한 국 통 계 학 회 논 문 집
2010, 17권, 6호, 865–877
DOI: 10.5351/CKSS.2010.17.6.865

최소수리보증 이후의 예방보전모형

정기문[1,a]

[a]경성대학교 정보통계학과

요 약

본 논문에서는 보증기간이 종료된 이후의 수리가 가능한 시스템에 대한 주기적인 예방보전모형을 고려하는데, 무료수리보증, 비례수리보증 그리고 혼합수리보증과 같은 세 종류의 수리보증정책을 고려한다. 이러한 세 종류의 수리보증기간이 종료된 이후의 수리가 가능한 시스템에 대한 주기적인 예방보전모형에 대하여 각각 기대순환길이, 총기대비용 그리고 단위시간당 기대비용을 유도한다. 또한 유도된 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 예방보전정책인 최적의 예방보전주기와 예방보전횟수를 결정하는 방법에 대하여 설명한다. 끝으로 고장시간이 와이블분포를 하는 경우에 최적의 주기적 예방보전정책을 결정하여 본다.

주요용어: 단위시간당 기대비용, 무료수리보증, 비례수리보증, 예방보전정책, 혼합수리보증.

1. 서론

일반적으로 수리가 가능한 시스템에는 다양한 형태의 보증정책(warranty policy)이 주어지기 때문에, 보증기간이 제공되는 시스템에 대한 사용자 측면의 교체정책(replacement policy) 또는 예방보전정책(preventive maintenance policy)과 관련된 연구가 최근까지 활발하게 진행되고 있다.

Blischke와 Murthy (1994, 1996)는 다양한 형태의 보증정책에 대하여 자세히 설명하였으며, Sahin과 Polatoglu (1996)는 보증기간에서 시스템에 고장이 발생되었을 경우에 시스템을 새 것으로 교체해 주고 보증기간도 재생되는 재생보증(renewing warranty)과 교체는 해 주지만 보증기간은 재생되지 않는 비재생보증(non-renewing warranty)이 각각 제공되는 수리가 가능한 시스템에 대하여 사용자 측면의 교체정책에 대하여 살펴보았다. 그리고 Jung과 Park (2003)은 Sahin과 Polatoglu (1996)가 제안한 보증기간이 종료된 이후의 교체정책을 예방보전정책으로 확장하였다. 또한, Chien (2008)은 재생무료교체보증(renewing free replacement warranty)이 주어진 시스템에 대하여 일반적인 기령교체모형을 고려하였으며, Jung 등 (2008)은 비용과 비가동시간을 동시에 고려한 비재생보증이 종료된 이후의 교체정책에 대하여 살펴보았다. 그리고 Yeh 등 (2007)은 가장 일반적인 보증정책 중의 하나인 무료수리보증(free repair warranty)이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 교체정책에 대하여 살펴보았다. 즉, 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 최소수리(minimal repair)가 이루어지며, 보증기간은 재생되지 않는 무료수리보증에 대하여 살펴보았다. 그리고 Jung (2009)은 무료수리보증 뿐만이 아니라 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 사용자는 최소수리비용에 비례하여 일정비용을 지불하고 시스템에 최소수리가 수행되는 비례수리보증(pro-rata repair warranty)과 무료수리보증과 비례수리보증의 혼합된 형태인 혼합수리보증(combination repair warranty)이 종료된 이후의 교체정책에 대하여 살펴보았다. 그러나 시스템의 사용자는 시스템의 고장률을 일정수준으로 감소시키기 위하여 일반적으로 예

이 논문은 2008년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2008-331-C00069).
[1] (608-736) 부산광역시 남구 대연 3동 314-79, 경성대학교 정보통계학과, 부교수. E-mail: kmjung@ks.ac.k

방보전활동을 수행하게 되므로 Yeh 등 (2007)과 Jung (2009)의 교체정책을 예방보전정책으로 확장할 필요가 있다.

따라서 본 논문에서는 무료수리보증, 비례수리보증 또는 혼합수리보증이 종료된 이후의 예방보전 모형에 대하여 각각 살펴보고자 한다. 즉, 수리가 가능한 시스템에는 무료수리보증, 비례수리보증 또는 혼합수리보증이 주어지며, 보증기간이 종료된 이후에 시스템에 고장이 발생하면 최소수리가 이루어진다. 그리고 보전기간 동안에는 x 시점마다 주기적으로 예방보전활동이 이루어지며, N번째 예방보전주기에서는 사용자에 의해서 새로운 시스템으로 교체된다. 이러한 예방보전모형에 대하여 총기대비용(total expected cost), 기대순환길이(expected cycle length) 그리고 단위시간당 기대비용(expected cost rate per unit time)을 구하고, 최적의 예방보전정책(optimal PM policy)에 대하여 설명하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 무료수리보증이 종료된 이후의 사용자 측면의 예방보전모형을 설명하고, 이러한 모형에 대한 단위시간당 기대비용을 구하고자 한다. 그리고 구해진 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 예방보전정책에 대하여 살펴보고자 한다. 3절에서는 비례수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형을 고려하고, 4절에서는 혼합수리보증이 종료된 이후의 사용자 측면의 예방보전모형에 대하여 설명하고자 한다. 끝으로 5절에서는 앞에서 고려된 세 종류의 예방보전정책을 자세히 설명하기 위하여 수치적 예를 보이고자 한다.

2. 무료수리보증 이후의 예방보전정책

이 절에서는 무료수리보증이 종료된 이후의 사용자 측면의 예방보전모형을 고려하고자 한다. 즉, 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 무료로 최소수리가 수행되고, 보증기간은 재생되지 않는 무료수리보증이 종료된 이후에 주기적으로 예방보전활동이 수행되는 예방보전모형을 다루고자 한다. 이를 위해서 다음과 같은 사항을 가정한다.

가정 (A)

i) 시스템에는 무료수리보증기간 w_F가 주어진다.

ii) 예방보전(preventive maintenance; PM)은 kx_F, $k = 1, 2, \ldots, N_F$에서 주기적으로 이루어지며, x_F는 PM의 주기고, N_F은 PM의 횟수이다. 그리고 N_F 번째 PM주기에서는 시스템이 새 것으로 교체된다.

iii) $h(t)$는 PM이 이루어지지 않을 때의 고장률함수로써 순증가함수이다.

iv) k번째 PM이 이루어진 이후의 시스템의 고장률함수는 다음과 같이 Canfield (1986)가 제안한 PM 하에서의 고장률함수를 갖는다.

$$h_k(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \le t \le x_F, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\{h(ix_F - (i-1)\eta) - h(i(x_F - \eta))\} + h(t - k\eta), & kx_F \le t \le (k+1)x_F, \end{cases}$$

여기서, η는 예방보전의 수준을 표현하는 인자이다.

v) 연속되는 예방보전 주기 사이에서 고장이 발생되면 최소수리를 수행한다.

vi) PM과 최소수리, 그리고 교체를 위한 시간은 고려하지 않는다.

vii) 보전기간에서의 최소수리비용은 c_m, 보증기간 또는 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용은 c_d, 예방보전비용은 c_p이고 교체비용은 c_r이다.

위와 같은 가정을 통해서 무료수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형을 고려할 수 있다. 즉, 시스템에는 무료보증기간 w_F가 주어지고, 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 무료로 최소수리가 수행되며, 보증기간은 재생되지 않는다. 또한 보증기간이 종료된 이후에는 시스템에 고장이 발생하면 사용자에 의해서 최소수리가 수행되고, x_F마다 주기적으로 예방보전활동이 수행되며, N_F번째 PM주기에서는 시스템이 새 것으로 교체되는 모형을 고려하고자 한다. 이러한 주기적인 예방보전모형에 대한 최적의 보전정책을 설정하기 위해서는 단위시간당 기대비용을 결정하여야 한다. 그리고 단위시간당 기대비용을 구하기 위해서는 총기대비용과 기대순환길이를 구해야 한다. 우선, 무료수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 총기대비용 $\mathrm{TEC_{FMW}}(x_F, N_F)$은 무료수리보증기간 동안에 발생되는 기대비용 $E(W_F)$와 보전기간 동안에 발생되는 기대비용 $E(M_F)$으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{TEC_{FMW}}(x_F, N_F) &= E(W_F) + E(M_F)\\ &= c_d \int_0^{w_F} h(t)dt + (c_d + c_m)\left[\sum_{k=1}^{N_F-1}\sum_{i=1}^{k}\{h(ix_F - (i-1)\eta + w_F)\right.\\ &\quad \left. - h(i(x_F-\eta)+w_F)\}x_F + \sum_{k=0}^{N_F-1}\int_{kx_F+w_F}^{(k+1)x_F+w_F} h(t-k\eta)dt\right] + (N_F-1)c_p + c_r, \qquad (2.1)\end{aligned}$$

여기서, c_d는 보증기간 또는 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용이고, c_m은 보전기간에서의 최소수리비용, c_p는 예방보전비용 그리고 c_r은 보전기간이 종료되는 시점에서 새로운 시스템으로 교체하기 위한 교체비용이다. 또한 무료수리보증에서는 보증기간 동안에 보증기간이 재생되지 않고 최소수리가 수행되기 때문에 시스템의 기대순환길이는 다음과 같이 구해진다.

$$\mathrm{ECL_{FMW}}(x_F, N_F) = w_F + N_F x_F. \qquad (2.2)$$

따라서 식 (2.1)의 총기대비용과 식 (2.2)의 기대순환길이로부터 무료수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 사용자 측면의 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{FMW}}(x_F, N_F) = \frac{1}{w_F + N_F x_F}&\left[c_d \int_0^{w_F} h(t)dt + (c_d + c_m)\left[\sum_{k=1}^{N_F-1}\sum_{i=1}^{k}\{h(ix_F - (i-1)\eta + w_F)\right.\right.\\ &\left.\left. -h(i(x_F-\eta)+w_F)\}x_F + \sum_{k=0}^{N_F-1}\int_{kx_F+w_F}^{(k+1)x_F+w_F} h(t-k\eta)dt\right] + (N_F-1)c_p + c_r\right]. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

이제, 무료수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 사용자 측면의 단위시간당 기대비용인 식 (2.3)을 최소화하는 최적의 예방보전 주기와 횟수를 결정하는 문제를 다루고자 한다. 우선, 최적의 예방보전 주기 x_F^*를 찾기 위해서 식 (2.3)을 x_F에 관해서 1차 미분한 다음 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$w_F(a_1 + x_F a_2 + a_3) + N_F\left(x_F^2 a_2 + x_F a_3 - a_4\right) = N_F \frac{c_1}{c_d + c_m}. \qquad (2.4)$$

식 (2.4)에서 c_1, a_1, a_2, a_3, a_4는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}c_1 &= c_d \int_0^{w_F} h(t)dt + (N_F-1)c_p + c_r,\\ a_1 &= \sum_{k=1}^{N_F-1}\sum_{i=1}^{k}\{h((i-1)(x_F-\eta) + (x_F + w_F)) - h(i(x_F-\eta)+w_F)\},\end{aligned}$$

$$a_2 = \sum_{k=1}^{N_F-1} \sum_{i=1}^{k} \{h'((i-1)(x_F-\eta)+(x_F+w_F))i - h'(i(x_F-\eta)+w_F)i\},$$
$$a_3 = \sum_{k=0}^{N_F-1} \{(k+1)h((k+1)x_F+w_F-k\eta) - kh(k(x_F+w_F)-k\eta)\},$$
$$a_4 = \sum_{k=0}^{N_F-1} \int_{kx_F+w_F}^{(k+1)x_F+w_F} h(t-k\eta)dt.$$

만약, 시스템의 고장률함수 $h(t)$가 볼록(convex)인 순증가(strictly increasing) 함수이고 N_F의 값이 주어지면, 식 (2.4)를 만족하는 최적의 주기 x_F^*의 값이 항상 유일하게 존재한다. 그러나 이와 같이 구해지는 x_F^*는 N_F의 값에 의존하게 되므로 식 (2.4)를 만족하는 최적의 주기 x_F^*와 최적의 예방보전 횟수 N_F^*를 동시에 찾아야만 한다. 이를 위해서 식 (2.4)를 만족하는 x_F가 N_F의 함수가 되기 때문에 이를 x_{F,N_F}이라고 하고, 이 값을 식 (2.3)의 x_F대신에 대입하면, $C_{\text{FMW}}(x_{F,N_F}, N_F)$은 N_F만의 함수가 되므로 최적의 횟수 N_F^*는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N_F^* = \min_{N_F} C_{\text{FMW}}(x_{F,N_F}, N_F), \quad N_F = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.5}$$

따라서 식 (2.3)의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 횟수는 식 (2.5)에서 구해진 N_F^*이고, 이 때 최적의 주기 x_F^*는 x_{F,N_F^*}가 된다. 결국, 무료수리보증이 종료된 이후에 x_F^*시점마다 주기적으로 예방보전 활동을 수행하고, N_F^*번째 예방보전주기에서는 사용자에 의해서 새로운 시스템으로 교체하는 것이 사용자측면에서 최적의 예방보전정책이 되고, 그 때의 단위시간당 기대비용은 $C_{\text{FMW}}(x_F^*, N_F^*)$가 된다.

3. 비례수리보증 이후의 예방보전정책

2절에서는 무료수리보증이 종료된 이후의 주기적인 예방보전정책에 대하여 살펴보았다. 그러나 보증기간에서 수행되는 최소수리는 생산자의 보증정책에 따라 무료가 아닌 유료의 형태도 가능할 것이다. 즉, 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 사용자는 최소수리비용에 비례한 일정비용을 지불하고 시스템에 최소수리가 수행되며, 보증기간은 다시 시작되지 않는 비례수리보증을 고려할 수 있을 것이다. 이 절에서는 비례수리보증이 종료된 이후의 최적의 주기적 예방보전모형을 설명하고자 하는데, 이를 위해서 다음과 같은 사항들을 가정하고자 한다.

가정 (B)

i) 시스템에는 비례수리보증기간 w_P가 주어진다.

ii) PM은 kx_P, $k = 1, 2, \ldots, N_P$에서 주기적으로 이루어지며, x_P는 PM의 주기이고, N_P는 PM의 횟수이다. 그리고 N_P번째 PM주기에서는 시스템이 새것으로 교체된다.

iii) $h(t)$는 PM이 이루어지지 않을 때의 고장률함수로써 순증가함수이다.

iv) k번째 PM이 이루어진 이후의 시스템의 고장률함수는 다음과 같이 Canfield (1986)가 제안한 PM 하에서의 고장률함수를 갖는다.

$$h_k(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \le t \le x_P, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \{h(ix_P - (i-1)\eta) - h(i(x_P-\eta))\} + h(t-k\eta), & kx_P \le t \le (k+1)x_P. \end{cases}$$

여기서, η는 예방보전의 수준을 표현하는 인자이다.

v) 연속되는 예방보전 주기 사이에서 고장이 발생되면 최소수리를 수행한다.

vi) PM과 최소수리, 그리고 교체를 위한 시간은 고려하지 않는다.

vii) 보증기간에서의 최소수리비용은 $c_{m,w}$, 보전기간에서의 최소수리비용은 c_m, 보증기간 또는 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용은 c_d, 예방보전비용은 c_p이고 교체비용은 c_r이다.

위와 같은 가정을 통해서 비례수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형을 고려할 수 있다. 즉, 시스템에는 유료보증기간 w_P가 주어지고, 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 수리비용의 일부를 지불하고 최소수리가 수행되며, 보증기간은 재생되지 않는다. 또한 보증기간이 종료된 이후에는 시스템에 고장이 발생하면 사용자에 의해서 최소수리가 수행되고, x_P마다 주기적으로 예방보전활동이 수행되며, N_P번째 PM주기에서는 시스템이 새 것으로 교체되는 모형을 고려하고자 한다.

이러한 예방보전모형에 대한 최적의 보전정책을 설정하기 위해서는 단위시간당 기대비용을 결정하여야 한다. 그리고 단위시간당 기대비용을 구하기 위해서는 총기대비용과 기대순환길이를 구해야 한다. 우선, 보증기간 동안에 발생되는 기대비용 $E(W_P)$와 보전기간 동안에 발생되는 기대비용 $E(M_P)$으로부터 비례수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 총기대비용 $\mathrm{TEC}_{\mathrm{PMW}}(x_P, N_P)$을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{TEC}_{\mathrm{PMW}}(x_P, N_P) &= E(W_P) + E(M_P)\\ &= (c_d + c_{m,w})\int_0^{w_P} h(t)dt + (c_d + c_m)\Bigg[\sum_{k=1}^{N_P-1}\sum_{i=1}^{k}\{h(ix_P - (i-1)\eta + w_P)\\ &\quad - h(i(x_P - \eta) + w_P)\}x_P + \sum_{k=0}^{N_P-1}\int_{kx_P+w_P}^{(k+1)x_P+w_P} h(t-k\eta)dt\Bigg] + (N_P - 1)c_p + c_r. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

여기서, c_d는 보증기간 또는 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용이고, $c_{m,w}$은 보증기간에서의 최소수리비용, c_m은 보전기간에서의 최소수리비용, c_p는 예방보전비용 그리고 c_r은 보전기간이 종료되는 시점에서 새로운 시스템으로 교체하기 위한 교체비용이다. 그리고 비례수리보증에서도 보증기간은 재생되지 않고 최소수리가 수행되기 때문에 시스템의 기대순환길이는 다음과 같다.

$$\mathrm{ECL}_{\mathrm{PMW}}(x_P, N_P) = w_P + N_P x_P. \qquad (3.2)$$

따라서 식 (3.1)의 총기대비용과 식 (3.2)의 기대순환길이로부터 비례수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 사용자 측면의 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{PMW}}(x_P, N_P) = \frac{1}{w_P + N_P x_P}\Bigg[&(c_d + c_{m,w})\int_0^{w_P} h(t)dt\\ &+ (c_d + c_m)\Bigg[\sum_{k=1}^{N_P-1}\sum_{i=1}^{k}\{h(ix_P - (i-1)\eta + w_P) - h(i(x_P - \eta) + w_P)\}x_P\\ &+ \sum_{k=0}^{N_P-1}\int_{kx_P+w_P}^{(k+1)x_P+w_P} h(t-k\eta)dt\Bigg] + (N_P - 1)c_p + c_r\Bigg]. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

이제, 비례수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 사용자 측면의 단위시간당 기대비용인 식 (3.3)을 최소화하는 최적의 예방보전 주기와 횟수를 결정하는 문제를 다루고자 한다. 우선, 최적의 예방보전 주기 x_P^*를 찾기 위해서 식 (3.3)을 x_P에 관해서 1차 미분한 다음 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$w_P(b_1 + x_P b_2 + b_3) + N_P(x_P^2 b_2 + x_P b_3 - b_4) = N_P \frac{c_2}{c_d + c_m}. \tag{3.4}$$

식 (3.4)에서 c_2, b_1, b_2, b_3, b_4는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
c_2 &= (c_d + c_{m,w}) \int_0^{w_P} h(t)dt + (N_P - 1)c_p + c_r, \\
b_1 &= \sum_{k=1}^{N_P-1} \sum_{i=1}^{k} \{h((i-1)(x_P - \eta) + (x_P + w_P)) - h(i(x_P - \eta) + w_P)\}, \\
b_2 &= \sum_{k=1}^{N_P-1} \sum_{i=1}^{k} \{h'((i-1)(x_P - \eta) + (x_P + w_P))i - h'(i(x_P - \eta) + w_P)i\}, \\
b_3 &= \sum_{k=0}^{N_P-1} \{(k+1)h((k+1)x_P + w_P - k\eta) - kh(k(x_P + w_P) - k\eta)\}, \\
b_4 &= \sum_{k=0}^{N_P-1} \int_{kx_P + w_P}^{(k+1)x_P + w_P} h(t - k\eta)dt.
\end{aligned}$$

만약, 시스템의 고장률함수 $h(t)$가 볼록인 순증가 함수이고 N_P의 값이 주어지면, 식 (3.4)를 만족하는 최적의 주기 x_P^*의 값이 항상 유일하게 존재한다. 그러나 이와 같이 구해지는 x_P^*는 N_P의 값에 의존하게 되므로 식 (3.3)을 만족하는 최적의 주기 x_P^*와 최적의 예방보전 횟수 N_P^*를 동시에 찾아야만 한다. 이를 위해서 식 (3.4)를 만족하는 x_P가 N_P의 함수가 되기 때문에 이를 x_{P,N_P}이라고 하고, 이 값을 식 (3.3)의 x_P대신에 대입하면, $C_{\mathrm{PMW}}(x_{P,N_P}, N_P)$은 N_P만의 함수가 되므로 최적의 횟수 N_P^*는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N_P^* = \min_{N_P} C_{\mathrm{PMW}}(x_{P,N_P}, N_P), \quad N_P = 1, 2, 3 \ldots. \tag{3.5}$$

따라서 식 (3.3)의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 횟수는 식 (3.5)에서 구해진 N_P^*이고, 이 때 최적의 주기 x_P^*는 x_{P,N_P^*} 가 된다. 결국, 무료수리보증이 종료된 이후에 x_P^*시점마다 주기적으로 예방보전 활동을 수행하고, N_P^*번째 예방보전주기에서는 사용자에 의해 새로운 시스템으로 교체하는 것이 사용자측면에서 최적의 예방보전정책이 되고, 그 때의 단위시간당 기대비용은 $C_{\mathrm{PMW}}(x_P^*, N_P^*)$가 된다.

4. 혼합수리보증 이후의 예방보전정책

4.1. 혼합수리보증

2절에서는 무료수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대하여 설명하였으며, 3절에서는 비례수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대하여 설명하였다. 이를 위해서 각각 무료수리보증과 비례수리보증에 대하여 설명하였는데, 더욱 더 일반적인 수리보증정책으로 무료수리보증과 비례수리보증의 혼합된 형태인 혼합수리보증을 고려할 수 있을 것이다. 즉, 혼합수리보증에서는 무료수리보증기간 $(0, v)$에서 시스템에 고장이 발생하면 무료로 최소수리가 이루어지며, 비례수리보증기간 (v, w)에

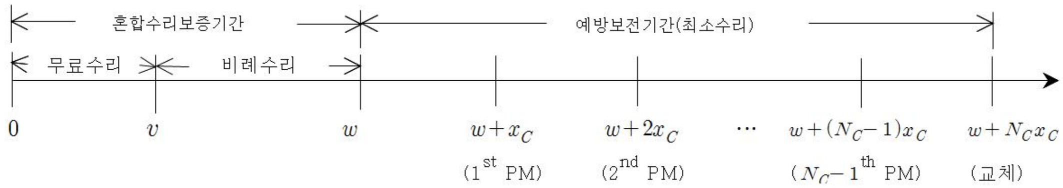

그림 1: *혼합수리보증이 종료된 이후의 교체모형*

서 고장이 발생하면 일정비용을 지불하고 시스템에 최소수리가 수행되는 정책이다. 혼합수리보증에서 $v = w$이면 즉, 비례보증기간이 없으면 무료수리보증이 되고, $v = 0$이면 비례수리보증이 됨을 알 수 있다. 이 절에서는 혼합수리보증이 종료된 이후의 최적의 주기적 예방보전모형을 설명하고자 하고자 하는데, 이를 위해서 다음과 같은 사항들을 가정하고자 한다.

가정 (C)

i) 시스템에는 혼합수리보증기간을 나타내는 무료수리보증기간 v와 전체보증기간 w가 주어진다.

ii) PM은 kx_C, $k = 1, 2, \ldots, N_C$에서 주기적으로 이루어지며, x_C는 PM의 주기이고, N_C은 PM의 횟수이다. 그리고 N_C번째 PM주기에서는 시스템이 새 것으로 교체된다.

iii) $h(t)$는 PM이 이루어지지 않을 때의 고장률함수로써 순증가함수이다.

iv) k번째 PM이 이루어진 이후의 시스템의 고장률함수는 다음과 같이 Canfield (1986)가 제안한 PM 하에서의 고장률함수를 갖는다.

$$h_k(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \le t \le x_C, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \{h(ix_C - (i-1)\eta) - h(i(x_C - \eta))\} + h(t - k\eta), & kx_C \le t \le (k+1)x_C. \end{cases}$$

여기서, η는 예방보전의 수준을 표현하는 인자이다.

v) 연속되는 예방보전 주기 사이에서 고장이 발생되면 최소수리를 수행한다.

vi) PM과 최소수리, 그리고 교체를 위한 시간은 고려하지 않는다.

vii) 보증기간에서의 최소수리비용은 $c_{m,w}$, 보전기간에서의 최소수리비용은 c_m, 보증기간 또는 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용은 c_d, 예방보전비용은 c_p이고 교체비용은 c_r이다.

위와 같은 가정 (C)로부터 본 논문에서 고려하는 혼합수리보증이 종료된 이후의 사용자 측면의 예방보전모형을 설명할 수 있다(그림 1 참조). 즉, 본 논문에서 고려하는 예방보전모형은 혼합수리보증에 따른 보증기간 v와 w가 주어지며, 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 무료 또는 수리비용의 일부를 지불하고 최소수리가 수행되며, 보증기간은 재생되지 않는다. 또한 보증기간이 종료된 이후에는 시스템에 고장이 발생하면 사용자에 의해서 최소수리가 수행되고, x_C마다 주기적으로 예방보전활동이 수행되며, N_C번째 PM주기에서는 시스템이 새 것으로 교체되는 모형을 고려하고자 한다.

위와 같은 예방보전모형에 대한 최적의 보전정책을 설정하기 위해서는 단위시간당 기대비용을 결정하여야 한다. 그리고 단위시간당 기대비용을 구하기 위해서는 총기대비용과 기대순환길이를 구해

야 한다. 먼저, 총기대비용 $\text{TEC}_{\text{CMW}}(x_C, N_C)$은 혼합보증기간 동안에 발생되는 기대비용 $E(W_C)$과 보전기간 동안에 발생되는 기대비용 $E(M_C)$으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\text{TEC}_{\text{CMW}}(x_C, N_C) &= E(W_C) + E(M_C)\\ &= c_d \int_0^w h(t)dt + c_{m,w} \int_v^w h(t)dt + (c_d + c_m)\\ &\quad \times \left[\sum_{k=1}^{N_C-1} \sum_{i=1}^{k} \{h(ix_C - (i-1)\eta + w) - h(i(x_C - \eta) + w)\} x_C \right.\\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{N_C-1} \int_{kx_C+w}^{(k+1)x_C+w} h(t - k\eta)dt \right] + (N_C - 1)c_p + c_r. \end{aligned} \tag{4.1}$$

여기서, c_d는 보증기간 또는 보전기간에서 발생하는 고장에 따른 비용이고, $c_{m,w}$은 보증기간에서의 최소수리비용, c_m은 보전기간에서의 최소수리비용, c_p는 예방보전비용 그리고 c_r은 보전기간이 종료되는 시점에서 새로운 시스템으로 교체하기 위한 교체비용이다. 한편, 혼합수리보증에서도 주어진 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하여도 보증기간은 재생되지 않고 최소수리가 수행되기 때문에, 시스템의 기대순환길이는 다음과 같다.

$$\text{ECL}_{\text{CMW}}(x_C, N_C) = w + N_C x_C. \tag{4.2}$$

따라서 식 (4.1)의 총기대비용과 식 (4.2)의 기대순환길이로부터 혼합수리보증이 종료된 이후에 단위시간당 기대비용을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{\text{PMW}}(x_C, N_C) &= \frac{1}{w + N_C x_C} \left[c_d \int_0^w h(t)dt + c_{m,w} \int_v^w h(t)dt + (c_d + c_m) \right.\\ &\quad \times \left[\sum_{k=1}^{N_C-1} \sum_{i=1}^{k} \{h(ix_C - (i-1)\eta + w) - h(i(x_C - \eta) + w)\} x_C \right.\\ &\quad \left.\left. + \sum_{k=0}^{N_C-1} \int_{kx_C+w}^{(k+1)x_C+w} h(t - k\eta)dt \right] + (N_C - 1)c_p + c_r \right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

이제, 혼합수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 사용자 측면의 단위시간당 기대비용인 식 (4.3)을 최소화하는 최적의 예방보전 주기와 횟수를 결정하는 문제를 다루고자 한다. 우선, 최적의 예방보전 주기 x_C^*를 찾기 위해서 식 (4.3)을 x_C에 관해서 1차 미분한 다음 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$w_C(d_1 + x_C d_2 + d_3) + N_C \left(x_C^2 d_2 + x_C d_3 - d_4 \right) = N_C \frac{c_3}{c_d + c_m}. \tag{4.4}$$

식 (4.4)에서 c_3, d_1, d_2, d_3, d_4는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} c_3 &= c_d \int_0^w h(t)dt + c_{m,w} \int_v^w h(t)dt + (N_C - 1)c_p + c_r,\\ d_1 &= \sum_{k=1}^{N_C-1} \sum_{i=1}^{k} \{h((i-1)(x_C - \eta) + (x_C + w)) - h(i(x_C - \eta) + w)\},\\ d_2 &= \sum_{k=1}^{N_C-1} \sum_{i=1}^{k} \{h'((i-1)(x_C - \eta) + (x_C + w))i - h'(i(x_C - \eta) + w)i\}, \end{aligned}$$

$$d_3 = \sum_{k=0}^{N_C-1} \{(k+1)h((k+1)x_C + w - k\eta) - kh(k(x_C + w) - k\eta)\},$$
$$d_4 = \sum_{k=0}^{N_C-1} \int_{kx_C+w}^{(k+1)x_C+w} h(t - k\eta)dt.$$

만약, 시스템의 고장률함수 $h(t)$가 볼록인 순증가 함수이고 N_C의 값이 주어지면, 식 (4.4)를 만족하는 최적의 주기 x_C^*의 값이 항상 유일하게 존재한다. 그러나 이와 같이 구해지는 x_C^*는 N_C의 값에 의존하게 되므로 식 (4.4)를 만족하는 최적의 주기 x_C^*와 최적의 예방보전 횟수 N_C^*를 동시에 찾아야만 한다. 이를 위해서 식 (4.4)를 만족하는 x_C가 N_C의 함수가 되기 때문에 이를 x_{C,N_C}이라고 하고, 이 값을 식 (4.3)의 x_C대신에 대입하면, $C_{\text{CMW}}(x_{C,N_C}, N_C)$은 N_C만의 함수가 되므로 최적의 횟수 N_C^*는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N_C^* = \min_{N_C} C_{\text{CMW}}(x_{C,N_C}, N_C), \quad N_C = 1, 2, 3 \ldots. \tag{4.5}$$

따라서 식 (4.3)의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 횟수는 식 (4.5)에서 구해진 N_C^*이고, 이 때 최적의 주기 x_C^*는 x_{C,N_C^*}가 된다. 결국, 무료수리보증이 종료된 이후에 x_C^*시점마다 주기적으로 예방보전 활동을 수행하고, N_C^*번째 예방보전주기에서는 사용자에 의해서 새로운 시스템으로 교체하는 것이 사용자측면에서 최적의 예방보전정책이 되고, 그 때의 단위시간당 기대비용은 $C_{\text{CMW}}(x_C^*, N_C^*)$가 된다.

만약 혼합수리보증에서 $v = w(= w_F)$이면 무료수리보증이 되고, 식 (4.3)에 나타나 있는 단위시간당 기대비용은 식 (4.6)과 같이 되며, 이는 식 (2.3)에 있는 무료수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 단위시간당 기대비용과 동일 해 짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{\text{CMW}}(x, N) = \frac{1}{w + Nx} \Bigg[c_d \int_0^w h(t)dt + (c_d + c_m) \Bigg[\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{k} \{h(ix_P - (i-1)\eta + w) \\ - h(i(x_{-}\eta) + w)\}x + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kx+w}^{(k+1)x+w} h(t - k\eta)dt \Bigg] + (N-1)c_p + c_r \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

또한, 혼합수리보증에서 $v = 0$이고, $w = w_P$이면 비례수리보증이 되고, 식 (4.3)에 나타나 있는 단위시간당 기대비용은 식 (4.7)과 같이 되며, 이는 3절에서 고려한 비례수리보증이 종료된 이후에 예방보전모형에 대한 단위시간당 기대비용인 식 (3.3)과 동일하게 된다.

$$\begin{aligned} C_{\text{CMW}}(x, N) = \frac{1}{w + Nx} \Bigg[(c_d + c_{m,w}) \int_0^w h(t)dt + (c_d + c_m) \Bigg[\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{k} \{h(ix - (i-1)\eta + w) \\ - h(i(x_{-}\eta) + w)\}x + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kx}^{(k+1)x+w} h(t - k\eta)dt \Bigg] + (N-1)c_p + c_r \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

5. 수치적 예

본 논문에서 고려된 예방보전모형에 대한 최적의 예방보전정책을 설명하기 위해서 시스템의 고장시간 T가 척도모수(scale parameter)가 1인 와이블분포(Weibull distribution)를 한다고 가정하자. 즉, 가정된 시스템의 고장률함수는 $h(t) = \beta t^{\beta-1}$이 된다. 그리고 보증기간은 $w = 0.5$, 보증기간 또는 보전기

표 1: 수리보증이 종료된 이후의 최적의 예방보전정책($\beta = 3$)

v	Optimal policy	c_r 10	20	30
0	$x_C^*(= x_P^*)$	0.56817	0.85153	0.60845
	$N_C^*(= N_P^*)$	1	1	2
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)(= C_{PMW}(x_P^*, N_P^*))$	13.69170	21.91960	28.70922
0.1	x_C^*	0.56813	0.85151	0.60845
	N_C^*	1	1	2
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.69077	21.91886	28.70864
0.2	x_C^*	0.56787	0.85135	0.60837
	N_C^*	1	1	2
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.68421	21.91368	28.70456
0.3	x_C^*	0.56717	0.85091	0.60819
	N_C^*	1	1	2
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.66642	21.89961	28.69350
0.4	x_C^*	0.56583	0.85007	0.60783
	N_C^*	1	1	2
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.63172	21.87222	28.67193
0.5	$x_C^*(= x_F^*)$	0.56359	0.84867	0.60725
	$N_C^*(= N_F^*)$	1	1	2
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)(= C_{FMW}(x_F^*, N_F^*))$	13.57443	21.82701	28.63637

간에서 발생하는 고장에 따른 비용은 $c_d = 1$, 보증기간에서의 최소수리비용은 $c_{m,w} = 1$, 보전기간 동안에 수행되는 예방보전비용은 $c_p = 2$ 그리고 보전기간에서의 최소수리비용은 $c_m = 3$이라고 가정하자. 이때, 식 (2.3)에 주어져 있는 무료수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 단위시간당 기대비용과 식 (3.3)에 주어져 있는 비례수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 단위시간당 기대비용 그리고 식 (4.3)에 주어져 있는 혼합수리보증이 종료된 이후의 예방보전모형에 대한 단위시간당 기대비용을 구할 수 있다.

표 1, 표 2 그리고 표 3에는 $\beta = 3$, $\beta = 4$ 그리고 $\beta = 5$인 경우에 대하여 각각 수리보증이 종료된 이후의 최적의 예방보전정책과 그 때의 단위시간당 기대비용이 나타나 있다. 표 1에서 $v = 0.3$이고 $c_r = 30$일 때, 식 (4.3)을 최소화하는 최적의 예방보전 주기는 0.60819이고 예방보전 횟수는 2가 됨을 알 수 있는데, 이는 혼합수리보증이 종료된 이후에 0.60819시점에서 첫 번째 예방보전을 수행하고, 두 번째 예방보전 주기에서는 새로운 시스템으로 교체하면 단위시간당 기대비용이 28.69350이 되고, 이것이 기대비용 측면에서 최적의 예방보전정책이 된다는 것을 의미한다. 마찬가지로 표 1, 표 2 그리고 표 3에 있는 다른 최적의 예방보전 주기와 횟수 및 그 때의 단위시간당 기대비용에 대해서도 동일하게 의미를 부여할 수 있다.

한편, 표 1, 표 2 그리고 표 3로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

i) $v = 0$이면 , $x_c^* = x_P^*, N_c^* = N_P^*$가 되고 $v = w$이면, $x_c^* = x_F^*, N_c^* = N_F^*$가 된다.

ii) v값이 커지면 무료수리보증기간이 늘어나게 되는 것이기 때문에 단위시간당 기대비용은 적어진다.

iii) v값이 고정되어 있을 때, c_r값이 증가하면 즉, 시스템의 교체비용이 증가하면 단위시간당 기대비용과 예방보전 횟수가 증가한다.

iv) v값과 c_r값이 고정되어 있을 때, β값이 증가하면 예방보전 횟수는 증가한다.

표 2: 수리보증이 종료된 이후의 최적의 예방보전정책($\beta = 4$)

v	Optimal policy	c_r		
		10	20	30
0	$x_C^*(= x_P^*)$	0.45245	0.63443	0.35803
	$N_C^*(= N_P^*)$	1	1	3
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)(= C_{PMW}(x_P^*, N_P^*))$	13.82410	23.35954	30.86668
0.1	x_C^*	0.45245	0.63443	0.35803
	N_C^*	1	1	3
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	0.45241	0.63441	0.35803
0.2	x_C^*	13.82399	23.35945	30.86661
	N_C^*	1	1	3
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.82242	23.35813	30.86566
0.3	x_C^*	0.45225	0.63433	0.35799
	N_C^*	1	1	3
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.81559	23.35240	30.86153
0.4	x_C^*	0.45183	0.63407	0.35791
	N_C^*	1	1	3
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.79721	23.33697	30.85041
0.5	$x_C^*(= x_F^*)$	0.45093	0.63355	0.35773
	$N_C^*(= N_F^*)$	1	1	3
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)(= C_{FMW}(x_F^*, N_F^*))$	13.75842	23.30443	30.82696

표 3: 수리보증이 종료된 이후의 최적의 예방보전정책($\beta = 5$)

v	Optimal policy	c_r		
		10	20	30
0	$x_C^*(= x_P^*)$	0.40915	0.35141	0.27331
	$N_C^*(= N_P^*)$	1	2	4
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)(= C_{PMW}(x_P^*, N_P^*))$	13.66330	3.81535	1.17305
0.1	x_C^*	0.40915	0.35141	0.27331
	N_C^*	1	2	4
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.66329	23.81534	31.17304
0.2	x_C^*	0.40913	0.35141	0.27331
	N_C^*	1	2	4
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.66295	23.81509	31.17285
0.3	x_C^*	0.40909	0.35139	0.27331
	N_C^*	1	2	4
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.66063	23.81333	31.17152
0.4	x_C^*	0.40895	0.35135	0.27329
	N_C^*	1	2	4
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)$	13.65203	23.80684	31.16662
0.5	$x_C^*(= x_P^*)$	0.40857	0.35121	0.27321
	$N_C^*(= N_F^*)$	1	2	4
	$C_{CMW}(x_C^*, N_C^*)(= C_{FMW}(x_F^*, N_F^*))$	13.62891	23.78937	31.15343

6. 결론

본 논문에서는 수리가 가능한 시스템에 대하여 최소수리보증이 종료된 이후의 최적의 예방보전정책에 대하여 살펴보았다. 즉, 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면 무료로 최소수리를 수행하여 주고 보증기간은 재생되지 않는 무료수리보증과 최소수리를 위한 일정비용을 지불하는 비례수리보증, 그리고 무료수리보증과 비례수리보증의 혼합형태인 혼합수리보증이 종료된 이후의 사용자 측면의 예

방보전모형을 소개하고, 각각의 예방보전모형에 대하여 사용자 측면의 단위시간당 기대비용을 구하였다. 또한, 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 예방보전정책에 대하여 살펴보았다. 끝으로 수치적 예를 통하여 본 논문에서 고려된 예방보전모형에 대한 최적의 예방보전 주기와 예방보전 횟수 및 그 때의 단위시간당 기대비용을 결정할 수 있음을 보였으며, 교체비용과 혼합보증에서의 무료보증기간이 다양한 값으로 변화할 때 최적의 예방보전정책 및 단위시간당 기대비용이 어떠한 변화를 보이는지에 대하여 살펴보았다.

참고 문헌

Blischke, W. R. and Murthy, D. N. P. (1994). *Warranty cost analysis*, Marcel Dekker, New York.

Blischke, W. R. and Murthy, D. N. P. (1996). *Product Warranty Handbook*, Marcel Dekker, New York.

Canfield, R.V. (1986). Cost optimization of periodic preventive maintenance, *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 78–81.

Chien, Y. H. (2008). A general age replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty, *European Journal of Operational Research,* **186**, 1046–1058.

Jung, K. M. (2009). Replacement model for repairable system after repair warranty, *Journal of the Korean Data Analysis Society*, **11**, 3355–3365.

Jung, K. M., Han, S. S. and Park, D. H. (2008). Optimization of cost and downtime for replacement model following the expiration of warranty, *Reliability Engineering and System Safety*, **93**, 995–1003.

Jung, G. M. and Park, D. H. (2003). Optimal maintenance policies during the post-warranty period, *Reliability Engineering and System Safety*, **82**, 173–185.

Sahin, I. and Polatoglu, H. (1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty, *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 220–228.

Yeh, R. H., Chen, M. Y. and Lin, C. Y. (2007). Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty, *European Journal of Operational Research*, **176**, 1678–1686.

2010년 8월 접수; 2010년 9월 채택

Preventive Maintenance Model after Minimal Repair Warranty

Ki Mun Jung[1,a]

[a]Department of Informational Statistics, Kyungsung University

Abstract

This paper considers the periodic preventive maintenance model for a repairable system following warranty expiration. We consider three types of warranty policies: free repair warranty, pro-rata repair warranty, and combination repair warranty. Under these preventive maintenance models, we derive the expressions for the expected cycle length, the total expected cost, and the expected cost rate per unit time. In addition, we explain the optimal preventive maintenance period and the optimal preventive maintenance number by minimizing the expected cost rate per unit time. Finally, the optimal periodic preventive maintenance policy is given for a Weibull distribution case.

Keywords: Expected cost rate per unit time, free repair warranty, pro-rata repair warranty, preventive maintenance policy, combination repair warranty.

This work was supported by the Korea Research Foundation Grant funded by the Korean Government (KRF-2008-331-C00069).

[1] Associate Professor, Department of Informational Statistics, Kyungsung University, Busan 608-736, Korea.
E-mail: kmjung@ks.ac.kr