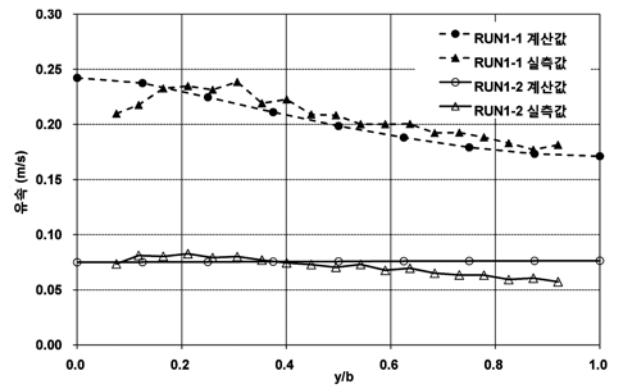


(a) RUN2-1

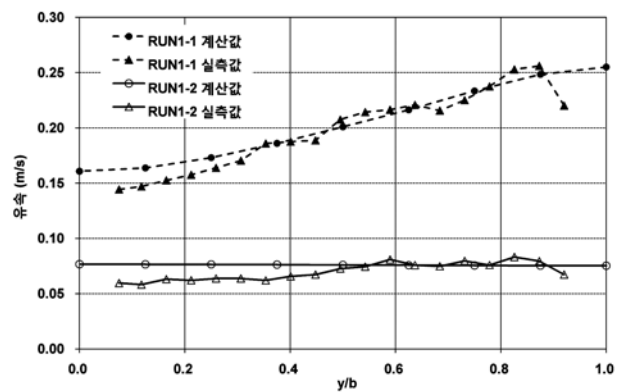


(b) RUN2-2

그림 8. RUN2 등수심도



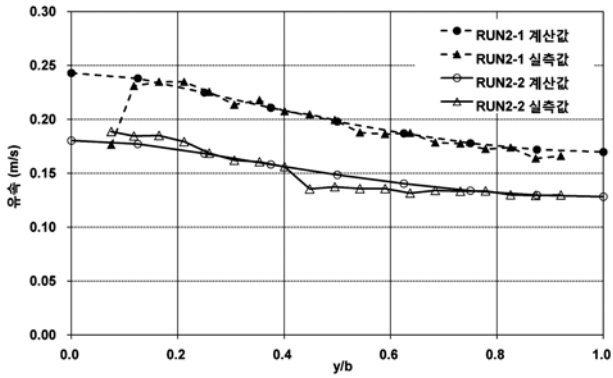
(a) S4



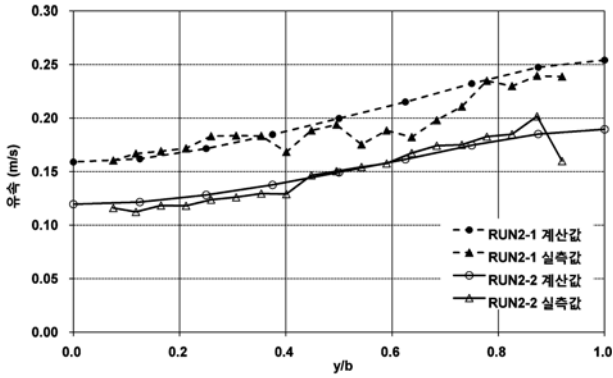
(b) S9

그림 9. 만곡부 정점에서 유속 비교(RUN1)

이에서 곡부적으로 균일한 유속이 나타났다. 이 후 두 번째 만곡부에서 다시 내측에 빠른 유속이 분포하고 만곡부 종료 이후 하류단까지 균일한 유속분포가 나타났다. 수로 전체에 걸친 유속분포는 두 만곡부의 중심을 기준으로 대칭적이었다. 이와 같은 유속구조에 의해 그림 8과 같이 두 만곡부에



(a) S4



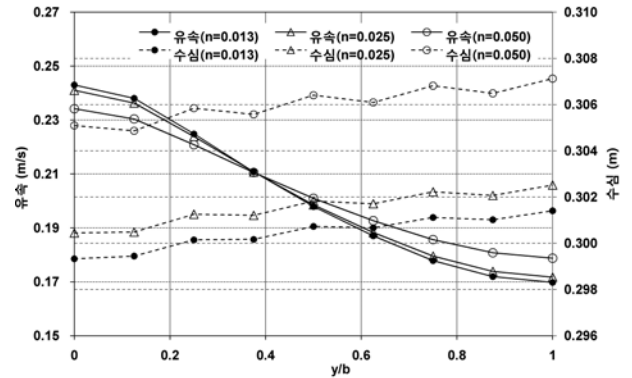
(b) S9

그림 10. 만곡부 정점에서 유속 비교(RUN2)

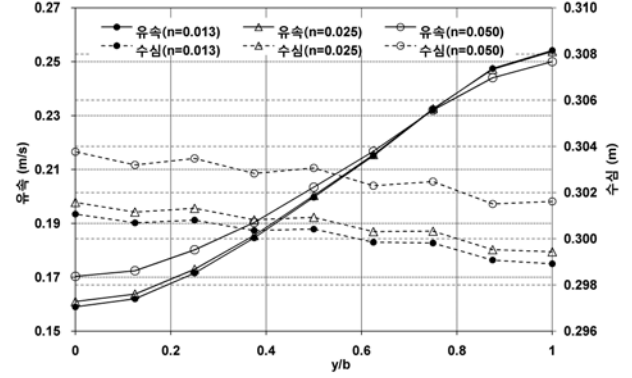
서 미약한 편수위 현상이 발생하였다.

첫 번째 만곡부(S4)와 두 번째 만곡부(S9)에서 수치모의된 횡방향 유속분포값을 실측자료와 비교하여 그림 9와 10에 도시하였다. 여기서 b 는 수로의 폭이며 y 는 수로의 좌안에서 우안으로 횡방향을 따라서 정의된 좌표계이다. 이 그림에서 RUN1-1의 경우, 만곡부의 내측이 외측에 비해 모두 큰 유속을 가짐을 알 수 있고, 본 연구에서 개발한 모형에 의한 계산값과 수리실험에 의한 실측값이 매우 잘 일치함을 확인할 수 있다. 또한 첫 번째 만곡부인 S4에 비해 두 번째 만곡부인 S9에서 유속차가 더 크게 발생하였다. 하지만 RUN1-2의 경우 유속이 느려서 내외측 유속차가 거의 발생하지 않았다. 그림 10에서 볼 수 있듯이, RUN2-1과 RUN2-2의 경우에도 만곡부 내측과 외측의 유속차가 많이 발생하고 있으며, 제안된 수치모형은 이러한 유속분포를 잘 재현하는 것으로 밝혀졌다.

이상의 과정으로 모형의 검증이 완료되었다고 간주하고 계산값과 실측값이 잘 일치하는 RUN2-1의 유량 및 수심조건을 택하여 조도계수에 따른 민감도 분석을 수행하여 그림 11에 수록하였다. 조도계수가 0.013보다 작은 경우 유속 및 수심 결과가 $n=0.013$ 인 경우와 일치하여서 이보다 큰 값인 $n=0.025$ 와 $n=0.050$ 의 경우를 선정하였다. 두 만곡부 정점



(a) S4



(b) S9

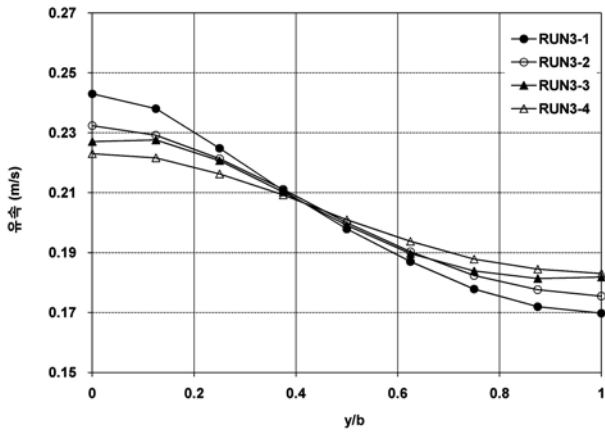
그림 11. 조도계수에 따른 유속 및 수심

서 조도계수가 $n=0.013$ 인 경우와 $n=0.025$ 인 경우의 유속 분포는 거의 일치하였으며 $n=0.025$ 인 경우가 미약하게 만곡부 내외측 유속차가 작게 나타났다. 수심은 $n=0.025$ 의 경우가 $n=0.013$ 인 경우에 비해 약 0.5~1 mm 정도 높게 나타났다. 하지만 $n=0.050$ 인 경우 만곡부 내측의 유속은 0.01 m/s 작고 외측은 0.01 m/s 크게 나타나 만곡부 내외측의 유속차가 $n=0.013$ 및 $n=0.025$ 의 경우에 비해 작게 나타났다. 만곡부에서의 편심 영향으로 S4지점에서는 $y/b=0.375$ 위치에서, S9 지점에서는 $y/b=0.75$ 위치에서 3가지 조도계수에 대하여 유속이 일치하였다.

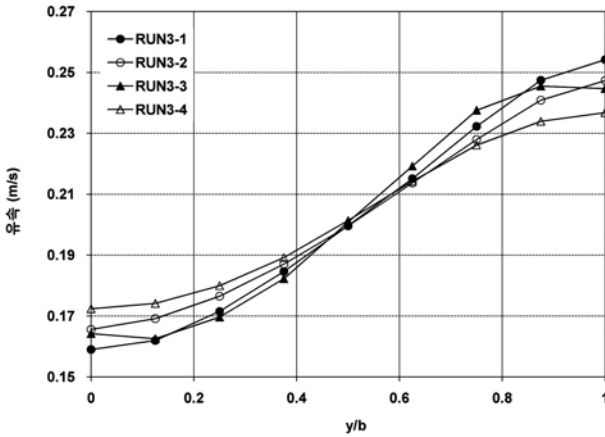
텐서형 난류동점성계수의 변화에 따른 만곡부 정점에서의 유속분포를 비교하기 위해 표 2와 같은 모의조건을 설정하였다. 난류계수가 $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 보다 작은 경우 횡방향 유속 분포가 $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 인 경우와 거의 일치하므로 이보다 작은 경우는 고려하지 않았다. RUN3-1은 RUN2-1과 동일한 경계 조건과 조도계수를 적용하였으며 xx , xy 및 yy 방향으로 이보다 5배 큰 난류점성계수를 입력하여 표 2와 같은 4가지 경우를 고려하였으며 모의 결과를 그림 12에 도시하였다. RUN3-4는 RUN3-1에 비해 모든 방향으로 5배 큰 난류점성계수를 가지므로 그림 12(a)와 같이 만곡부 내측과 외측의 유속차가 RUN3-1보다 10% 정도 작았다. xx 와 yy 방향으로

표 2. 텐서형 난류동점성계수의 민감도 분석을 위한 모의조건

구분	상류단 경계조건 유량 (l/s)	하류단 경계조건 수심 (cm)	조도계수	난류동점성계수 (m^2/s)			비고
				V_{xx}	V_{xy}	V_{yy}	
RUN3-1	60	30	0.013	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	요소수: 448 격자수: 513 정상상태
RUN3-2				10^{-3}	5×10^{-3}	10^{-3}	
RUN3-3				5×10^{-3}	10^{-3}	5×10^{-3}	
RUN3-4				5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	



(a) S4



(b) S9

그림 12. 텐서형 난류동점성계수에 따른 만곡부 정점에서 유속 비교

가중된 난류점성계수를 가지는 RUN3-3이 xy방향으로 가중된 난류점성계수를 가지는 RUN3-2에 비해 내외측 유속차가 약간 작게 나타났으며, 유속분포는 $y/b=0.5$ 인 지점을 기준으로 대칭적이었다. 두 번째 만곡부에서도 그림 12(b)와 같이 동일한 결과를 얻었다.

4.2 점변화류 수면형상 모의

다양한 하상경사에 따른 점변화류의 수면곡선을 모의하기 위하여 표 3과 같은 수치모의 조건을 설정하였다. 수로의

폭은 10 m로 하였으며, 80개의 직사각형 요소망과 105개의 노드를 갖는 격자망을 구성하였다. BCW2의 경우에는 수로의 길이가 400 m 이므로 200개의 요소와 255개의 노드를 갖는 격자망을 별도로 제작하였다. 표 3에 제시된 유량과 수심을 경계조건으로 입력하여 수심 수렴 정도(depth convergence criteria)가 0.1 mm 이하가 될 때를 정상상태로 간주하여 수치모의를 실시하였다. 이와 같은 모의조건을 가지는 경우 수심은 횡방향으로는 일정하고 종방향으로만 변하기 때문에 1차원적 흐름특성을 나타낸다.

그림 13은 완경사, 급경사, 역경사, 급격한 하상변화가 있는 수로, 위어를 포함한 수로 등에서 표 3의 값을 입력하여 모의된 수면형상이다. 완경사 수로 모의 결과를 나타낸 그림 13(a)를 살펴보면 M1 곡선은 상류방향을 따라서 수평 접근선에 접근하였으며 M2 곡선은 정상수심에 근접하는 경향을 잘 나타내었다. M3 곡선의 경우 상류에 수심경계조건을 부여하고 하류에 유량경계조건을 부여하여 상류 방향으로 갈수록 수심이 높아지는 수면형상이 나타났다. 급경사 수로 모의의 경우 상류방향을 따라서 S1 곡선은 수평접근선에 접근하고 S2 곡선은 정상수심에서 한계수심으로 접근하며 S3 곡선은 수심이 감소하는 경향을 잘 재현하였다. 하류로 갈수록 하상고가 증가하는 역경사 수로의 경우 A1 곡선은 상류방향을 따라서 수평선에 접근하였다. 하지만 A2 곡선의 경우에는 사류의 발생으로 인하여 상류로 갈수록 수심이 감소하는 경향을 잘 재현하지 못하여 상류단에 수심 경계조건, 하류단에 유량 경계조건을 입력하여 재모의한 결과 그림 13(c)와 같이 올바른 수면형상곡선을 얻을 수 있었다. 하상고가 50 m 이후 지점에서 갑자기 0.2 m 증가하는 ABC1의 경우와 0.2 m 감소하는 ABC2의 경우 하상고가 증가하는 부분에서 수위가 감소하고 하상고가 감소하는 부분에서 수위가 증가하여 정상수심에 접근하는 경향을 잘 나타내었다. 수로 중간부에 높이가 0.2 m 인 광정위어가 존재하는 BCW1의 경우 위어 상부의 수위가 약간 낮아지다가 위어 통과 이후 정상수심으로 접근해가는 경향을 잘 나타내었다. BCW1에 비해 광정위어의 높이를 5배 높인 BCW2의 경우 위어 상류구간에서 M1곡선이 나타났고 위어를 지나면서 수위가 하강한 후 도수가 발생하고 다시 정상수심으로 근접해가는 결과를 얻을 수 있었다. 위어를 통과한 이후에 약간의 수치진동이

표 3. 점변화류 모의 조건 (단위: m)

구분	곡선	수심	유량(m^3/s)	수로길이	수로경사도	한계수심	정상수심	조도계수	Δz
완경사	M1	2.5	30	100	0.001	0.97	1.65	0.02	
	M2	1.2							
	M3	0.7							
급경사	S1	2.0	20	100	0.01	0.742	0.604	0.02	
	S2	0.65							
	S3	0.55							
역경사	A1	1.2	30	100	-0.01	0.97		0.02	
	A2	0.7							
급격한 하상변화	ABC1	1.65	30	100	0.001	0.97	1.65	0.02	0.2
	ABC2			100	0.001	0.97	1.65		-0.2
위어	BCW1	1.65	30	100	0.001	0.97	1.65	0.02	0.2
	BCW2	2.32	20	400	0.001	0.742	2.32	0.05	1.0

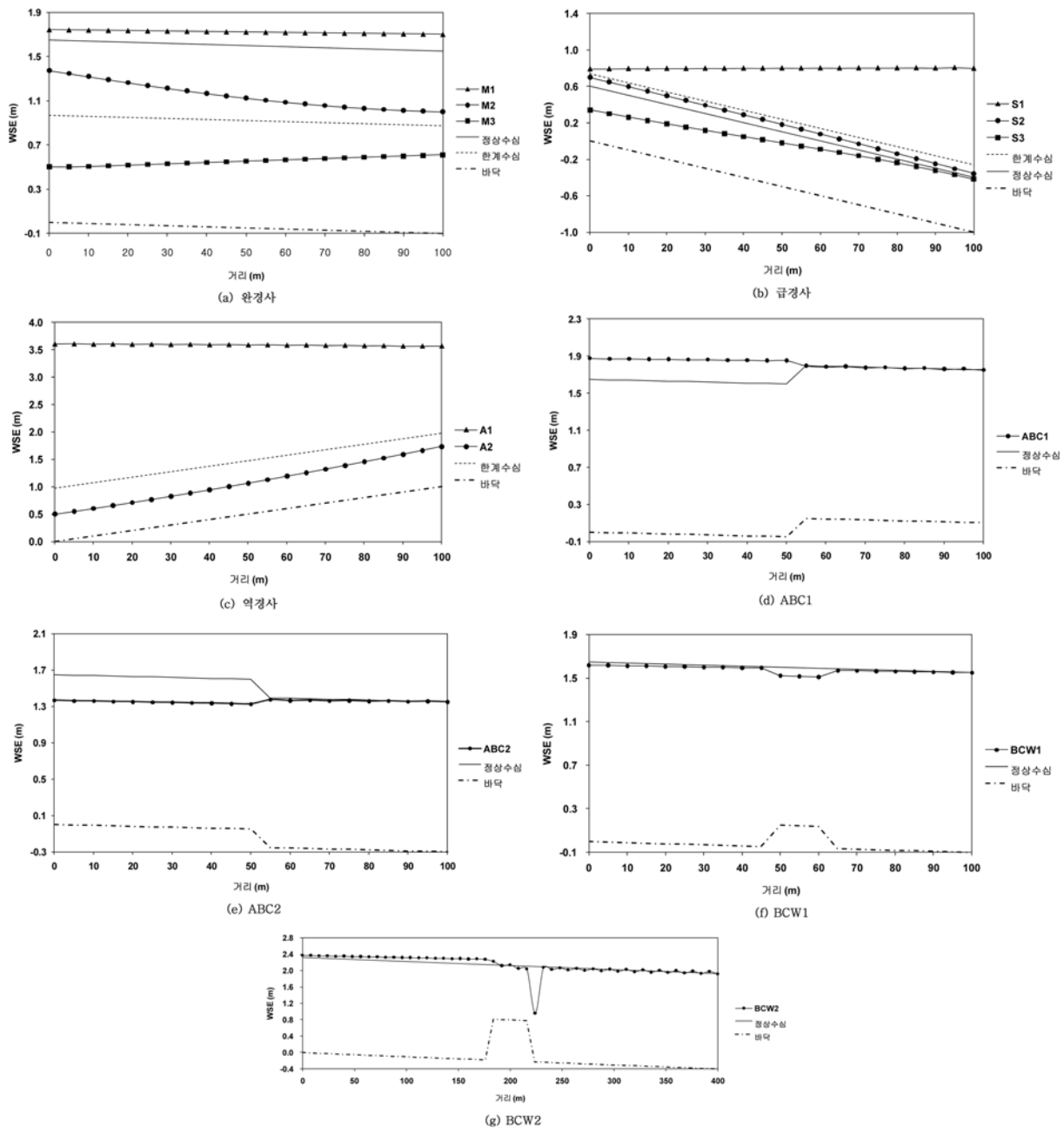


그림 13. 수면형상 모의 결과

발생하였는데 이는 도수에 의해 수리학적 불안정한 파가 하류방향으로 전달되어 생기는 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 천수흐름 해석을 위한 2차원 유한요소모형을 개발하였다. 텐서형태의 외점성계수를 포함한 운동량방정식과 질량보존방정식으로 구성된 천수방정식을 수치 모형화하기 위해서 Galerkin법을 적용하였으며 Newton-Raphson법에 의해 반복적으로 해를 구하는 방법을 취했다. 수치적분은 Gauss 구적법을 이용하였으며 지형에 따라 삼각망과 사각망을 혼용하여 사용할 수 있도록 하였다. 대수방정식의 해는 프론탈 기법을 적용하여 구하였다.

개발된 수치모형을 검증하기 위하여 폭이 1 m, 중심각 150°, 사행도 1.52인 두 개의 만곡부를 가지는 직사각형 단면 사행수로에 적용하여 만곡부에서의 횡방향 유속 및 수심

분포를 분석하고 수리실험 결과와 비교하였다. 만곡부 유입 이전에는 수로 폭 방향으로 균일한 유속이 발생하나 첫 번째 만곡부에 접근하면서 내측의 유속이 외측에 비해 40% 이상 빠르게 분포하였으며 첫 번째 만곡부가 종료된 이후의 직선구간인 S6~S7에서 다시 균일한 유속이 나타났다. 이후 두 번째 만곡부에서 다시 내측에 빠른 유속이 분포하고 만곡부 종료 이후 하류단까지 균일한 유속분포가 나타났다. 수로 전체에 걸친 유속분포는 두 만곡부의 중심을 기준으로 대칭적이었으며 만곡부에서 미약한 편수위 현상이 발생하였다. 첫 번째 만곡부(S4)와 두 번째 만곡부(S9)에서 수치모의된 횡방향 유속분포 결과를 실측자료와 비교한 결과 두 값이 매우 잘 일치하였다. 조도계수에 의한 민감도를 분석한 결과 조도계수가 커질수록 유속이 감소하여 내외측 유속차가 줄어들었으며 이에 따라 수심도 커짐을 확인할 수 있었다.

완경사, 급경사, 역경사, 급격한 하상변화가 있는 수로와 위어를 포함한 수로에서 12개의 점변화류 수면곡선을 모의

한 결과 M1, S1 및 A1 곡선은 상류방향을 따라서 수평접 근선에 접근하였고 M3, S3 및 A2 곡선은 수심이 감소하는 경향을 잘 재현하였다. M2 곡선과 S2 곡선은 각각 정상수 심과 한계수심에 근접하는 수면형상곡선을 얻었다. M3 및 A2 수면곡선의 경우 사류의 발행으로 인하여 상류단에 수심 조건, 하류단에 유량조건을 입력하여야 올바른 형상을 얻을 수 있었다. 급격히 하상고가 감소하거나 증가하는 수로에서 도 수위가 증가하거나 감소하다가 정상수심에 근접해가는 경 향을 잘 나타내었다. 위어의 높이가 0.2 m인 경우 위어 상 부의 수위가 약간 낮아지다가 위어를 통과한 이후 정상수심 에 접근해 가는 경향을 잘 나타내었다. 위어의 높이가 1.0 m인 경우 위어 상류 구간에서 M1곡선이 나타나고 위어를 지나면서 수위 하강이 나타난 후 도수가 발생고 다시 정상 수심으로 근접해가는 결과를 얻을 수 있었다. 위어를 통과한 이후에 약간의 수치진동이 발생하였는데 이는 도수에 의해 수리학적으로 불안정한 파가 하류방향으로 전달되어 발생하 는 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 서울대학교 SIR BK21(안전하고 지속가능한 사 회기반건설) 사업단과 21세기 프론티어연구 개발사업인 수자 원의 지속적 확보기술개발사업단(과제번호: 2-3-3) 및 국토해 양부가 출연하고 한국건설교통 기술평가원에서 위탁사행한 건설기술혁신사업(08기술혁신F01)에 의한 차세대홍수방어기 술개발 연구단의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다. 본 연 구는 서울대학교 공학연구소의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

김승용(2002) 조위영향에 따른 신곡수중보 상하류의 유동특성 분 석. 석사학위논문, 경기대학교.
 김창완, 우효섭, 김규호, 유권규, 김 원(1995) 이차원 하천 모형 의 개발 (I). 연구보고서, 95-WR-1103-1, 한국건설기술연구원.
 김태범, 최성욱, 민경덕(2006) CDG 유한요소법을 이용한 수심적 분 흐름의 수치모의, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제26 권 제5B호, pp. 447-457.
 서일원, 박성원(2009) 사행수로에서 유속구조가 추적물질의 혼합 에 미치는 영향, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제29권 제1B호, pp. 35-45.
 서일원, 송창근, 이명은(2008) 한강 감조구간에서의 흐름 및 혼 합거동, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제28권 제6B호, pp. 731-741.
 서일원, 이규환, 백경오(2006) 사행수로의 흐름구조 및 난류특성, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제26권 제5B호, pp. 469-479.
 오정선, 서일원, 김영한(2004) 사행하천에서 오염물질의 2차원 거 동특성 해석, **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제37권 제12호, pp. 979-992.
 윤용남, 박무중(1994) FESWMS-2DH에 의한 한강 하류부의 수 리특성 분석, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제14권 제 4B호, pp. 847-857.
 윤태훈(1982) 유한요소법에 의한 항만에서의 토사이동 추정모형, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제2권 제2호, pp. 19-28.
 이갑덕, 한건연, 신응배, 김정욱(1981) 수치모델에 의한 울산만내 에의 수질오염도 예측, **대한토목학회 학술발표회논문집**, 대한 토목학회, pp. 22-24.

이길성, 강주환(1989) 천수방정식의 유한차분특성, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제9권 제1호, pp. 41-52.
 이진희, 김경탁, 심명필(1996) 개수로에서의 이차원 부정류 해석 을 위한 유한체적법, **한국수자원학회 논문집**, 한국수자원학회, 제29권 제5호, pp. 173-184.
 최병호(1983) 경기만 남부해역의 M2 조석 영향, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제3권 제2호, pp. 97-107.
 한건연, 백창현, 박경옥(2003) SU/PG 기법에 의한 하천 흐름의 유한요소해석 : I. 이론 및 수치안정성 해석, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제24권 제3B호, pp. 183-192.
 Axelsson, O. and Barker, V.A. (1984) *Finite element solution of boundary value problems*. Academic Press, USA.
 Chow, V.T. (1973) *Open channel hydraulics*. McGraw Hill.
 Chung, T.J. (1992) *Finite elements in fluids*. Hemisphere Publish- ing Corporation, USA.
 Cullen, M.P. (1976) On the use of artificial smoothing in Galerkin and finite difference solutions of the primitive equations. *Quar- terly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 102, pp. 77-93.
 Daily, J.W. and Harleman, D.R.F. (1966) *Fluid dynamics*. Addison- Wesley Publishing Company.
 Davies, A.J. (1980) *The Finite element method*. Oxford University Press, New York.
 Du Pont, T. (1973) Galerkin methods for first-order hyperbolic. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 10, pp. 890-899.
 Engelman, M., Sani, R.L., and Gresho, P.M. (1982) The Implemen- tation of normal and/or tangential boundary conditions in finite element codes for incompressible fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 2, pp. 225-238.
 Ghanem, A.H.M. (1995) *Two dimensional finite element modeling of flow in aquatic habitats*. Ph.D. Dissertation, University of Alberta, Edmonton, Alberta.
 Gresho, P.M. and Sani, R.L. (1998) *Incompressible flow and the finite element method*. John Wiley & Sons, UK.
 Fletcher, C.A. (1984) *Computational Galerkin method*, Springer- Verlag, NY.
 Heinrich, J.C. and Pepper, D.W. (1999) *Intermediate finite element method*. Taylor & Francis, USA.
 Huebner, K.H., Thornton, E.A., and Byrom, T.G. (1995) *The Finite element method for engineers*. John Wiley & Sons, USA.
 Irons, B.M. (1970) A Frontal solution program for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engi- neering*, Vol. 2, pp. 5-32.
 Karniadakis, G.E. and Sherwin, S. (2005) *Spectral/hp element meth- ods for computational fluid dynamics*. Oxford University Press, USA.
 Kowalik, Z. and Murty, T.S. (1993) *Numerical modeling of ocean dynamics*. World Scientific, Singapore.
 Navon, I.M. (1977) *A survey of finite-element methods in quasi-lin- ear fluid flow problems*. WISK Report 140, National Research Institute for Mathematical Sciences. Pretoria, South Africa.
 Oden, J.T. and Carey, F. (1982) *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*. Finite element series. Vol. 4, Prentice-Hall.
 Pepper, D.W. and Heinrich, J.C. (1992) *The finite element method*. Hemisphere Publishing Corporation.
 Pinder, G.F. and Gray, W.G. (1977) *Finite element simulation in sur- face and subsurface hydrology*. Academic Press, London.
 Praagman, N. (1982) A comparison of discretization methods for the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 981-995.
 Smith, I.M. (1982) *Programming the finite element method*. John Wiley & Sons, UK
 Staniforth, A.N. (1987) Review: Formulating efficient finite-ele- ment codes for flows in regular domains, *International Jour- nal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 7, pp. 1-16.

- Strang, G. and Fix, G.J. (1973) *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, USA.
- Taylor, C. and Huyakorn, P.S. (1978) A comparison of finite element based solution schemes for depicting overland flow. *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 2, pp. 185-190.
- Thomee, V. (1984) *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. Springer-Verlag, Berlin.
- Thomee, V. and Wendroff, B. (1974) Convergence estimates for Galerkin methods for variable coefficient initial value problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 11, pp. 1059-1068.
- Vreugdenhil, C.B. (1994) *Numerical methods for shallow-water flow*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Wait, R. and Mitchell, A.R. (1985) *Finite element analysis and application*. John Wiley & Sons, UK.
- Walters, R.A. and Carey, G.F. (1983) Analysis of spurious oscillation modes for the shallow water and Navier-Stokes equations. *Computer and Fluids*, Vol. 11, pp. 51-68.
- Weare, T.J. (1976) Finite-element or finite-difference methods for the two dimensional shallow-water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 7, pp. 351-357.
- Weiyang, T. (1992) *Shallow water hydrodynamics*. Elsevier, Amsterdam.

(접수일: 2009.12.1/심사일: 2010.1.3/심사완료일: 2010.1.3)