韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 3호, 2009. 9. 887-921

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 3, Sep. 2009. 887-921

피타고라스 정리의 다양한 증명 방법과 수학교육학적 아이디어 분석[1)]

김 영 록[2)] · 노 희 성 · 손 은 해 (한국외국어대학교 교육대학원)

인류 문명의 발달과 함께 폭넓게 활용된 수학적 내용 중의 하나가 피타고라스 정리이다. 특히, 이집트, 메소포타미아, 중국과 같은 고대 문명의 발생지에서 발굴되는 많은 역사적 기록 속에서 피타고라스 정리에 대한 내용을 찾아 볼 수 있다. 피타고라스 정리는 중등학교 수학교육에서 매우 중요한 정리로써, 정리 내용 자체뿐만 아니라 다양한 증명 방법과 증명 과정에 내재된 수학적 아이디어는 수학 교육학적 측면에서 큰 의미를 가지고 있다.
이에 본 연구에서는 먼저 피타고라스 정리의 390여 가지의 알려진 증명 방법들을 중심으로 하여, 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법들에 대한 분석을 한다. 분석된 결과를 바탕으로 각 증명 방법들에 대한 핵심 아이디어, 선수학습개념, 주요 아이디어들을 알아보고 내재된 수학교육학적 아이디어를 분석할 것이다.

I. 서 론

수학교육의 목표는 새로운 생각을 해내고 사고력과 그 것을 실천에 옮겨 가치 있는 것을 창출해내는 창의적인 인간을 육성하는데 있다. 이러한 목표를 달성하는 데 있어서 증명은 중요한 역할을 한다. (양선영(2004)의 석사학위논문 참조)

이러한 수학적 증명 중 대표적인 것으로 유클리드 원론 제 1권 명제 47의 피타고라스 정리의 증명을 들 수 있다. 피타고라스 정리는 인류 문명의 발달과 함께 폭 넓게 활용된 수학적 내용 중의 하나이다. 특히, 이집트, 메소포타미아, 중국과 같은 고대 문명의 발생지에서 발굴되는 많은 역사적 기록 속에서 피타고라스 정리에 대한 내용을 찾아 볼 수 있다. (노희성(2008)의 석사학위논문 참조)

중학교 3학년 수학과 교육과정에서 학습하도록 되어 있는 피타고라스 정리는 도형의 개념을 수의 계산과 연관 지어 나타낼 수 있는 실용적인 의의를 갖고 있다. 수학사를 살펴보면, 피타고라스 정리

---

1) 이 연구는 2009학년도 한국외국어대학교 교내학술연구비의 지원에 의해 이루어진 것임.
2) This work was supported by the Korea Research Foundation Grant funded by the Korean Government (KRF-2008-331-C00012) for first author.
* 접수일(2009년 7월 31일), 수정일(1차 8월 31일), 게재확정일(2009년 9월 7일)
* ZDM 분류 : E53
* MSC2000 분류 : 97D10
* 주제어 : 피타고라스 정리, 수학교육학적 아이디어

는 인류 역사상 가장 오래된 수학 정리들 중의 하나로 현재까지 367가지의 증명 방법이 발견되었으며, Bogomolny (2008) 운영하는 홈페이지를 방문하면 새로운 증명 방법들을 볼 수 있다. 이러한 다양한 증명들을 모아서 Loomis (1968)는「The Pythagoean Proposition」이란 책을 만들었다. 이 책에서 Loomis는 367가지의 피타고라스 정리의 다양한 증명들을 대수적 증명, 기하학적 증명, 4원법 증명, 역학적 증명의 네 가지 범주로 나누어 제시하고 있다.

이에 본 연구에서는 피타고라스 정리의 증명에 내재된 수학적 아이디어를 고찰하여 수학에 재능이 있는 학생들로 하여금 다양하고 새로운 시각으로 피타고라스 정리를 학습할 기회를 제공하고자 한다. 이를 위하여 Loomis (1968)의「The Pythagorean Proposition」책을 거의 그대로 번역하고, 그 이외에 현대에 이르기까지 새롭게 발견되거나 정립된 증명들을 모아 놓은 책「올댓 피타고라스 정리」(이만근, 전병기 (2007)) 을 중심으로, 노희성 (2008)의 석사학위 논문, 홍춘희 (2003)의 석사학위 논문 등에 게재된 내용들까지 참고로 하여, 피타고라스 정리의 다양한 증명들에 대한 분석을 하고자 한다. 이 때, 새롭게 추가된 증명들은 Loomis의 원본과 비교하면 개수가 많지 않지만 증명 방법들은 Loomis의 원본과는 다른 것들이다. 이러한 분석 결과를 바탕으로 각 증명법의 핵심아이디어, 선수학습개념, 주요개념들을 알아보고, 각 증명법에 내재된 수학교육학적 의의를 분석하였다.

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

(1) 피타고라스 정리의 다양한 증명에 사용된 핵심 아이디어, 선수학습 개념, 주요 개념에는 어떠한 것들이 있고 가장 많이 사용된 방법은 무엇인가?

(2) 각각의 증명에 사용된 아이디어들은 수학교육학적으로 어떠한 의의를 갖는가?

(3) 도형 단원 교수-학습에서 피타고라스 정리의 증명을 효과적으로 활용할 수 있는 방안은 무엇인가?

또한 본 연구의 목적을 달성하기 위해 다음과 같은 연구 방법 및 절차를 시행하였다.

(1) 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법과 수학의 여러 영역들 사이의 관련성을 고찰하기 위해 여러 증명 방법에 내재된 아이디어들을 알아본다.

(2) 각각의 자료 분석과 자료들 간의 증명 방법의 비교를 통하여 어떠한 증명방법 이 가장 많이 쓰였는지를 살펴보고, 내재된 아이디어가 수학교육학적으로 어떠한 의의를 갖는지를 살펴본다.

(3) 도형 단원 교수-학습에서 피타고라스 정리의 증명을 효과적으로 활용할 수 있 는 방안은 무엇인가 알아본다.

II. 본 론

이 장에서는 피타고라스 정리의 증명방법에 대한 연구 결과를 정리하고, 핵심아이디어, 선수학습개념, 주요 개념 및 기하학적 의미의 관점에서 연구 결과들을 분석한다.

1. 선행 연구 결과

수학사를 살펴보면, 피타고라스 정리는 인류 역사상 가장 오래된 수학 정리들 중의 하나로 현재까지 370여 가지 이상의 증명 방법이 발견되었으며 지금도 새로운 증명 방법들이 계속 발견되고 있다.

이러한 다양한 증명들을 모아서 Loomis(1968)는 「The Pythagorean Proposition」이란 책을 만들었다. 이 책에서 Loomis는 367가지의 다양한 피타고라스 정리의 증명을 대수적 증명, 기하학적 증명, 4원수 증명, 역학적 증명의 네 가지 범주로 나누어 제시하고 있다.

피타고라스 정리에 관한 국내의 연구를 살펴보면, 김민정(2004)은 여러 가지 증명들을 접근방법에 따라 종합기하, 해석기하, 벡터기하, 변환기하로 분류 연구하였고, 홍춘희 (2003)는 다양한 증명을 정리하여 중학교 수학과 교육 과정 순으로 배열하고 내재된 수학적 아이디어를 제시하였다. 대부분의 연구들은 피타고라스 정리의 증명을 나열하거나 교수학습 개선·지도 쪽으로 교수 매체를 개발하는 것에 초점이 맞추어져 있다.

그리고 노희성(2008)은 피타고라스 정리의 75가지의 증명방법이 실려 있는 국외 연구자료를 중심으로 하여, 교육과정평가원의 연구 자료, 홍춘희(2003)의 석사학위 논문과 한인기 외 3인(2003)의 논문 등에 게재된 피타고라스 정리의 다양한 증명들에 대한 분석을 하였다. 또한 분석된 결과를 바탕으로 각 증명법을 핵심 아이디어, 선수학습개념, 주요 아이디어 및 증명에 이용된 도형들을 알아보고, 내재된 수학교육학적 의의를 분석하였다.

1) 국외자료

수학교육 웹 사이트[3]에 제시된 다양한 피타고라스 정리 증명방법들을 다음과 같이 표로 정리하였다. 노희성(2008)의 논문에는 이들 중 저널에 게재된 증명방법들에 대한 자세한 소개가 되어있다.

<표 Ⅰ-1>의 비고란에서, '일반화'는 피타고라스의 일반화를 뜻하며, '예외 있음'은 직각 이등변 삼각형일 경우에는 성립하지 않음을 의미한다.

<표 Ⅰ-1>

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
#1	삼각형의 합동	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	Euclid	
#2	도형의 회전	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교		
#3	합동인 직각삼각형으로 정사각형 만들기	·곱셈공식 ·삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교		
#4	합동인 직각삼각형으로 정사각형 만들기	·곱셈공식 ·삼각형, 사각형의 넓이 ·삼각형의 합동조건	·넓이 비교 ·삼각형의 합동		

3) http://www.cut-the-knot.org: Alex Bogomolny에 의해 운영되는 사이트(An interactive column using Java applets)

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
#5	·보조선 긋기 ·합동인 두 직각삼각형 배열	사다리꼴, 삼각형의 넓이	넓이 비교	Garfield	
#6	수직인 보조선 긋기	삼각형의 닮음	닮음비	Baskara	
#7	도형의 닮음	삼각형의 닮음	·닮음비 ·보조선 긋기	Euclid	
#8	닮음인 직각삼각형을 추가하여 새로운 직사각형 구성	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교		
#9	합동인 직각삼각형 재배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	Gardner	
#10	합동인 직각삼각형을 재배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	Baskara	
#11	원주각과 중심각의 관계	삼각형의 닮음	닮음비		
#12	보조선 긋기	·삼각형,사각형의 넓이 ·평행사변형의 성질	·넓이 비교 ·사각형의 등적변형	H.Eves	
#13	수직인 보조선 긋기	삼각형의 닮음	닮음비		일반화
#14	·수직인 보조선 긋기 ·조각의 재배열	삼각형, 사각형의 넓이	·도형의 분할 ·도형의 합동	H.E. Dudeney (1917)	
#15	·수직인 보조선 긋기 ·조각의 재배열	삼각형, 사각형의 넓이	·도형의 분할 ·도형의 합동	Henry Perigal (1873)	
#16	보조선 긋기	평행사변형의 성질	삼각형의 합동	Leonardo Da Vinch	
#17	삼각형의 각 변에 평행사변형 구성	평행사변형의 성질	넓이 비교		일반화
#18	삼각형 안에 닮음인 삼각형 구성	삼각형의 닮음	닮음비	Thâbit ibn Qurra	일반화
#19	닮음인 직각삼각형 추가	삼각형의 닮음	·넓이 비교 ·닮음비		
#20	닮음인 삼각형 추가하여 평행사변형 구성	삼각형의 닮음	·넓이 비교 ·닮음비		
#21	Ptolemy's theorem	원에 내접한 사각형의 성질	Ptolemy's theorem	Scott Brodie	일반화
#22	원의 할선과 접선의 비례관계	원의 할선과 접선의 비례관계	곱셈 공식	Scott Brodie	

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
#23	헤론의 공식	삼각형의 넓이	넓이 비교		
#24	삼각형의 합동	평행사변형의 성질	·도형을 포개어 평행한 보조선 긋기 ·넓이 비교	Thâbit ibn Qurra	
#25	정사각형 겹쳐 그리기	평행사변형의 성질	넓이 비교	B.F.Yanney	
#26	조각의 재배열	평행이동	·도형의 닮음 ·도형의 분할		
#27	정사각형 겹쳐 그리기	평행이동	·도형의 분할 ·도형의 합동	Frans van Schooten	
#28	·보조선 긋기 ·조각의 재배열	평행이동	·도형의 분할 ·도형의 합동	Lui Hui	
#29	벡터 대수	·벡터의 연산 ·좌표 개념	스칼라 곱	Scott Brodie	
#30	직각이등변삼각형구성	삼각형의 넓이	넓이 비교	박부성	
#31	보조선을 긋고 수선임을 보이기	삼각형의 넓이	·넓이 비교 ·삼각형의 합동	Ann Condit	
#32	삼각형의 닮음	삼각형의 넓이	·넓이 비교 ·닮음비 ·보조선 긋기	·Michelle Watkins ·Douglas Rogers	
#33	삼각형의 내접원	곱셈공식	넓이 비교	Shai Simonson	
#34	·삼각형의 내접원 ·조각의 재배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	Shai Simonson	
#35	조각의 재배열	평행 이동	·도형의 분할 ·도형의 합동	Mario Pacek	
#36	조각의 재배열	평행 이동	·도형의 분할 ·도형의 합동	J. E. Böttcher	
#37	보조선 긋기	·삼(사)각형의 넓이 ·평행사변형의 성질	·넓이 비교 ·사각형의 등적 변형		
#38	빈틈없이 평면 채우기	평행이동	테셀레이션		
#39	닮음인 삼각형 구성	·원의 중심각과 원주각의 관계 ·삼각형의 닮음	·원의 중심각과 원주각 ·닮음비	J. Barry Sutton	

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
#40	미분 방정식	미분 개념	삼각형의 넓이	Michael Hardy	
#41	직각삼각형의 변들의 곱 이용	삼각형의 넓이	변 길이 비교		
#42	삼각형의 내접원	삼각형의 넓이	넓이 비교	Jack Oliver	
#43	원의 접선과 할선의 비례관계	곱셈공식	원의 작도	Larry Hoehn	
#44	삼각형의 닮음	·외각 ·평행선의 성질	닮음비	Adam Rose	
#45	·직각삼각형의 내접원 ·조각의 재배열	평행이동	넓이 비교	Douglas Rogers	
#46	합동인 두 직각삼각형의 배열	·삼각형의 넓이 ·삼각형의 닮음	·넓이 비교 ·닮음비	Tao Tong	
#47	합동인 두 직각삼각형의 배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	John Kawamura	
#48	합동인 두 직각삼각형의 배열	사다리꼴의 넓이	넓이 비교	W.J.Dobbs	
#49	합동인 두 직각삼각형의 배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교		
#50	합동인 두 직각삼각형의 배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교		
#51	보조선 긋기	삼각형, 사각형 넓이 구하기	·삼각형의 합동 ·넓이 비교	W.J.Dobbs	
#52	똑같은 두 도형 합치기	사다리꼴, 삼각형의 넓이	넓이 비교	Jamie deLemos	
#53	보조선 긋기	·삼각형의 닮음 ·삼각형의 합동조건	·닮음비 ·삼각형의 합동	Larry Hoehn	
#54	직각삼각형의 각 변에 k배하여 직사각형 구성	k의 값에 따라 앞선 증명의결과(#41, 53)	넓이 비교		
#55	평행사변형 안에 평행사변형 내접	평행사변형의 넓이	넓이 비교	W.J.Hazard	일반화
#56	삼각형의 닮음	삼각형의 합동	·넓이 비교 ·닮음비		

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
#57	각 변의 연장선 긋기	삼각형의 합동	·넓이 비교 ·닮음비	B.F.Yanney J.A.Calderhead	
#58	·수직인 선 긋기 ·연장선 긋기	삼각형의 닮음	닮음비	B.F.Yanney J.A.Calderhead	
#59	원의 접선과 할선의 비례관계	·삼각형의 닮음 ·원의 접선과 할선의 비례관계	닮음비	B.F.Yanney J.A.Calderhead	예외 있음
#60	원의 접선과 할선의 비례관계	·삼각형의 닮음 ·원의 접선과 할선의 비례관계	닮음비	B.F.Yanney J.A.Calderhead	예외 있음
#61	원의 접선과 할선의 비례관계	·원의 접선과 할선의 비례관계	닮음비	B.F.Yanney J.A.Calderhead	
#62	symmedian point	무게중심	넓이 비교	Floor van Lamoen	
#63	삼각형의 회전	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	Floor van Lamoen	
#64	보조선 긋기	삼각형,사각형의 넓이	넓이 비교	Floor van Lamoen	
#65	삼각형의 합동	삼각형,사각형의 넓이	넓이 비교	Floor van Lamoen	
#66	삼각형의 합동	삼각형,사각형의 넓이	넓이 비교	Floor van Lamoen	
#67	·직각삼각형의 외접원 ·보조선 긋기	·원과 접선 ·삼각형의 닮음	넓이 비교	Sina Shiehyan	
#68	벡터 해석	·스칼라 곱 ·평행사변형의 법칙	벡터		
#69	삼각형의 넓이	삼각형의 넓이	넓이 비교	Douglas Rogers	
#70	수직인 연장선 긋기	·삼각형,사각형의 넓이 ·삼각형의 합동조건	·넓이 비교 ·삼각형의 합동		

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
#71	대수적 항등식	원, 접선 작도	도형의 작도		
#72	보조선 긋기	평행이동	·도형의 분할 ·도형의 합동	J . Versluys	
#73	삼각형의 합동	삼각형의 넓이	넓이 비교	Weininjie da	
#74	합동인 직각삼각형으로 정사각형 만들기	곱셈공식	·도형의 분할 ·도형의 합동	A b u l Wafa	
#75	헤론의 공식	헤론의 공식	직각삼각형을 붙여 이등변 삼각형 구성		

다음은 위의 75가지의 증명 방법에 사용된 아이디어들을 분석하여 표로 제시한 것이다. 표에는 아이디어가 사용된 횟수를 분석하고 같은 아이디어로 취급된 경우에는 구체적으로 어떠한 것들이 있는지 제시하였다.

사용된 핵심 아이디어	사용 빈도	구체적 분석
보조선 긋기	17	연장선, 변에 평행한 선분, 두 점을 연결한 선분, 수선, 각의 이등분선
도형 구성	14	합동인 직각삼각형으로 정사각형 만들기(3), 도형의 회전(2), 닮음인 직각삼각형 추가하여 직사각형 구성(이하 각 1회씩), 삼각형의 각 변에 평행사변형 구성, 삼각형 안에 닮음인 삼각형 구성, 닮음인 직각삼각형 추가, 닮음인 직각삼각형 추가하여 평행사변형 구성, 정사각형 겹쳐 그리기, 닮음인 삼각형 구성, 직각삼각형의 변들의 곱 이용하여 직사각형 구성, 똑같은 두 도형 합치기, 직각삼각형의 각 변에 k배하여 직사각형 구성, 평행사변형에 내접한 평행사변형 구성
조각의 재배열	14	도형 분할 후 조각 재배열(7), 합동인 두 직각삼각형 재배열(7)
도형의 합동	5	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동)
원의 접선과 할선의 비례관계	5	원의 접선과 할선의 비례관계
도형의 닮음	4	삼각형의 닮음조건(SSS, SAS, AA 닮음)
삼각형의 내접원	3	삼각형의 내접원
벡터	2	벡터 대수(1), 벡터 해석(1)
헤론의 공식	2	헤론의 공식
도형의 넓이	1	도형(삼각형, 사각형)의 넓이
대수적 항등식	1	대수적 항등식
미분방정식	1	미분방정식
빈틈없이 평면 채	1	빈틈없이 평면 채우기

우기		
삼각형의 외접원	1	삼각형의 외접원
원의 성질	1	원주각과 중심각의 관계
symmedian point	1	symmedian point
Ptolemy's theorem	1	Ptolemy's theorem

국외의 자료에 나타난 75개의 다양한 증명방법을 분석한 결과 보조선 긋기가 핵심적 아이디어로 가장 많이 쓰였고, 도형의 구성, 조각의 재배열, 도형의 합동(7-나), 원의 접선과 할선의 비례관계(9-나), 도형의 닮음(8-나), 삼각형의 외접원(8-나), 벡터(수Ⅱ), 헤론의 공식(10-나) 등의 핵심 아이디어를 이용하여 피타고라스 정리를 증명하였음을 알 수 있었다.

사용된 선수학습개념	사용 빈도	구체적 분석
도형의 넓이	29	도형(삼각형, 사각형)의 넓이
도형의 닮음	13	삼각형의 닮음조건(SSS, SAS, AA 닮음)
도형의 평행이동	8	도형의 평행이동
곱셈공식	6	곱셈공식
도형의 합동	5	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 닮음)
원의 성질	4	원의 접선과 할선의 비례관계(이하 각 1회씩), 원과 접선, 원의 내접한 사각형의 성질, 원의 중심각과 원주각의 관계
평행선의 성질	3	평행선의 성질(이하 각 1회씩), 평행사변형의 성질, 평행사변형의 법칙
벡터	2	벡터연산(이하 각 1회씩), 스칼라 곱
무게중심	1	무게중심
미분개념	1	미분개념
외각	1	삼각형 외각
도형의 작도	1	원의 작도
좌표	1	좌표개념
헤론의 공식	1	헤론의 공식

증명 시 미리 학습하여야 할 선수학습개념에는 도형(삼각형, 사각형)의 넓이(5-나)가 가장 많았고, 도형의 닮음(8-나), 도형의 평행이동(10-나), 곱셈공식(9-가), 삼각형의 합동조건(7-나), 원의 성질(9-나), 평행선의 성질(8-나), 벡터(수Ⅱ) 등이 피타고라스 정리를 하기 위해 필요한 선수학습개념임을 알 수 있었다. 또한 무게중심, 미분개념, 외각, 도형의 작도, 좌표, 헤론의 공식과 같은 것들도 피타고라스 정리를 증명하기 위해 사용되어진 선수학습개념임을 알 수 있었다.

사용된 주요 개념	사용빈도	구체적 분석
도형의 넓이 비교	41	한 도형을 두 가지 방법으로 넓이 구하여 비교하기
도형의 닮음	17	삼각형의 닮음조건(SSS, SAS, AA 닮음)
도형의 합동	13	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동), 직각삼각형의 합동조건(RHA, RHS 합동)
도형의 분할	10	도형의 분할
보조선 긋기	3	연장선, 변에 평행한 선분, 두 점을 연결한 선분, 수선, 각의 이등분선
도형의 작도	2	원의 작도
벡터	2	벡터연산(이하 각 1회씩), 스칼라 곱
곱셈공식	1	곱셈공식
도형의 구성	1	직각삼각형 붙여 이등변 삼각형 구성
변 길이 비교	1	변 길이 비교
원의 중심각과 원주각	1	원의 중심각과 원주각
Ptolemy's theorem	1	Ptolemy's theorem

또한 증명 시 사용된 주요개념에는 넓이 비교(한 도형을 두 가지 방법으로 넓이 구하여 비교하기)가 가장 많이 사용되었고, 도형의 닮음(8-나), 도형의 합동(7-나), 도형의 분할, 보조선 긋기, 도형의 작도(7-나), 벡터(수II) 등이 사용되었음을 알 수 있다.

위의 아이디어들에 사용된 내용을 종합적으로 살펴보면, 피타고라스 정리는 9-나 과정에 학습하게 되는 것으로 사용된 아이디어들을 수학과 교육과정 단계와 연결 지어 살펴보면 대부분의 방법들이 선행 학습 없이도 증명 가능하다는 것을 알 수 있었다. 이러한 분석을 통하여 수학적으로 문제를 해결하는 방법은 하나가 아니고, 수학에서의 '증명'이 반드시 더 많이 알거나 앞선 내용을 알아야만 할 수 있다는 것이 아니라는 결론을 지을 수 있게 된다.

(2) 교육과정평가원의 자료

교육과정평가원 자료에 제시된 다양한 피타고라스 정리 증명방법들을 다음과 같이 표로 정리하였다. <표Ⅰ-2>의 비고에는 <표Ⅰ-1>과 동일한 증명 방법에 해당되는 번호를 명시하여 놓은 것이다.

<표 Ⅰ-2>

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
1	합동인 직각삼각형 재배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	Gardner	#9
2	합동인 직각삼각형 재배열	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교	Baskara	#10
·3	합동인 직각삼각형으로 정사각형 만들기	·곱셈공식 ·삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교		#2 #3
4	합동인 직각삼각형으로 정사각형 만들기	·곱셈공식 ·삼각형, 사각형의 넓이 ·삼각형의 합동조건	·넓이 비교 ·삼각형의 합동		#4
5	삼각형의 합동	삼각형, 사각형의 넓이	넓이 비교		#1
6	평행사변형의 회전	평행사변형의 성질	넓이 비교		
7	·변의 연장선 긋기 ·수직인 보조선 긋기	평행사변형의 성질	사각형의 등적변형		#12
8	수직인 보조선 긋기	·사각형의 넓이 ·삼각형의 닮음	·넓이 비교 ·닮음비		#12
9	보조선 긋기	·삼각형의 닮음 ·삼각형의 합동조건	·닮음비 ·삼각형의 합동		
10	수직인 보조선 긋기	·삼각형의 닮음	닮음비	Baskara	#6
11	닮음비와 넓이의 비 사이의 관계	·닮음비와 넓이의 비	닮음비와 넓이의 비의 관계		
12	원의 접선과 할선의 비례관계	원의 접선과 할선의 비례관계	원의 접선		#43
13	삼각형의 내접원	곱셈공식	넓이 비교		#42
14	원주각과 중심각의 관계	삼각형의 닮음	닮음비		#11
15	원의 접선과 할선의 비례관계	원의 접선과 할선의 비례관계	곱셈 공식		#22
16	·수직인 보조선 긋기 ·평행인 보조선 긋기	조각의 재배열	·도형의 분할 ·도형의 합동	H.E. Dudeney (1917)	#14
17	·수직인 보조선 긋기 ·평행인 보조선 긋기	조각의 재배열	·도형의 분할 ·도형의 합동	Henry Perigal (1873)	#15
18	보조선 긋기	조각의 재배열	·도형의 분할 ·도형의 합동	Lui Hui	#28
19	보조선 긋기	조각의 재배열	·도형의 분할 ·도형의 합동		
20	정사각형 겹쳐 그리기	조각의 재배열	·도형의 분할 ·도형의 합동		#27
21	정사각형 겹쳐 그리기	조각의 재배열	·도형의 분할 ·도형의 합동		

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	고안자	비고
22	·보조선 긋기 ·합동인 두 직각삼각형 배열	사다리꼴, 삼각형의 넓이	넓이 비교	Garfield	#5
23	똑같은 두 도형 합치기	사다리꼴, 삼각형의 넓이	넓이 비교		#52
24	·길이가 같은 선 그려 직사각형 구성 ·보조선 긋기	·삼각형의 닮음 ·삼각형의 합동조건	·닮음비 ·삼각형의 합동		#53
25	보조선 긋기	평행사변형의 성질	삼각형의 합동	Leonardo Da Vinch	#16
26	보조선 긋기	삼각형, 사각형 넓이 구하기	·삼각형의 합동 ·넓이 비교		#51
27	삼각형의 닮음	삼각형의 합동	·넓이 비교 ·닮음비		#56
28	헤론의 공식	삼각형의 넓이	넓이 비교		#23
29	Euler Formula	지수법칙	복소수 표현법		

다음은 위의 29가지의 증명 방법에 사용된 아이디어들을 분석하여 표로 제시한 것이다. 표에는 아이디어가 사용된 횟수를 분석하고 같은 아이디어로 취급된 경우에는 구체적으로 어떠한 것들이 있는지 제시하였다.

사용된 핵심 아이디어	사용 빈도	구체적 분석
보조선 긋기	15	연장선, 변에 평행한 선분, 두 점을 연결한 선분, 수선, 각의 이등분선
도형의 구성	5	합동인 직각삼각형으로 정사각형 구성(2), 정사각형 겹쳐 그리기(2), 길이가 같은 선 그려 직사각형 구성(이하 각 1회씩), 똑같은 두 도형 합치기, 평행사변형 회전
조각의 재배열	5	합동인 직각삼각형 재배열
원의 성질	3	원의 접선과 할선의 비례관계(2), 원주각과 중심각의 관계(1)
도형의 닮음	2	삼각형의 닮음조건(1), 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계(1)
도형의 합동	1	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동)
삼각형의 내접원	1	삼각형의 내접원
헤론의 공식	1	헤론의 공식
Euler Formula	1	Euler Formula

교육과정평가원 자료에 나타난 29개의 다양한 증명방법을 분석한 결과 <표 Ⅰ-1>과 같이 보조선 긋기가 핵심적 아이디어로 가장 많이 쓰였으며, 도형의 구성, 조각의 재배열, 원의 성질(9-나), 도형의 닮음(8-나) 등을 이용하여 증명하였음을 알 수 있다.

사용된 선수학습개념	사용 빈도	구체적 분석
도형의 넓이	10	도형(삼각형, 사각형)의 넓이
도형의 닮음	6	삼각형의 닮음(5), 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계(1)
조각의 재배열	6	조각의 재배열
도형의 합동	4	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동)
곱셈공식	3	곱셈공식
평행사변형의 성질	3	평행사변형의 성질
원의 성질	2	원의 접선과 할선의 비례관계
지수법칙	1	지수법칙

증명 시 미리 학습하여야 할 선수학습개념은 도형의 넓이가 가장 많았고, 도형의 닮음(8-나), 조각의 재배열, 도형의 합동(7-나), 곱셈공식(9-가), 평행사변형의 성질(8-나), 원의 성질(9-나), 지수법칙(8-가) 등을 미리 학습하여야 함을 알 수 있다. 또한 증명 시 사용된 주요개념에는 넓이 비교가 가장 많이 사용되었고, 도형의 합동(7-나), 도형의 닮음(8-나), 도형의 분할 등이 사용되었음을 알 수 있다.

사용된 주요 개념	사용 빈도	구체적 분석
넓이 비교	14	한 도형을 두 가지 방법으로 넓이 구하여 비교하기
도형의 합동	11	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동)
도형의 닮음	7	삼각형의 닮음(6), 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계(1)
도형의 분할	6	도형의 분할
곱셈공식	1	곱셈공식
복소수 표현법	1	복소수 표현법
원의 성질	1	원의 접선

3) 홍춘희(2003)의 논문 「피타고라스 정리의 다양한 증명 방법과 교육적 활용」

홍춘희(2003)의 논문에 제시된 다양한 피타고라스 정리 증명방법들을 다음과 같이 표로 정리하였다. <표Ⅰ-3>의 비고에는 <표Ⅰ-1>과 동일한 증명 방법에 해당되는 번호를 명시하여 놓았다. 특히 7번에 '교 9'는 <표Ⅰ-2>의 9번과 동일한 증명 방법임을 명시한 것이다.

<표 Ⅰ-3>

번호	핵심 아이디어	선수학습개념	주요개념	비고
1	보조선 긋기	삼각형, 사각형 넓이 구하기	·삼각형의 합동 ·넓이 비교	#51
2	삼각형의 합동	평행사변형의 성질	·평행한 보조선 긋기 ·넓이 비교	
3	삼각형의 합동	평행사변형의 성질	·보조선 긋기 ·넓이 비교	#24
4	보조선 긋기	평행사변형의 성질	·합동인 도형의 넓이 ·도형의 분할	#14
5	·변의 연장선에 의한 보조삼각형 ·삼각형의 합동	평행사변형의 성질	보조선 긋기	
6	보조선 긋기	평행사변형의 성질	·변의 연장선에 의한 보조삼각형 ·합동인 도형의 넓이	
7	삼각형의 합동	평행사변형의 성질	도형의 넓이	교9
8	보조선 긋기	평행사변형의 성질	삼각형의 합동	#16
9	삼각형의 닮음	삼각형의 넓이	·넓이 비교 ·닮음비 ·보조선 긋기	#32
10	삼각형의 닮음	삼각형의 합동	·넓이 비교 ·닮음비	#56
11	원의 접선과 할선의 비례관계	곱셈공식	원의 작도	#43
12	비례중항	삼각형의 합동	·변의 연장선으로 합동인 삼각형 찾기 ·원의 작도	

다음은 위의 12가지의 증명 방법에 사용된 아이디어들을 분석하여 표로 제시한 것이다. 표에는 아이디어가 사용된 횟수를 분석하고 같은 아이디어로 취급된 경우에는 구체적으로 어떠한 것들이 있는지 제시하였다.

사용된 핵심 아이디어	사용 빈도	구체적 분석
보조선 긋기	5	연장선, 변에 평행한 선분, 두 점을 연결한 선분, 수선, 각의 이등분선
도형의 합동	3	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동)
도형의 닮음	2	삼각형의 닮음조건(SSS, SAS, AA 닮음)
비례중항	1	비례중항
원의 성질	1	원의 접선과 할선의 비례관계

사용된 선수학습개념	사용 빈도	구체적 분석
평행사변형의 성질	7	평행사변형의 성질
도형의 넓이	2	도형(삼각형, 사각형)의 넓이
도형의 합동	2	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동)
곱셈공식	1	곱셈공식

홍춘희(2003)의 논문에 나타난 12개의 다양한 증명방법을 분석한 결과 <표 Ⅰ-1>과 같이 보조선 긋기가 핵심적 아이디어로 가장 많이 쓰였으며, 도형의 합동(7-나), 도형의 닮음(8-나), 비례중항(수-Ⅰ), 원의 성질(9-나)을 이용하여 증명하였음을 알 수 있다.

사용된 주요 개념	사용 빈도	구체적 분석
넓이 비교	7	한 도형을 두 가지 방법으로 넓이 구하여 비교하기
도형의 합동	5	삼각형의 합동조건(SSS, SAS, ASA 합동)
보조선 긋기	5	연장선, 변에 평행한 선분, 두 점을 연결한 선분, 수선, 각의 이등분선
작도	2	원의 작도
도형의 닮음	1	삼각형의 닮음조건(SSS, SAS, AA 닮음)
도형의 분할	1	도형의 분할

증명 시 미리 학습하여야 할 선수학습개념은 평행사변형의 성질(8-나)이 가장 많았고, 도형의 넓이(5-나), 도형의 합동(7-나), 곱셈공식(9-가)을 미리 학습하여야 함을 알 수 있다.

또한 증명 시 사용된 주요개념에는 넓이 비교가 가장 많이 사용되었고, 도형의 합동(7-나), 보조선 긋기, 작도(7-나), 도형의 닮음(8-나), 도형의 분할이 사용되었음을 알 수 있다.

2.「올댓 피타고라스 정리」에 수록된 다양한 증명방법

본 절에서는 피타고라스 정리의 증명방법들을 분석하기에 앞서 이만근과 전병기 (2007)의 책 「올댓 피타고라스 정리」에 수록된 다양한 증명방법들을 다음 표에 나타난 것과 같은 대분류, 중분류 기준으로 정리할 것이다. 그 내용은 Loomis가 모아 놓은 피타고라스 정리의 증명 방법 367가지와 책에 수록된 그 외의 증명 방법까지 모두 390가지 증명 방법으로「올댓 피타고라스 정리」에 있는 내용을 중심으로 정리하였다. 즉, 피타고라스 정리를 증명하는데 있어 이용된 필요한 내용들을 여러 가지 경우로 나누어, 내용에 대한 상세 분류를 기호를 사용하여 손은해(2009)의 석사학위논문의 부록에 있는 표로 제시하였다.

분류 기준표는 크게 5가지 분류 기준을 따랐다, 즉, 대분류, 중분류, 핵심아이디어별 분류, 선수학습별 분류, 내용별 분류의 5가지로 그에 따른 구체적인 분류는 아래 표에 제시하였다. 피타고라스 정

리의 증명들을 자세히 살펴보면 적어도 4가지 종류의 논증 방법을 사용하여 증명하는 것이 가능하다. 먼저 대수학적 증명으로 시간 개념을 포함하는 선형적 관계에 증명의 기반을 두고 있으며, 대수적 증명의 방법은 무수히 많다. 이에 따른 구체적인 분석은 다음과 같다.

대 분 류		중 분 류	
I	대 수 적 증 명	A	직각삼각형의 닮음
		B	비례중항의 원리
		C	원을 이용한 증명
		(a)	하나의 원을 이용한 증명
		①	현을 이용한 증명
		②	할선을 이용한 증명
		③	접선을 이용한 증명
		(b)	두 개의 원을 이용한 증명
		D	넓이의 비를 이용한 증명
		E	극한의 이론을 이용한 증명
		F	대수 기하학적 증명
		G	다각형을 이용한 대수 기하학적 증명

두 번째로는 기하학적 증명을 들 수 있다. 기하학적 증명은 공간 개념을 포함하는 도형의 면적 비교에 증명의 기반을 두고 있으며 기하학적 증명의 방법 역시 무수히 많다. 기하학적 증명에 따른 구체적인 분석 기준들은 다음과 같다.

대분류		중분류	
II	기하학적 증명	A	직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형이 모두 삼각형의 외부로 향한 형태
		(a)	합동인 도형의 쌍으로 분할하는 방법을 이용한 증명
		(b)	분할영역의 쌍이 같은 넓이를 가지는 동치임을 이용한 증명
		B	직각삼각형의 높이를 한 변으로 하는 정사각형이 삼각형의 내부로 향한 형태
		C	직각삼각형의 밑변을 한 변으로 하는 정사각형이 삼각형의 내부로 향한 형태
		D	직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형이 삼각형의 내부로 향한 형태
		E	직각삼각형의 높이와 밑변을 각각 한 변으로 하는 정사각형이 삼각형의 내부로 향한 형태
		F	직각삼각형의 높이와 빗변을 각각 한 변으로 하는 정사각형이 삼각형의 내부로 향한 형태

		G	직각삼각형의 빗변과 밑변을 각각 한 변으로 하는 정사각형이 삼각형의 내부로 향한 형태
		H	직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형이 모두 삼각형의 내부로 향한 형태
		I	하나 또는 그 이상의 정사각형이 변형된 형태
		(a)	h를 한 변으로 하는 정사각형의 변환
		(b)	a를 한 변으로 하는 정사각형의 변환
		(c)	b를 한 변으로 하는 정사각형의 변환
		(d)	h, a를 한 변으로 하는 정사각형의 변환
		(e)	h, b를 한 변으로 하는 정사각형의 변환
		(f)	a, b를 한 변으로 하는 정사각형의 변환
		(g)	a, b, h를 한 변으로 하는 정사각형의 변환
		J	하나 또는 그 이상의 정사각형이 생략된 형태
		(a)	정사각형으로부터 유도된 증명
		①	h를 한 변으로 하는 정사각형을 생략한 형태
		②	a를 한 변으로 하는 정사각형을 생략한 형태
		③	b를 한 변으로 하는 정사각형을 생략한 형태
		④	h, a를 한 변으로 하는 정사각형을 생략한 형태
		⑤	h, b를 한 변으로 하는 정사각형을 생략한 형태
		⑥	a, b를 한 변으로 하는 정사각형을 생략한 형태
		(b)	넓이가 같은 삼각형에 대한 계산과 비교에 근거를 둔 증명

세 번째로 방향 개념을 포함하는 벡터 연산에 증명의 기반을 두고 있는 사원수 증명과 힘의 개념을 포함하는 질량과 속도에 증명의 기반을 두고 있는 역학적 증명을 네 번째로 분류할 수 있다. 그 밖에 피타고라스 정리에 대한 호기심, 마방진, 최근의 증명까지 총 7가지로 대분류 하였다.

대 분 류	
Ⅲ	사원수 증명
Ⅳ	역학적 증명
Ⅴ	피타고라스 정리에 대한 호기심
Ⅵ	피타고라스 마방진
Ⅶ	최근의 증명

피타고라스 정리의 다양한 증명 방법들을 증명에 핵심이 되는 아이디어, 증명에 필요한 선수학습 개념, 증명에 사용된 주요 개념들을 구체적으로 분석하여 분류하였다.

핵심아이디어별 분류		선수학습별 분류		내용별 분류(주요개념)	
i1	보조선긋기	p1	도형의 넓이	1	도형의 넓이 비교
i2	도형구성	p2	도형의 닮음	2	닮음비
i3	비례중항	p3	도형의 합동	3	도형의 합동
i4	도형의 합동	p4	귀류법 개념	4	도형의 작도
i5	도형의 닮음	p5	곱셈공식	5	도형의 분할
i6	조각의 재배열	p6	원의 성질	6	보조선 긋기
i7	삼각형의 외접원	p7	벡터의 연산	7	원의 성질
i8	삼각형의 내접원	p8	극한개념	8	귀류법
i9	원의 접선과 할선의 비례 관계	p9	도형의 작도	9	곱셈공식
i10	도형의 작도	p10	평행선의 성질	10	프톨레마이오스이론
i11	극한의 이론	p11	역학의 원리	11	벡터
i12	프톨레마이오스이론	p12	삼각법	12	삼각법
i13	벡터 해석	p13	미분개념	13	역학의 원리
i14	역학의 원리	p14	마방진	14	마방진
i15	마방진	p15	평행이동	15	테셀레이션
i16	도형의 회전				
i17	빈틈없이 평면 채우기				
i18	미분 방정식				

위의 분류기준표를 바탕으로 피타고라스 정리의 390가지의 증명 과정을 대분류, 중분류, 가장 핵심이 되는 아이디어, 필요한 선수학습 개념, 사용된 주요 개념, 고안자별로 분류하여 손은해(2009)의 석사학위논문의 부록에 있는 표에 나타내었다.

표에서의 순서는 이만근과 전병기(2007)의 책 「올댓 피타고라스 정리」(경문사)에 표기된 그림의 번호를 중심으로 나타내었고, 두 가지 이상의 아이디어를 가진 경우 두 가지의 경우를 두 줄로 표기하였다. 또한 고안자(증명한 사람)는 고안자가 밝혀진 경우에만 명시하였다.

3. 핵심 아이디어 분석

다음은 손은해(2009)의 석사학위논문의 부록에 있는 표를 바탕으로 증명을 하는 데에 필요한 핵심 아이디어를 중심으로 사용빈도를 알아보고 같은 아이디어로 취급된 경우에는 구체적으로 어떠한 것들이 있는지 제시한 표이다.

사용된 핵심 아이디어	사용빈도	구체적 분석
보조선 긋기(i1)	218	연장선, 평행선, 수선, 각의 이등분선등
조각의 재배열(i6)	66	도형 분할 후 재배열, 합동인 두 직각삼각형 재배열
도형구성(i2)	47	도형의 회전, 정사각형, 직사각형, 평행사변형 구성 등
도형의 합동(i4)	32	삼각형의 합동 조건 (SSS, SAS, ASA 합동)
비례중항(i3)	22	비례중항
원의 접선과 할선의 비례 관계(i9)	19	원의 접선과 할선의 비례 관계
삼각형의외접원(i7)	6	삼각형의외접원
마방진(i15)	5	마방진
도형의 닮음(i5)	4	삼각형의 닮음 조건 (SSS, SAS, AA 닮음)
삼각형의내접원(i8)	3	삼각형의 내접원
도형의 작도(i10)	3	원의작도
역학의 원리(i14)	3	역학의 원리
극한의 이론(i11)	2	극한의 이론
프톨레마이오스정리(i12)	2	프톨레마이오스정리
벡터해석(i13)	1	벡터해석
빈틈없이 평면 채우기 (i16)	1	빈틈없이 평면 채우기
미분방정식(i17)	1	미분방정식

390가지의 다양한 증명 방법을 분석한 결과 증명을 하는 데에 핵심적으로 쓰인 아이디어를 빈도수가 큰 순서대로 나열해 보면 보조선 긋기가 핵심적 아이디어로 가장 많이 쓰였고, 조각의 재배열, 도형의 구성, 도형의 합동(7-나), 비례중항, 원의 접선과 할선의 비례 관계(9-나), 삼각형의 외접원(8-나), 마방진, 도형의 닮음(8-나), 삼각형의 내접원(8-나), 벡터(수Ⅱ), 프톨레마이오스의 정리 등을 이용하여 증명하였음을 알 수 있다.

이에 각각의 아이디어가 어떠한 방식으로 증명 방법에 핵심적인 역할을 하는지에 대해서 노희성(2008)의 석사학위논문의 내용들을 여기서 소개하고 그 밖의 몇 가지 내용을 살펴보고 각각에 내재된 수학교육학적 의미를 살펴보도록 한다.

(1) 보조선 긋기

1) 용어의 정의

보조선(補助線:auxiliary line)

도형에 관한 문제를 풀 때, 주어진 도형에 없는 직선이나 원(또는 그 일부)을 보충하여 문제해결

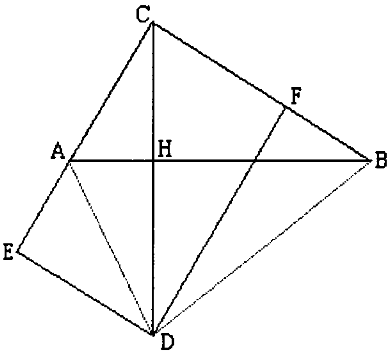
에 이용하는 일이 있다. 이와 같은 직선이나 원(또는 그들을 조합한 도형)을 일반적으로 보조선이라 한다. (박한식 외 4인 (1989) 참조)

2) 분류된 보조선의 유형

보조선의 형태에 따라 연장선, 변에 평행한 선분, 두 점을 연결한 선분, 수선, 각의 이등분선으로 나누어 볼 수 있다. 각 형태에 따른 증명 방법을 몇 가지 살펴보자.

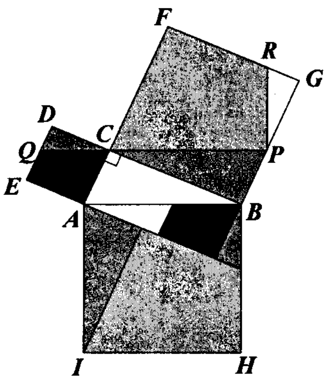
형태 1. 연장선 긋기 (국외 연구자료 #70에 해당)

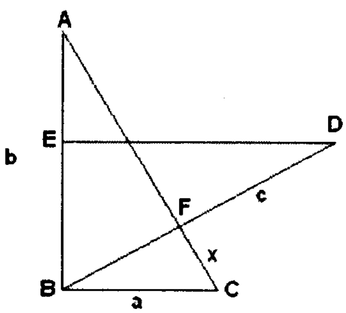
$\angle C = 90°$인 직각삼각형 CBA에서 $\overline{CB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$라고 하자. 높이 CH를 $\overline{CD} = \overline{AB}$이 되게 빗변 D로 연장한다. 이때 만들어진 사각형 $CBDA$의 넓이는 2가지 방법으로 생각할 수 있다. 첫째, $\square CBDA$의 대각선의 곱의 반인 $\frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AB} (= \frac{c^2}{2})$와 둘째, 두 개의 삼각형 CDA와 CBD의 합으로 볼 수 있다. 삼각형 CDA와 CBD의 넓이를 구하기 위하여 $\overline{AC}$에 수직인 선 $\overline{DE}$와 $\overline{BC}$에 수직인 선 $\overline{DF}$를 내린다. 그러면 삼각형 CDE와 BAC는 RHA 합동($\angle DEC = \angle ACB = 90°, \overline{CD} = \overline{BA}$, $\angle ECD = \angle CBA$)이다. 따라서, 삼각형 CDA의 넓이는 b^2이고, 삼각형 CBD의 넓이는 a^2이므로 $\frac{c^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}$, 즉, $c^2 = b^2 + a^2$ 을 얻게 된다.



형태 2. 변에 평행한 선분 긋기 (국외 연구자료 #15에 해당)

직각삼각형 CBA에 대하여 각 변의 길이를 한 변으로 하는 세 개의 정사각형을 그린다. 점 C를 지나면서 $\overline{AB}$에 평행한 $\overline{PQ}$를 그린다. 또한, $\overline{PQ}$에 수직인 $\overline{PR}$을 그린다. 그러면, 작은 두 정사각형의 조각들이 가장 큰 정사각형을 채울 수 있게 된다.





형태 3. 두 점을 연결한 선분 긋기 (국외 연구자료 #46에 해당)

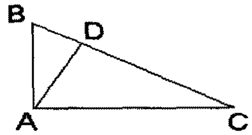
삼각형 ABC와 BED는 합동인 직각삼각형이다. 꼭지점 A와 D를 연결하면 또 다른 삼각형 ABD가 생긴다.($\overline{AB} = \overline{DE} = b$, $\overline{BC} = \overline{EB} = a$, $\overline{CA} = \overline{BD} = c$, $\overline{CF} = x$)

삼각형 ABD의 넓이를 두 가지로 생각해 보면 $\frac{c(c-x)}{2}=\frac{b^2}{2}$ 임을 알고, 삼각형 ACB와 BCF는 닮음이므로 닮음비를 이용하여$x=\frac{a^2}{c}$ 를 얻을 수 있다.

따라서, $cx=a^2$임을 넓이의 식에 대입하여 보면, $c^2=a^2+b^2$ 을 얻게 된다.

형태 4. 수선 긋기 (국외 연구자료 #6에 해당)

직각삼각형 BCA의 점 A에서 $\overline{BC}$에 수선을 그어 만나는 점을 D라고 하자.
($\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{AD}=h$, $\overline{CD}=x$, $\overline{DB}=y$)
삼각형 BCA와 BAD는 닮음이므로 닮음비를 이용하여 $c^2=ay$ 임을 알고,
삼각형 BCA와 ACD는 닮음이므로 닮음비를 이용하여 $b^2=ax$ 임을 알 수 있다.



따라서 두 식의 양변을 더하면,
$c^2+b^2=ax+ay=a(x+y)$. 즉, $a^2=b^2+c^2$ 을 얻게 된다.

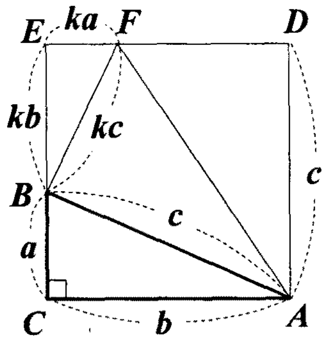
형태 5. 각의 이등분선 긋기 (교육과정평가원 자료 24에 해당)

$\angle C=90°$인 직각삼각형에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$ 라 하고, $\overline{AB}=\overline{AD}$ 인 직사각형 $CADE$ 의 $\angle BAD$ 를 이등분하는 선을 $\overline{AF}$라 하자. 삼각형 BAF와 DAF는 SAS 합동이므로,

$\angle ABF=90°$이고 $\angle ABC+\angle EBF=90°$,

$\angle ACB=90°$이고 $\angle ABC+\angle BAC=90°$이다.

따라서 $\angle EBF=\angle CAB$ 이므로 $\triangle EBF$와 $\triangle CAB$는 닮음이다. 이제, $\overline{EF}=ka$, $\overline{BE}=kb$, $\overline{FB}=kc$ 라 두면 $\overline{FD}=\overline{FB}=kc$ 이다. $b=ka+kc$ 이므로 $k=\frac{b}{a+c}$ 이고,



$c=a+kb$ 이므로 $k=\frac{c-a}{b}$ 이다.

$\frac{b}{a+c}=\frac{c-a}{b}$ 이므로 $b^2=(a+c)(c-a)$ 이다. 정리하면 $b^2=c^2-a^2$ 가 되고 따라서 $c^2=a^2+b^2$ 을 얻게 된다.

(2) 조각의 재배열

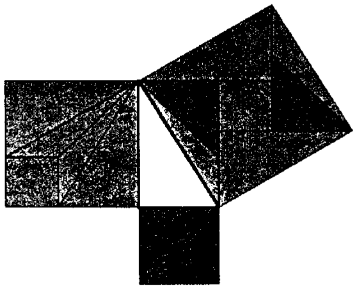
1) 용어의 정의

본 논문에서의 조각의 재배열이란 본래 하나의 도형이었던 것을 임의로 쪼개어 다른 도형을 채우는 것과 여러 개의 도형으로 하나의 도형을 이루고 있던 조각들로 또 다른 도형을 만드는 것이라고 정의하기로 한다.

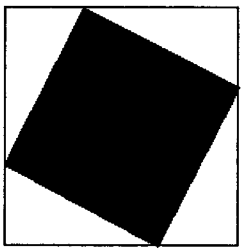
2) 분류된 조각의 재배열의 유형

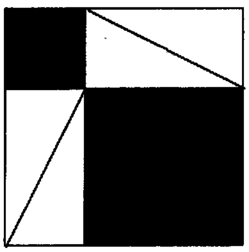
재배열의 형태에 따라 도형 채우기와 또 다른 도형 만들기로 나누어 볼 수 있다. 각 형태에 따른 증명 방법을 몇 가지 살펴보도록 한다.

형태 1. 도형 채우기 (국외 연구자료 #28에 해당)



형태 2. 또 다른 도형 만들기 (국외 연구자료 #9에 해당)





형태 3. 원의 접선과 할선의 비례관계 (국외 연구자료 #43에 해당)

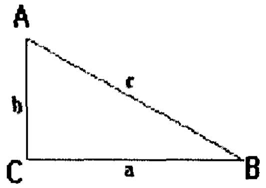
삼각형 ABC는 $\angle C = 90°$인 직각삼각형이고, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ 이다.

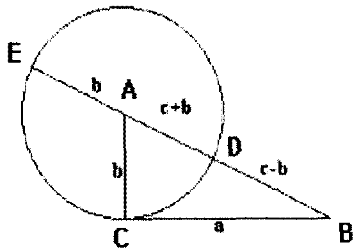
이 때, 점 A 를 중심으로 하고 $\overline{AC}$ 를 반지름으로 하는 원을 그리자.

이 원과 $\overline{BA}$ 와 그 연장선과의 교점을 각각 D, E 라 하자.

$\overline{BC}$ 는 이 원의 접선이 되므로 접선과 할선의 비례관계에 의하여 $\overline{BC}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ 이다.

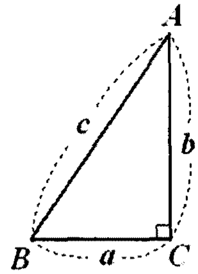
즉, $a^2 = (c-b)(c+b)$ 가 되고 따라서 $c^2 = a^2 + b^2$ 를 얻게 된다.





형태 4. 헤론의 공식 (국외 연구자료 #23에 해당)

그림에서 $\triangle ACB$는 $\angle ACB = 90°$인 직각삼각형이고, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ 이다. 이 때, 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$ 이다. 여기에 헤론의 공식($S = p(p-a)(p-b)(p-c)$, $p = (a+b+c)/2$)을 쓰면 삼각형의 넓이는



$$S = \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)\cdot\frac{1}{2}(a+c-b)\cdot\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

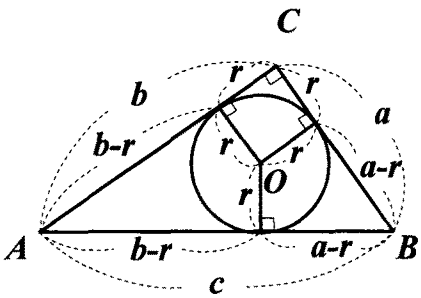
$$= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-(a^4+b^4+c^4)}$$

따라서 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-(a^4+b^4+c^4)}$ 이다.

이것을 정리하면, $c^2 = a^2+b^2$ 을 얻게 된다.

형태 5. 삼각형의 내접원 (교육과정평가원 자료 13에 해당)

$\triangle CBA$는 $\angle C = 90°$인 직각삼각형이고, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$이다. 이 직각삼각형의 내접원을 그려 그 중심을 O라 하고, 내접원의 반지름을 r 이라 하자.



$|\triangle CBA| = |\triangle OBC| + |\triangle OAB| + |\triangle OCA|$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br$$

$$ab = (a+b+c)r \quad c = (b-r)+(a-r)$$

이므로 $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$. $ab = \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c)$.

따라서 , $c^2 = a^2+b^2$ 을 얻게 된다.

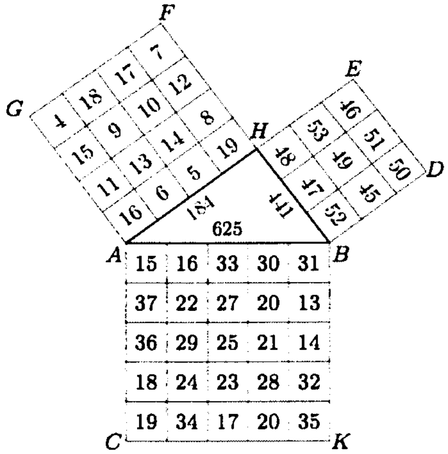
(3). 마방진

1) 용어의 정의

자연수를 정사각형 모양으로 나열하여 가로, 세로, 대각선으로 배열된 각각의 수의 합이 전부 같

아지게 만든 것이 마방진이다 (네이버 백과사전 참조).

2) 마방진을 이용한 피타고라스 정리의 증명



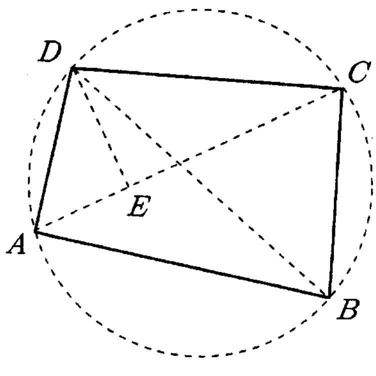
위의 그림에서 정사각형 □ACKB의 임의의 열, 행, 대각선에 기록된 수들의 합은 125이고, 전체 수들의 합은 625이다. 정사각형 □GAHF의 임의의 열, 행, 대각선에 기록된 수들의 합은 46이고, 전체 수들의 합은 184이다. 정사각형 □HBDE의 임의의 열, 행, 대각선에 기록된 수들의 합은 147이고, 전체 수들의 합은 441이다. 그러므로 마방진이 된다: □ACKB(625)=□GAHF(184)+□HBDE(441).

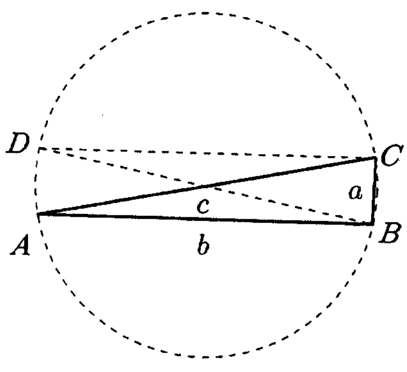
(4)프톨레마이오스정리

1) 용어의 정의

양선영(2004)의 논문에 있는 프톨레마이오스정리에 따르면, 만약 사각형 □ABCD가 임의의 원에 내접하고 있는 사각형이면, $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$이 성립한다.

2) 프톨레마이오스정리를 이용한 피타고라스 정리의 증명





첫 번째 그림에서 ∠CDE=∠ADB가 되도록 선분 $\overline{DE}$를 그으면, △ADB와 △CDE는 닮은 삼각형이 된다. 마찬가지로 △BCD와 △ADE도 닮은 삼각형이 된다. 이 두 쌍의 닮은 삼각형들로부터 $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$의 관계가 성립한다. 두번째 그림에서 □ABCD가 직사각형이 되는 경우라면,

$$\overline{AC}=\overline{BD}, \overline{BC}=\overline{AD}, \overline{AB}=\overline{CD}.$$

따라서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$이다. 그러므로 이와 같이 프톨레마이오스정리의 특별한 경우는 피타고라스의 정리에 대한 증명을 제공한다.

선행연구결과들에 대한 핵심 아이디어 분석은 이미 앞 절에서 상세하게 밝힌 바 있다.

4. 선수학습개념 분석

다음은 손은해(2009)의 석사학위논문의 부록에 있는 표를 바탕으로 증명을 하는 데에 필요한 선수학습개념을 중심으로 사용빈도를 알아보고 같은 아이디어로 취급된 경우는 구체적으로 어떠한 것들이 있는지 제시한 표이다.

사용된 선수 학습 개념	사용빈도	구체적 분석
도형의 넓이 (p1)	286	도형(삼각형, 사각형)의 넓이
도형의 닮음 (p2)	57	삼각형의 닮음 조건 (SSS, SAS, AA 닮음)
평행선의 성질 (p10)	39	평행선의 성질, 평행사변형의 성질, 법clr
곱셈공식 (p5)	26	곱셈공식
원의 성질 (p6)	22	원의 접선과 할선의 비례 관계, 원주각과 중심각등
도형의 합동 (p3)	20	삼각형의 합동 조건 (SSS, SAS, ASA 합동)
벡터의 연산(p7)	7	벡터의 연산
마방진(p14)	5	마방진
극한개념 (p8)	3	극한개념
평행 이동 (p15)	3	평행이동
귀류법 개념 (p4)	2	귀류법 개념
역학의 원리 (p11)	2	역학의 원리
삼각법(p12)	2	삼각법
미분 개념 (p13)	2	미분 개념
도형의 작도 (p9)	1	도형의 작도

390가지의 다양한 증명 방법을 분석한 결과 증명을 하는 데에 필요한 선수학습개념을 빈도수가 큰 순서대로 나열해 보면 도형(삼각형, 사각형)의 넓이(5-나)가 가장 많았고, 도형의 닮음(8-나), 평행

사변형의 성질(8-나), 곱셈공식(9-가), 원의 성질(9-나), 삼각형의 합동조건(7-나), 벡터(수II), 도형의 평행이동(10-나)등을 미리 학습하여야 하는 개념임을 알 수 있다.

이에 각각의 학습개념들을 명확히 정의할 필요성을 가지게 된다. 이 개념들 중 노희성 (2008)의 논문에 나온 것들은 아래와 같은 것이다. 피타고라스 정리를 증명하는 데에 필요한 선수학습개념을 빈도수가 큰 순서대로 나열해 보면 도형(삼각형, 사각형)의 넓이 공식, 삼각형의 닮음, 삼각형의 합동조건, 평행사변형의 성질, 기타(곱셈 공식, 지수 법칙, 헤론의 공식)등으로 볼 수 있다. 이에 각각의 학습개념들을 명확히 정의할 필요성을 가지게 되어 아래에 기술하였다.

(1) 도형의 넓이 공식

1) 삼각형의 넓이

위의 증명들에서는 형태 1, 2, 5만을 사용하였으나 다른 조건들에 의해 삼각형의 넓이를 구하는 여러 가지 방법들을 정리해 보았다.

형태 1. 삼각형의 밑변(a)과 높이(h)를 이용: 삼각형의 넓이 = $\frac{1}{2}ah$

형태 2. 삼각형의 세 변의 길이(a, b, c)와 내접원의 반지름(r)을 이용

삼각형의 넓이 = $\frac{1}{2}r(a+b+c)$

형태 3. 삼각형의 세 변의 길이(a, b, c)와 외접원의 반지름(R)을 이용

삼각형의 넓이 = $\frac{abc}{4R}$

형태 4. 삼각형의 두 변(a, b)과 그 끼인각(C)을 이용

삼각형의 넓이 = $\frac{1}{2}absinC$

형태 5. 삼각형의 세 변의 길이(a, b, c)를 이용(헤론의 공식)

삼각형의 넓이 = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$

형태 6. 좌표평면 위의 세 점((x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3))의 위치를 이용

삼각형의 넓이 = $\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_2-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3|$

2) 사각형의 넓이

국외자료와 선행연구결과들, 이만근과 전병기(2007)의 증명들에서는 형태 1, 2, 3만을 사용하였으나 다른 사각형의 넓이를 구하는 방법들도 정리해 보았다.

형태 1. 사다리꼴의 넓이(윗변:a, 아랫변:b, 높이:h) = $\frac{(a+b)h}{2}$

형태 2. 평행사변형의 넓이(밑변:a, 높이:h)

평행사변형의 넓이 = ah

형태 3. 직사각형의 넓이(가로:a, 세로:b)

직사각형의 넓이 = ab

형태 4. 마름모의 넓이(한 대각선의 길이:a, 다른 한 대각선의 길이:b)

마름모의 넓이 = $\frac{1}{2}ab$

(2) 삼각형의 닮음조건[6]

$\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$는 다음 조건 중 하나가 성립되면 닮은꼴이다.

형태 1. 두 쌍의 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때.

형태 2. 3쌍의 변의 길이의 비가 같을 때.

형태 3. 두 쌍의 대응되는 각의 크기가 각각 같을 때.

(3) 삼각형의 합동조건

삼각형 ABC와 삼각형 $A'B'C'$는 다음 조건 중 하나가 성립되면 합동이다.

형태 1. 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때(SSS 합동).

형태 2. 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때(SAS 합동).

형태 3. 대응하는 한 변의 길이가 같고 그 양 끝 각의 크기가 같을 때(ASA 합동).

한인기외 3인(2002)은 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 수학과 교육과정에 상응하도록 배열하였다. 즉, 중학교 2학년에서 다루는 삼각형의 합동을 이용한 증명 방법, 도형의 닮음을 이용한 증명 방법, 중학교 3학년에서 다루는 곱셈 공식을 이용한 증명 방법, 원의 성질을 이용한 증명 방법 순으로 제시하고, 각 증명 방법마다 관련된 수학적 개념이나 아이디어를 추출하여 기술하였다. 이 절에서는 중학교 2학년에서 다루는 내용을 보다 더 세분화하여 삼각형의 넓이, 사각형의 넓이, 삼각형의 닮음 조건, 삼각형의 합동조건 등의 선수 개념들에 대해 간단하게 설명하였다.

5. 주요개념 분석

다음은 손은해(2009)의 석사학위논문의 부록에 있는 표를 바탕으로 증명을 하는 데에 필요한 주요 개념을 중심으로 사용빈도를 알아보고 같은 아이디어로 취급된 경우는 구체적으로 어떠한 것들이 있는지 제시한 표이다.

사용된 주요 개념	사용빈도	구체적 분석
도형의 넓이 비교 (1)	238	한 도형을 여러 가지 방법으로 넓이 구하여 비교하기
도형의 분할 (5)	134	도형의 분할
도형의 합동 (3)	120	삼각형의 합동 조건 (SSS, SAS, ASA 합동)
닮음비 (2)	65	삼각형의 닮음 조건 (SSS, SAS, AA 닮음)

도형의 작도 (4)	8	원의작도
벡터 (11)	6	벡터
마방진(14)	5	마방진
곱셈공식(9)	3	곱셈공식
보조선 긋기(6)	2	연장선, 평행선, 수선, 각의 이등분선등
원의 성질 (7)	2	원의 접선과 할선의 비례 관계, 원주각과 중심각등
귀류법(8)	2	귀류법
프톨레마이오스이론(10)	2	프톨레마이오스이론
삼각법(12)	2	삼각법
역학의 원리 (13)	2	역학의 원리
테셀레이션 (15)	1	테셀레이션

390가지의 다양한 증명 방법을 분석한 결과 증명을 하는 데에 필요한 주요 개념을 빈도수가 큰 순서대로 나열해 보면 넓이 비교(한 도형을 여러 가지 방법으로 넓이 구하여 비교하기)가 가장 많이 사용되었고, 도형의 분할, 도형의 합동(7-나), 도형의 닮음(8-나), 도형의 작도(7-나), 벡터(수II), 보조선 긋기, 테셀레이션, 기타 등이 사용되었음을 알 수 있다.

이에 각각의 주요 개념들 중 넓이 비교와 도형의 분할의 관한 내용들은 노희성 (2008)의 논문에 자세히 설명되어 있지만 본 논문의 자체 완성도를 높이기 위해 설명을 첨가하였다..

(1) 넓이 비교

국외 자료와 교육과정평가원의 피타고라스 정리의 대부분 증명들은 한 개의 도형을 여러 개의 도형의 합으로 생각하여 조합하는 방법에 따라 다르게 넓이를 구하여도 전체 합은 같다는 방식을 사용하여 증명하였다.

(국외 연구자료 #5에 해당)

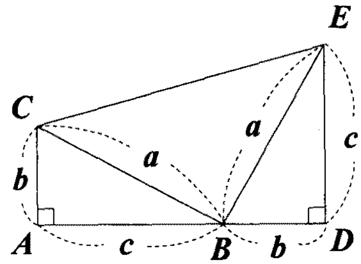
그림에서 삼각형 CBA는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이다. $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ 라고 하자. 여기에 삼각형 CBA와 합동인 삼각형 EDB를 그리면, 사각형 $EBAC$는 사다리꼴이 된다. 그러면, 사다리꼴의 넓이 = 삼각형 CBA + 삼각형 EDB + 삼각형 EBC 의 넓이이므로

$$\frac{1}{2}(b+c)(b+c) = 2\times\frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\frac{1}{2}(b^2+2bc+c^2) = bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\frac{1}{2}(b^2+c^2) = \frac{1}{2}a^2$$

따라서, $a^2 = b^2 + c^2$ 이 된다.

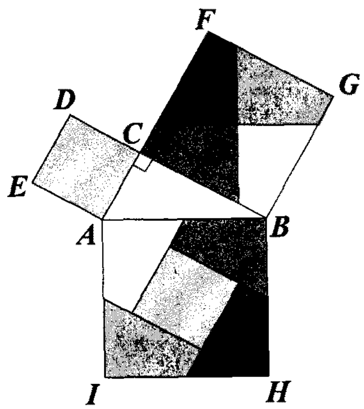


(2) 도형의 분할

앞서 핵심 아이디어에서 설명하였던 조각의 재배열 중 본래 하나의 도형이었던 것을 임의로 쪼개어 다른 도형을 채우는 것으로 언급하였던 부분과 상응한다고 볼 수 있다.

(국외 연구자료 #14에 해당)

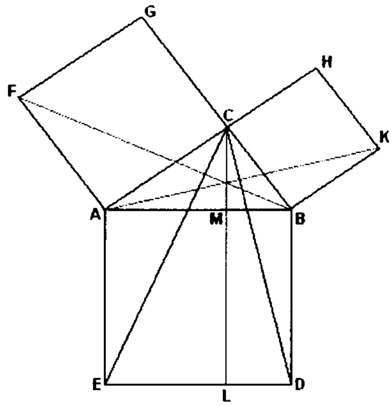
가장 작은 정사각형은 그대로 두고, 중간 정사각형을 네 개의 합동인 사각형으로 분할하여 가장 큰 정사각형 $ABHI$ 에 채우는 것이다.



6. 도형 분석

선행 연구결과들을 분석한 위의 표들을 바탕으로 증명을 하는 데에 필요한 기본 도형 중 가장 많이 쓰인 그림은 'Bride's Chair' 라고 이름지어지는 아래의 그림이다. <표 I -1>에서 'Bride's Chair'를 이용한 증명은 #1, #12, #14, #15, #16, #28, #35, #36, #37, #62, #65, #66, #72이다. 본 절에서는 이 중 #1, #16, #28을 제시하도록 한다.

(1) 국외 연구자료 #1



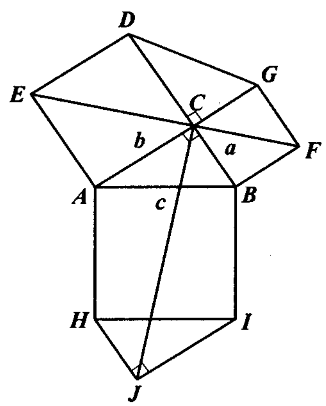
$\overline{AE}=\overline{AB}=c, \overline{AF}=\overline{AC}=b$, $\angle BAF=\angle BAC+\angle CAF=\angle CAB+\angle BAE=\angle CAE$ 이므로 삼각형 ABF와 AEC는 SAS 합동이다.

삼각형 ABF의 넓이는 사각형 $ACGF$의 넓이의 반이고, 삼각형 AEC의 넓이는 사각형 $AELM$의 넓이의 반이다. 따라서, 사각형 $GCAF$와 $AELM$의 넓이는 같음을 알 수 있다. $\overline{BD}=\overline{BA}=c$, $\overline{BC}=\overline{BK}=a$, $\angle ABK=\angle ABC+CBK=\angle CBA+\angle ABD=\angle DBC$이므로 삼각형 ABK와 DBC는 SAS 합동이다.

또한, 삼각형 ABK의 넓이는 사각형 $HKBC$의 넓이의 반이고, 삼각형 DBC의 넓이는 사각형 $BDLM$의 넓이의 반이다. 따라서, 사각형 $HKBC$와 $BDLM$의 넓이는 같음을 알 수 있다. 즉, $\square GCAF+\square HKBC=\square AELM+\square BDLM=\square BDEA$ 이 되어 $a^2+b^2=c^2$ 임을 알 수 있다.

(2) 국외 연구자료 #16

위의 도형에서 삼각형 CBA는 $\angle ACB=90°$인 직각삼각형이다. $\square ABIH$는 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형이고, $\square ACDE$는 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형이고, $\square BCGF$는 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형이므로 세 개의 삼각형 ABC, DGC, IHJ 은 합동이다. 그러므로 육각형 $EABFGD$, $CAHJIB$ 은 합동이다.



$\square ACED+\square BCGF$ = 육각형 $EABFGD-\triangle ABC-\triangle DCG$

$\square ABIH$ = 육각형 $CAHJIB-\triangle ABC-\triangle IHJ$

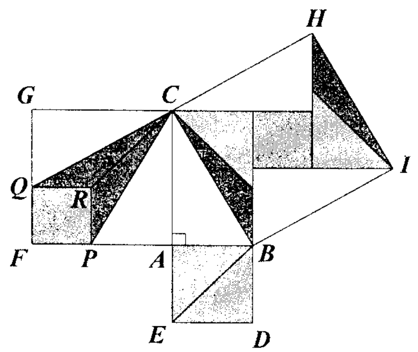
$\square ACED+\square BCGF=\square ABIH$ 이다.

즉, $c^2=a^2+b^2$ 이다.

(3) 국외 연구자료 #28

정사각형 $ABDE$는 대각선을 그려 두 조각으로 나눈다. $\overline{FP}=\overline{AC}-\overline{AB}$인 정사각형 $FPRQ$를 그린 후, $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$, $\overline{CR}$을 그리면 정사각형 $ACGF$는 다섯 조각으로 나뉜다.

정사각형 $ABDE$와 정사각형 $ACGF$의 일곱조각으로 정사각형 $BCHI$를 채울 수 있다.



7. 테셀레이션

이제부터는 도형 단원 교수-학습에서 피타고라스 정리의 증명을 효과적으로 활용하는 또 다른 방안인 테셀레이션에 관한 내용만 언급할 것이다.

1) 용어의 정의

테셀레이션(tessellation)이란 마루나 욕실 바닥에 깔려 있는 타일처럼 어떠한 틈이나 포개짐이 없이 평면이나 공간을 도형으로 완벽하게 덮는 것을 말한다. 테셀레이션은 역사 속에서 흔히 볼 수 있는데 기원전 4세기에 이슬람 문화의 벽걸이 융단, 가구의 타일, 건축물에서 찾아 볼 수 있다. 또한 이집트, 무어 인, 로마, 페르시아, 그리스, 일본, 중국에서도 발견된다. 우리 일상생활 속에서도 흔히 볼 수 있는데, 길거리의 보도블럭이나 거실, 목욕탕의 타일, 상품의 포장지 문양 등 수없이 많다. 테셀레이션은 우리에게 단지 예술적인 아름다움만은 주는 것은 아니며 그 속에는 무한한 수학적인 개념과 의미가 들어 있어 흥미 있게 도형의 각의 크기, 대칭과 변환, 합동 등을 학습할 수 있게 해 준다.

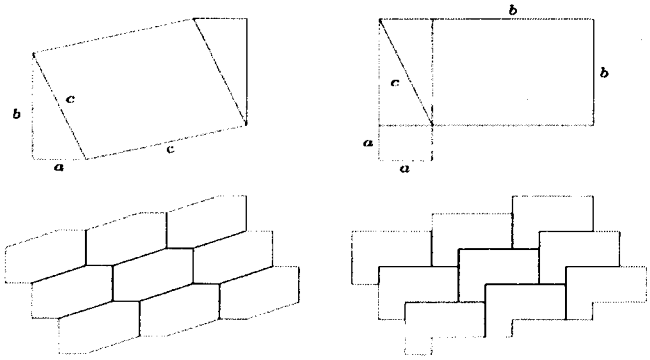
정다각형은 3개, 4개, 5개 또는 더 많은 수의 변과 각들이 모두 같은 도형이다. 정통의 테셀레이션은 이런 정다각형들로 만들어진다. 그런데 평면에서는 오직 3개의 다각형들로만 정통 테셀레이션을 만들 수 있다. 삼각형, 사각형, 육각형이 그것인데 그 외에는 불가능하다는 것을 증명하기는 쉽다. 역사 속에 나타난 여러 디자인들을 살펴보면 전통적인 의미에서의 테셀레이션은 어떠한 변형도 허용되지 않는 오직 정다각형들로만 이루어져 있다. 즉, 정육각형, 정사각형, 정삼각형이 그 것이다. 그러나 테셀레이션이 에셔에 의해 하나의 예술 장르가 되면서 어떠한 도형도 테셀레이션이 가능함을 보여준다. 현대의 테셀레이션은 동일한 도형의 단순 반복이 아니라 대칭이나, 회전, 반사 등의 수학적 원리

를 사용하여 좀 더 다양한 반복을 시도하게 되었다.

테셀레이션은 1960년대부터 미국에서 교육과정의 일부분이 되어 다양한 수준에서 변환의 기하학을 쉽고 재미있게 소개하는 교육과정의 일부분으로 다루어지고 있다. 여러 방법의 테셀레이션 활동은 학생들이 많은 수학적 개념-대칭과 변환-들과 만나고, 개념들을 통합하고 복습할 수 있게 해준다. 또한 이러한 테셀레이션 활동은 예술적 창조와 기하학적 탐구를 가능하게 한다. (홍춘희(2003)의 논문 참조)

2) 테셀레이션을 이용한 피타고라스의 정리의 증명

다음 그림에서 두 개의 육각형은 넓이가 같으며, 직관적으로 피타고라스의 정리가 성립함을 알 수 있다. 애플릿을 사용하여 다음 그림과 같은 연속된 모자이크 무늬를 만들 수 있다.



이러한 테셀레이션을 도형 단원 교수-학습에서 피타고라스 정리의 증명을 효과적으로 활용하는 또 다른 방안으로 제시할 수 있다. 이는 실생활과 연계되는 시도로 수학적 재능이 있는 학생들뿐만 아니라 피타고라스 정리의 연역적 증명을 어려워하는 학생들에게 흥미를 유발하는 자료가 될 것이다.

위의 아이디어들에 사용된 내용을 종합적으로 살펴보면, 피타고라스 정리는 9-나 과정에서 학습하게 되는 것으로 사용된 아이디어들을 수학과 교육과정 단계와 연결 지어 살펴보면 대부분의 방법들이 선행 학습 없이도 증명 가능하다는 것을 알 수 있었다. 이러한 분석을 통하여 수학적으로 문제를 해결하는 방법은 하나가 아니고, 여러 가지일 수 있다는 것을 알 수 있었고, 수학에서 어떤 것에 대한 '증명'은 반드시 관련 사실들을 더 많이 알거나 선행 개념을 알아야만 할 수 있다는 것이 아니라는 결론을 지을 수 있게 된다.

III. 결론 및 제안

학생들의 수학적 사고력 신장과 관련하여 도형 단원이 가지는 중요성을 생각한다면, 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에 대한 학습은 학생들의 수학적 사고력 신장을 위한 효과적인 주제가 될 것이다. 특히 이러한 다양한 증명 방법에 내재된 수학적 아이디어를 체계로 가지는 자료를 만드는

것은 학생들의 학습을 도울 수 있을 것이다.

본 연구에서는 이러한 피타고라스 정리의 증명에 내재된 수학적 아이디어를 고찰하여 새로운 시각으로 피타고라스 정리를 학습할 기회를 제공하고자 하였고, 여기에 사용된 수학적 아이디어를 다른 증명에서의 활용으로 연결시키고자 하였다. 이러한 연구 목적을 달성하기 위해 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다. (노희성(2008)의 석사학위논문 참조)

(1) 피타고라스 정리의 다양한 증명에 사용된 핵심 아이디어, 선수학습개념, 주요 개념에는 어떠한 것들이 있고 가장 많이 사용된 방법은 무엇인가?

(2) 각각의 증명에 사용된 아이디어들은 수학교육학적으로 어떠한 의의를 갖는가?

(3) 도형 단원 교수-학습에서 피타고라스 정리의 증명을 효과적으로 활용할 수 있는 방안은 무엇인가?

이와 같은 연구 문제의 이론적 근거를 마련하기 위하여 본 논문의 Ⅱ장 1, 2절에서는 피타고라스 정리의 390가지의 증명방법이 실려 있는 이만근과 전병기(2007)의 책 「올댓 피타고라스 정리」과 노희성(2008)의 석사학위논문과 교육과정평가원의 자료를 중심으로 하여 피타고라스 정리의 다양한 증명방법을 분석하였다. 또한 이 자료를 바탕으로 다양한 증명 방법 안에 나타난 핵심 아이디어, 선수학습개념, 주요 개념들이 어떤 것인지를 제시하였다.

이와 비교하여 한인기 외 3인(2002)의 논문의 결론 부분에서는 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 네 가지 범주(삼각형의 합동을 이용한 증명 방법, 닮음을 이용한 증명 방법, 다항식의 곱셈공식을 이용한 증명 방법, 원의 성질을 이용한 증명 방법)로 나누어 제시하였으며, 몇 가지 증명에 대해서는 서로의 관련성을 제시하였다. 그리고, 제시된 다양한 증명을 학생들이 학습하는 과정에서 중학교 도형 단원의 핵심적 아이디어인 평행선의 성질, 삼각형의 합동, 도형의 닮음, 원의 성질을 종합적으로 이해할 수 있다고 하였다. 본 논문에서는 이만근과 전병기의 책에 나와 있는 여러 가지 다양한 증명 방법의 분석표에서 보다 상세하게 분류하여 증명을 제시하였다. 즉, 대수적 증명, 기하학적 증명, 사원수 증명, 역학적 증명 등으로 분류를 하여 각 증명 방법에 쓰인 핵심 아이디어, 선수 학습 개념, 주요 개념 등에 대해 언급하였다. 물론 노희성(2008)의 석사학위논문과 교육과정평가원의 자료들에 대해서도 같은 분류 기준으로 각 증명 방법에 대한 것을 설명하여 놓았다.

본 연구의 본론에 근거하여 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다. 첫째, 피타고라스 정리의 다양한 증명에 가장 많이 사용된 핵심 아이디어는 보조선 긋기이고, 선수학습개념은 도형의 넓이가 필요하였으며 주요 아이디어는 넓이 비교(한 가지 도형을 두 가지 방법으로 넓이 구하기)임을 알 수 있었다. 둘째, 각각의 증명에 사용된 아이디어들을 알아봄으로써 도형 단원에서 피타고라스 정리의 증명을 효과적으로 활용하는 한 방안으로 피타고라스 정리의 다양한 증명들을 바탕으로 증명의 체계화를 구성할 수 있다. 셋째, 도형 단원 교수-학습에서 피타고라스 정리의 증명을 효과적으로 활용하는 방안으로 피타고라스 정리의 증명을 통한 테셀레이션을 제시할 수 있다.

본 연구의 위와 같은 결과들로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 피타고라스 정리의 다양한 증명에 사용된 아이디어를 제시함으로써 피타고라스 정리와 수학의 여러 영역들 사이의 관련성을 알 수 있고 증명들 사이의 관계를 도출할 수 있을 것이다. 이러한 다양한 증명 방법의 학습은 수학적 사고력의 성장을 도울 수 있으며, 수학 문제는 한 가지 방법으로만 해결된다는 학생들의 고정관념을 깨고 스스로 다양한 접근 방법을 모색할 수 있도록 할 수 있다.

둘째, 증명들 사이의 관계성을 도출하여 피타고라스 정리의 증명을 체계화시킴으로써 도형 영역에서 증명을 학습하는 학습자로 하여금 증명의 단계를 밟아가면서 보조선의 아이디어를 제공하고 더 나아가 학습자 스스로 증명하는 즐거움을 경험할 수 있다.

셋째, 피타고라스 정리의 증명을 실생활과 연계시키는 시도로 테셀레이션을 제시함으로 수학적 재능이 있는 학생들뿐만 아니라 피타고라스 정리의 연역적 증명을 어려워하는 학생들에게 흥미를 유발하는 자료가 될 것이다.

본 연구는 한인기 외 3인(2002)이 제기한 후속 연구에 대한 언급을 만족한다고 볼 수 있다. 즉, 한인기 외 3인(2002)의 논문에서 추출된 수학적 아이디어를 이용한 체계적인 문제나 학습 자료를 개발할 때 본 논문에서 제시된 보다 다양한 증명 방법을 이용하면 학습자 스스로 학습이 가능한 자료, 흥미를 제공하는 자료, 체계화된 자료를 만들 수 있다고 생각이 된다. 이러한 자료들은 Alex Bogomolny(2008)의 홈페이지 http://www.cut-the-knot.org를 방문하면 쉽게 얻을 수 있고, 또한 다양한 동영상 자료나 GSP 관련 자료도 얻을 수 있다. 또한 II장에서 언급한 피타고라스정리의 증명에 사용되어진 도형들의 분석을 통해 다양한 학습 자료를 얻을 수 있다.

이렇게 얻어진 자료들은 제7차 교육과정에 따른 수학교과서 <9-나> 피타고라스 정리 단원을 중심으로 다양한 탐구활동의 소재로 쓰일 수 있을 것이다. 물론 기존의 교과서들에도 이미 피타고라스정리 관련 다양한 탐구활동들이 수록되어져 있는 것을 알 수 있다. (이진경(2007)의 석사학위논문 참조)

참 고 문 헌

김민정 (2004). 피타고라스 정리의 증명법 고찰, 제주대학교 교육대학원 석사학위논문.

노희성 (2008). 피타고라스 정리의 다양한 증명들에 내재된 수학교육학적 아이디어 분석, 한국외국어대학교 교육대학원 석사학위논문.

박한식·박을용·김치영·조병하·정지호 공저 (1989). 수학사전, 한국사전연구원.

손은해 (2009). 피타고라스 정리의 다양한 증명방법 분석 - Loomis의 책에 게재된 367가지 방법을 중심으로 -, 한국외국어대학교 교육대학원 석사학위논문.

양선영 (2004). 피타고라스 정리의 증명에 대한 연구, 목포대학교 교육대학원 석사학위논문.

이만근 · 전병기 (2007). 올댓 피타고라스 정리, 경문사.

이진경 (2007). 제7차 교육과정에 따른 수학교과서의 탐구활동 분석 -<9-나> '피타고라스의 정리' 단원을 중심으로, 한국외국어대학교 교육대학원 석사학위논문.

한인기, 이경언, 홍춘희, 최은주 (2003). 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 13(2). pp.245-263.

홍춘희 (2003). 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법과 교육적 활용, 한국교원대학교 대학원

교육과정평가원 (2009). http://www.kice.re.kr

Alex Bogomolny (2008). http://www.cut-the-knot.org

E. S. Loomis (1968). The Pythagorean Proposition, NCTM

네이버 백과사전

Analysis of various proofs of Pythagorean theorem

Kim, Young Rock, Noh, Hee Sung & Son, Eun Hae

Department of Mathematics Education, Graduate School of Education, Hankuk University of Foreign Studies, 270 Imun-dong, Dongdaemun-gu, Seoul, 130-791, Korea

E-mail : rocky777@hufs.ac.kr, stophs00@hanmail.net, foosson@hanmail.net,

Pythagorean theorem is one of mathematical contents which is widely used during human culture have developed. There are many historial records related to Pythagorean theorem made by Babylonian, Egyptian, and Mesopotamian. The theorem has the important meaning for mathematics education in secondary school education. Along with the importance of the proof itself, diverse proof methods and ideas included in their methods are also important since the methods improve students' ability to think mathematics.

Hence, in this paper, we classify and analyze 390 proof methods published in the book "All that Pythagorean theorem" and other materials. Based on the results we derive educational meaning in mathematics with respect to main idea of the proof, the preliminaries of the study, and study skills used for proof.

* ZDM Classification : E53

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D10

* Key Words : Pythagorean theorem, Mathematics educational idea