韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 3호, 2009. 9. 761-783

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 3, Sep. 2009. 761-783

5·6학년 학생들의 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 과정 분석

윤 민 지 (한국교원대학교 대학원)
방 정 숙 (한국교원대학교)

본 논문은 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 문제해결과 관련하여 제7차 교육과정 분석에서 논의되었던 계열성 측면에서 초등과 중등 수학에서 다루어지는 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 과정에서 학생들이 보이는 특성을 면밀하게 탐색하였다. 분석 결과 초등학교 학생들은 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 경험 및 학습의 차이가 있음에도 불구하고 성취도와 선호하는 전략에 있어서 학년 간 차이가 크게 나타나지 않았다. 또한, 초등학교 학생들은 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결에서 전략들 사이의 연결, 예상과 확인 전략의 효율적인 사용, 자연스러운 대수식 표현의 특징을 보였다. 본 연구는 초등학교 학생들의 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 사례를 바탕으로 초등과 중등의 연계성을 찾을 수 있는 문제해결 지도에 대한 시사점을 제공한다.

I. 서 론

수학과 교육과정에서의 문제해결에 대한 관심과 실천적 강조는 20여년 가까이 국내외에서 지속되어 왔다. 최근의 연구에서는 문제해결 전략 및 문제해결 과정을 제시하는 차원에서 벗어난 심층적인 연구들(예, 장혜원, 2002; 황우형·김경미, 2008; Covi, Ratcliffe, Luninski, & Warfield, 2006)을 찾을 수 있다.

한편 교육과정상에 강조된 문제해결력을 집중적으로 조명한 연구들이 있다. 박교식(2001)은 제6차 교육과정과 비교했을 때 제7차 교육과정에서 문제해결전략을 명시적으로 언급하고 있고 문제 만들기가 상당히 강화되었으나, 문제해결 내용이 유기적으로 제시되지 않았으며 구체적인 지도 방안과 교사의 역할 등과 같은 최근 연구 결과가 반영되지 못했음을 지적했다. 방정숙과 김상화(2006)는 제7차 및 개정 교과용 도서 분석 연구에서 4-나 단계부터의 구성이 차별화되어 있지 않고, 문제해결에 관련된 몇 과제들이 특별한 연계성이나 난이도의 고려 없이 반복된다는 문제점을 밝혔다. 이와 같은 맥락에서 초등학교에서의 문제해결 지도와 직접적으로 관련된 '문제 푸는 방법 찾기' 단원을 분석한 결과

* 접수일(2009년 7월 9일), 게재확정일(2009년 8월 25일)
* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 문제해결, 문장제, 이원일차연립방정식

"구슬이 4개씩 들어 있는 주머니와 3개씩 들어 있는 주머니가 모두 20개 있습니다. 구슬을 모두 세어 보니 65개입니다. 구슬이 3개씩 들어 있는 주머니는 몇 개입니까?(교육과학기술부, 2008a, p.116)"와 같은 이원일차연립방정식 형태의 문장제가 4-나 단계부터 6-나 단계까지 지속적으로 반복되어 있다.

이원일차연립방정식 형태의 문장제는 중학교에서 연립방정식으로 쉽게 해결할 수 있는 대수 문제이지만, 초등학교에서는 예상과 확인 또는 표 만들기와 같은 문제해결 전략을 이용하여 지도하고 있다. 초등에서의 문장제 해결 경험이 중등의 연립방정식 학습에 중요한 디딤돌이 되어야하나 실제적으로 그런 연결이 강조되지 못하는 경우가 많다. 이에 초등과 중등의 연결성을 강화하는 방안으로 가감법의 아이디어를 담고 있는 그림그리기 전략을 도입한 선행 연구가 있다(권석일 · 임재훈, 2007). 하지만, 이 연구는 6학년 학생 한 명만을 대상으로 초등의 문제해결전략과 중등의 방정식 풀이를 연결하기 위한 실험 수업을 진행한 정도이다.

이와 같은 연구 배경을 바탕으로, 본 논문은 문제해결과 관련하여 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 초등학교 학생들이 어떤 전략을 사용하여 어느 정도 해결하는지, 문제해결 과정에서 겪는 어려움 및 문장제 해결 특성이 무엇인지 탐색하고 이에 근거하여 지도 방향에 대한 시사점을 제공하고자 한다. 이를 위해 구체적으로 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

- 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 해결하는 5, 6학년 학생들의 성취도와 전략 선호도는 어떻게 나타나는가?
- 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 해결하는 5, 6학년 학생들의 문제해결 특성은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 이원일차연립방정식 형태의 문장제

가. 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 관련 선행연구

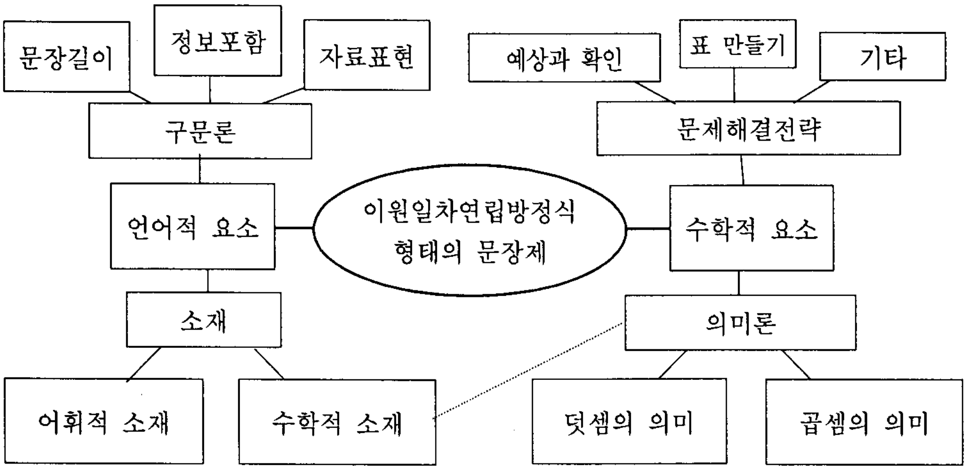
이원일차연립방정식 형태의 문장제의 예로 전평국 외(2002)는 중국의 '손자산경'이라는 책의 "꿩과 토끼가 광주리 속에 있다. 머리의 수는 35이고, 다리의 수는 94이다. 꿩과 토끼는 각각 몇 마리씩 있는가?"라는 문제와 풀이를 소개하고 있다(p.59). 동물이 절반의 다리를 들고 있다는 상황(94÷2=46)을 가정하면, 꿩은 다리 1개로 서 있기 때문에 머리수는 한 번 세어진 것이고, 토끼는 다리 2개로 서 있으므로 머리수가 두 번 세어진 것과 같게 된다. 절반의 다리 수 46에서 머리수 35를 빼면 토끼의 수가 되고, 머리수에서 토끼의 수를 빼면 꿩의 수가 되는 해법을 제시하고 있다. Polya(1981)는 이원일차연립방정식 형태의 문장제 접근 방법으로 암중모색(묘책 없이 해 가는 방식), 반짝이는 아이디어(손자산경의 문제해결과 동일), 대수를 이용한 풀이, 일반화, 비교를 제시하고 있다. 또한, 초등학교

1~5학년 학생들이 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 구체물을 통해 실제로 해보기, 그림 그리기, 예상과 확인, T-chart(T자 형의 도표 왼쪽에 방정식의 미지수에 해당하는 그림이나 수를 적고, 오른쪽에는 방정식 계산 결과를 표현한 그림), 표 만들기 등을 이용한 학생들의 문제해결 방법들을 토대로 수업사례를 소개한 경우도 있다(Kim, 2003; Mann, 2002, 2003; Robert, 2002; Wiest, 2008).

나. 문장제 이해를 위한 선행 연구

문장제 유형 및 그 구성요소가 문제해결에 영향을 미친다고 주장한 선행 연구가 있다. 김성준과 김한나(2006)는 6학년 학생들이 자주 접하지 못하는 문제 유형 가운데 문제해결전략이 생소한 경우 문제해결에서 성공하는 비율이 낮았으며, 연산의 종류 및 연산 구조의 차이가 문장제 해결에 영향을 미친다고 분석했다. 이원일차연립방정식 형태의 문장제의 구성요소를 간략하게 살펴봄으로써, 학생들의 문제해결에서 나타나는 어려움과 특성을 파악하는 본 연구의 이해를 돕고자 한다.

선행 연구를 바탕으로 교과용 도서에 있는 이원일차연립방정식 형태의 문장제 분석을 위해 언어적·수학적 요소를 도식화하면 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 문장제 분석을 위한 도식

'손자산경'의 문장제를 구문론 측면에서 살펴보면, 3개의 문장으로 구성되어 있고 불필요하거나 불충분한 정보가 포함되어 있지 않다. 소재 측면에서 보면 꿩과 토끼의 머리와 다리수로 실생활 소재를 그대로 사용했다. 의미론 측면에서 보면, 곱셈과 덧셈이 함께 포함된 2단계 이상의 다단계 연산 구조의 문제이다. 문장제를 방정식으로 표현하면 ①$x+y=35$, ②$2\times x+4\times y=94$ 된다. 방정식 ①의 경우 부분집합들의 결합을 전체의 수로 놓은 경우로 덧셈의 '합병'을 의미한다. ②의 경우 동물의 다리 수와 마리 수를 곱하는 비대칭상황의 곱셈 유형을 보인다. 동물의 다리 수는 묶음에 담긴 대상의 수가 되고 마리 수는 묶음의 수가 된다. 또한 두 개의 곱셈 '묶음'이 부분집합이 되어 결합하는 '합병'의

구조가 다시 한 번 더해진다. 문제해결전략 측면에서 보면, 제7차 교과용 도서에서 초등에서는 예상과 확인, 표 만들기를 제시하고 있고, 중등에서는 표 만들기로 접근하여 방정식을 익히는 풀이를 제시하고 있다. 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결에 관련된 선행 연구를 참고했을 때 이 3가지를 제외한 다양한 전략으로 해결 가능하겠다.

2. 교과용 도서에 제시된 이원일차연립방정식 형태의 문장제

4-나 단계부터 6-나 단계까지의 수학 교과서와 익힘책 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 교과서 9문항, 익힘책 10문항 총 19문항을 찾았다(교육과학기술부, 2008a, 2008b, 2008c, 2008d, 2008e, 2008f, 2008g, 2008h, 2008i). 관련된 문제들을 분석한 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> 초등에서 나타난 이원일차연립방정식 형태의 문장제

단계	문제 내용	제시된 문제해결전략	자료 표현
4-나 (교과서 p.116)	구슬이 3, 4개씩 들어 있는 주머니가 20개이고 총 구슬 65개일 때 각 주머니의 수	·	서술
4-나 (익힘책 p.130)	두발, 세발자전거가 17대있고 총 바퀴가 46개 일 때 세발자전거 수	·	서술
5-가 (교과서 p.134)	7점, 3점짜리 다트 판에 핀을 19번 던져 105점이 나왔을 때 7점짜리 과녁을 맞힌 수	예상과 확인	그림
5-가 (교과서 p.136)	50원, 100원짜리 동전이 8개일 때 700원이라면 각 동전의 수	·	서술
5-가 (교과서 p.140)	승용차와 오토바이가 50대이고 총 바퀴가 184개 일 때 승용차와 오토바이 수	·	그림, 서술
5-가 (익힘책 p.138)	다리가 3개인 의자, 4개인 책상을 만들 때 다리가 31개 있다면 제작 가능한 의자, 책상의 수	·	그림, 서술
5-가 (익힘책 p.141)	3000원을 내고 220원짜리 우표와 190원짜리 엽서를 15장 샀을 때의 우표와 엽서의 수	예상과 확인	그림, 서술
5-나 (교과서 p.130)	두발, 세발자전거가 50대이고 총 바퀴 수 127개일 때 두발, 세발자전거의 수	예상과 확인, 표 만들기	그림
5-나 (익힘책 p.151)	5000원을 가지고 500원, 300원짜리 공책을 12권을 살 때 500원짜리 공책의 수	·	서술

5-나 (익힘책 p.152)	3개씩, 4개씩 든 빵 봉지가 14개로 총 빵 50개라면, 각 봉지의 수	예상과 확인, 표 만들기	그림
5-나 (익힘책 p.153)	과자가 2개씩, 3개씩 든 봉지가 25개이고 과자가 70개라면, 각 봉지의 수	·	서술
6-가 (교과서 p.126)	200원짜리 지우개, 150원짜리 연필을 합하여 23개 사면 총 4000원이 들 때 지우개, 연필의 수	예상과 확인, 표 만들기	그림, 서술
6-가 (교과서 p.127)	100원, 200원짜리 구슬을 12개 사면서 1500원 지불했을 때 각 구슬의 수	·	서술
6-가 (익힘책 p.137)	200원인 연필, 300원인 볼펜을 더하여 30자루 사면서 6800원을 지불했을 때 연필의 수	예상과 확인, 표 만들기	서술
6-가 (익힘책 p.138)	50원, 100원짜리 동전 17개가 있을 때 1100원이라면, 각 동전의 수	예상과 확인, 표 만들기	그림, 서술
6-나 (교과서 p.130)	게임 CD는 5600원, 음악 CD는 3600원이고 총 10장을 사면 총 48000원(게임CD 수가 음악CD 수보다 크다.)이 들 때, 각 CD의 수	예상과 확인, 표 만들기	그림, 서술
6-나 (교과서 p.138)	영석은 조사 과제를 도와 준 이웃 동생 10명에게 학용품을 하나씩 선물하기 위해서 문방구점에 갔음(문제 만들기)	·	서술
6-나 (익힘책 p.132)	어른 입장료가 600원, 어린이 입장료가 400원인 놀이동산의 입장권 15장을 사는 데 7200원이 들었을 때 어른, 어린이의 수	예상과 확인, 표 만들기	서술
6-나 (익힘책 p.139)	950원 하는 감, 1400원 하는 배를 총 13개 사면서 14600원(배>감) 들었다면, 감과 배의 수	예상과 확인, 표 만들기	서술

초등학교 교과서 문제들을 소재 측면에서 보면, 학생들이 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 놀이대상, 화폐, 식생활, 교통·통신 수단, 가구 등 총 13종류의 다양한 소재가 제시되어 있다. 그 중 두발자전거와 세발자전거, 50원과 100원짜리 동전, 학용품(연필, 볼펜, 지우개, 공책 등)은 2~3회에 걸쳐 중복하여 나타났으나, 같은 소재가 같은 단계에서 겹치는 경우는 없었다. 자료의 제시 측면에서는 서술 표현이 10문제, 그림 표현이 3문제, 서술과 그림을 함께 사용한 표현이 6문제로 서술 형태가 절반 이상을 차지했다.

교과용 도서의 문제들은 수학적 구조가 같고, 의미론 측면에서 보았을 때 연산의 의미도 모두 같은 동형이다. 예외적으로 개방형 문제인 5-가-d와 생활 장면에서 소재를 찾아 문제 만들기인 6-나-b는 이원일차연립방정식 형태의 문장제와 유사하지만 엄밀하게 수학적 요소를 나누어 본다면 다른 성질을 가지고 있다. 문제해결전략 측면에서 총 19문제 중 11문제에 예상과 확인 또는 표 만들기 전략이 직접적으로 제시되어 있어, 학생들이 스스로 문제해결전략을 찾을 기회가 적음을 알 수 있다.

이원일차연립방정식 형태의 문장제가 제7차 교육과정의 8-가 단계의 연립일차방정식 단원에서 반복된다. 14종의 중등 수학 교과서에서 연립방정식을 도입할 때 소개하는 문장제가 대동소이하므로 4종의 중학교 교과서를 통해 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 살펴보았다(<표 2> 참조).

<표 2> 8-가 단계의 이원일차연립방정식 형태의 문장제

저자	문제 내용	제시된 문제해결전략	자료 표현
박두일 외	장미 20송이를 가지고 두 송이와 세 송이짜리의 꽃다발을 만들 때 다음 물음에 답하여 보자. 두 송이짜리 꽃다발을 한 다발 만들면 세 송이짜리 꽃다발은 몇 다발 만들 수 있는가? 세 송이짜리 꽃다발을 두 다발 만들면 두 송이짜리 꽃다발은 몇 다발 만들 수 있는가?	방정식, 표 만들기, 그래프 그리기	서술, 그림
박윤범 외	서정이는 가족과 함께 자전거를 탔다. 2인용 자전거와 1인용 자전거를 합하여 6대를 빌렸더니 모두 8명이 탈 수 있었다. 2인용 자전거는 몇 대 빌린 것인가?	방정식, 표 만들기	서술, 그림
전평국 외	현주네 외갓집은 토끼와 닭을 기르고 있다. 현주가 토끼와 닭을 세어 보니 합쳐서 8마리였다. 또, 토끼와 닭의 다리를 모두 세어 보니 20개였다. 토끼와 닭은 각각 몇 마리인가?	방정식, 표 만들기, 그래프 그리기	서술
이준열 외	어느 농구 경기에서 한 선수가 2점짜리 슛과 3점짜리 슛을 합해서 모두 7번 공을 넣어 16점을 득점하였다. 2점짜리 슛과 3점짜리 슛은 몇 개인가?	방정식, 표 만들기	서술

중학교에서 연립방정식을 도입할 때 소개한 문장제의 소재는 초등과 큰 차이가 없고 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 다양한 자료들을 간단한 사진이나 그림을 글과 함께 제시하고 있다. 수학적 요소 측면에서 살펴보면, 초등의 이원일차연립방정식 형태의 문장제와 동일한 의미와 구조를 가지고 있으나 문제해결전략에서는 차이가 있다. 초등학교에서는 5-가 단계까지 예상과 확인 전략으로 문제를 해결해보고 이후 단계에서 예상과 확인 전략과 표 만들기 전략을 제시하여 문제를 다양하게 해결해 보도록 되어 있다(교육과학기술부, 2008j). 중학교에서는 문제해결을 위하여 문장제에 알맞은 일차방정식 2개를 세운 다음 각 방정식과 관련된 표를 제시하여 완성하도록 하고, 두 표의 공통 (x, y) 순서쌍이 해가 됨을 익히게 하고 있다. 초등과 중등 문제해결에서 공통적으로 사용하는 표 만들기를 세부적으로 살펴보면, 초등에서는 1개의 표에 전체 변화를 표시한 반면에 중등에서는 2개의 방정식에 따라 2개의 표를 각각 만들어 사용한다는 것이다. 또한 중등은 위의 활동 이후에는 등식의 기본 성질을 바탕으로 가감법과 대입법과 같은 대수적인 문제해결전략을 익혀서 문제를 해결하도록 구성되어 있어 초등의 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 전략과의 연계성을 찾기 어렵다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

초등학교 교과서에서 이원일차연립방정식 형태의 문장제는 4-나 단계에서부터 6-나 단계에 이르기까지 매 단계 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 제시되어 있으므로, 4·5·6학년 학생들을 연구 대상으로 고려하였다. 하지만 4-나 단계에서는 이원일차연립방정식 형태의 문장제가 교과서와 익힘책에 각 한 문제 밖에 없으므로, 이런 형태의 문장제 해결 경험이 미비한 것으로 판단되어 본 연구에서는 5, 6학년 학생들만을 연구 대상으로 하였다.

본 연구는 광주광역시에 위치한 초등학교 4개교의 5·6학년에서 각 1학급씩 총 8학급을 대상으로 하였다. 대상이 된 초등학생들은 총 253명으로 5학년 125명, 6학년 128명이었다. 4개 초등학교 학생들의 학력수준은 광주광역시에서 중위수준이며, 가정의 사회·경제적 수준도 대체로 중위수준에 해당된다. 또한 2008년 2학기 교내 중간 평가에서 각 학교 내에서 중간 정도의 성취도를 보인 학급을 선정하였다.

2. 자료 수집 및 분석

본 연구는 이원일차연립방정식 문장제에 대한 5, 6학년 학생들의 문제해결을 조사할 목적으로 질문지법을 실시하였다. 질문지의 과제는 현행 초등 교과서에서 제시된 이원일차연립방정식 문장제들과 초등학생을 대상으로 한 이원일차연립방정식 문장제에 대한 연구들(권석일 & 임재훈, 2007; Covi et al., 2006; Kim, 2003; Mann, 2002, 2003; Rey, Lindquist, Lanbdin, & Smith, 2007; Robert, 2002; Wiest, 2008)을 바탕으로 <표 3>과 같이 구성하였다. 두 과제는 학생들에게 친근한 소재인 동전과 동물이었으며, 서술형으로 제시되었다. 그리고 의미론적 측면에서 볼 때, 합병과 묶음의 의미를 모두 담고 있어 기존의 이원일차연립방정식 형태의 문장제와 동일한 구조이다.

문제해결 영역에 관한 5, 6학년의 교육과정의 목표를 반영하여, 학생들에게 두 문제를 가능한 다양한 방법으로 해결한 후, 가장 선호하는 방법을 고르도록 하였고 왜 그 방법을 선택했는지 이유를 쓰도록 하였다.

<표 3> 질문지의 문장제

문제 1	100원짜리와 500원짜리 동전을 합쳐서 8개를 가지고 있습니다. 현재 가지고 있는 돈이 3200원이라면, 100원짜리 동전과 500원짜리 동전을 몇 개씩 가지고 있습니까?
문제 2	강아지와 앵무새 모두 합쳐 20마리가 동물원에 들어왔습니다. 다리만 세어보니 모두 66개였다면, 강아지와 앵무새가 몇 마리 들어왔습니까?

이원일차연립방정식 문장제 해결 성취도를 알아보기 위해, 문제와 학년에 따라 253명의 정답률을

산출하였다. 또한, 학생들의 전략 선호도를 알아보기 위해 253명의 문제해결을 범주화하는 과정에서 예상과 확인, 표 만들기 등의 전략을 사용한 경우와, 학생들이 이미 배웠던 전략들을 연결하여 사용한 경우를 분리하여 코드화하였다. 또한 교과서에 제시되지는 않았지만 선행 연구에서 발견된 해결 전략을 추가하여 코드표를 재구성하였다. 학생들의 문제해결전략을 종합한 코드표는 <표 4>와 같다. 한편, 학생들의 문제해결전략의 선호도를 알아보기 위해 무응답과 무작위 추측(hit and miss)으로 접근한 학생들은 분석 대상에서 제외하였다. 분석 대상이 된 학생은 253명 중 [문제 1]은 199명(5학년 90명, 6학년 109명), [문제 2]는 181명(5학년 84명, 6학년 97명)이었다.

<표 4> 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결전략 코드

코드	문제해결 전략의 분류
GC	예상과 확인
MT	표 만들기
WE	식 만들기
MD	그림 그리기
GC-MT	예상과 확인과 표 만들기
GC-WE	예상과 확인과 식 만들기
GC-MD	예상과 확인과 그림 그리기
SI	반짝이는 아이디어

이원일차연립방정식 문장제 해결 특성에 대한 분석은 전략 간의 연결, 효율적인 예상과 확인, 대수식의 사용 측면에서 이루어졌다. 첫째, 두 전략을 연결하여 사용한 GC-MT, GC-WE, GC-MD 전략 코드들 사이에서 공통점과 차이점을 검토하기로 하였다. 둘째, 표면적으로는 동일하게 분류되었던 예상과 확인 전략 내에서도 차이가 나타나므로, 논리적 추론을 통한 효율적인 예상과 확인 전략을 찾아보기로 하였다. 셋째, 엄밀한 의미의 대수식은 아니지만 문제의 수학적 구조를 이해하여 반구조화된 식을 만드는 경우와 미지수 개념을 파악하여 식을 만드는 경우를 살펴보고자 하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 문제해결 성취도 및 전략 선호도

가. 문제해결 성취도

연구 대상 대부분의 학생들은 질문지의 문장제를 보고, 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 해결했던 경험을 기억하고 있다고 하였다. 일부 학생들은 해당하는 교과서 단원과 교과서에서 제시했던

예상과 확인, 표 만들기 전략까지 기억하고 있었다. 초등학교 학생들이 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 어느 정도 해결하는지를 알아보기 위해 문제와 학년에 따라 분석한 결과는 <표 5>와 같다.

<표 5> 문제해결 결과

문제 / 학교	학생(명)	문제 1		문제 2	
		정답	오답	정답	오답
5학년	125	116(93%)	9(7%)	86(69%)	39(31%)
6학년	128	123(96%)	5(4%)	97(76%)	29(24%)
전체	253	239(94%)	14(6%)	183(72%)	68(28%)

두 문제를 해결함에 있어서 학년 간 차이를 살펴보았다. [문제 1]에서 정답률이 5학년 학생들은 93%, 6학년 학생들은 96%로 모두 높은 성취도를 보였다. [문제 2]에서도 5학년 학생들이 69%, 6학년 학생들이 76%로 차이가 있기는 하였지만, 두 문제 대비 약 5%의 차이가 있으므로 성취도의 차이는 대동소이하다고 볼 수 있다. 6학년 학생들의 경우 5학년 학생들에 비해 5-나, 6-가 단계에서 교과서와 익힘책을 통해 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 두 가지 전략을 비교하여 선택하는 학습을 했던 경험이 더 있음에도 불구하고, 연구 결과 실제 문제해결 성취도 측면에서 학년 간 차이가 크게 드러나지 않았다.

문제별로 보았을 때, 초등학교 고학년 학생들의 정답률은 [문제 1]에서 94%, [문제 2]에서는 72%로 차이를 보였다. 동형의 문제이지만 이러한 차이가 나타난 첫 번째 이유는, 문제에서 제시하고 있는 수의 크기에 다소 차이가 있기 때문이다. [문제 2]의 정답률이 낮았다는 점에서 전체 금액 3200원과 66개의 모든 동물의 다리 수인 $ax+by$의 값보다는 [문제 1]은 동전의 수가 모두 8개이지만, [문제 2]에서는 동물의 수가 모두 20마리라는 $x+y$의 값이 학생들의 문제해결에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 학생들은 [문제 1]에서 주어진 전체 동전의 수 8개를 나누는 방법에 대해서 여러 가지 경우를 쉽게 생각했지만, [문제 2]에서는 주어진 전체 동물의 수 20마리를 나눌 수 있는 경우의 수를 모두 계산해 봐야한다고 여기거나, 첫 예상을 하기에 20은 8보다 큰 수이기 때문에 복잡하다고 하였다.

두 번째 이유는, 두 문장제의 언어적 요소의 차이였다. 학생들은 [문제 1]을 해결한 뒤 [문제 2]를 해결하기 전 둘이 같은 유형의 문제임을 알고 있다고 말했다. 하지만 [문제 2]의 문장제를 이해하는 단계에서 몇몇 학생들은 교사나 친구들에게 과제의 소재인 강아지와 앵무새 다리 수가 몇 개인지 물었다. 오답을 분류하는 과정에서도 [문제 2]는 [문제 1]에 비하여 총 20마리를 나누지도 못하고 무응답의 경우로 제출한 경우가 많았다. 초등학교 고학년 학생들의 언어 사용 수준에서 보았을 때 실제 강아지와 앵무새의 다리 수를 모르는 것은 아니지만, 문제해결 계획을 세우는 단계에서 문장제에서 제공하는 정보가 [문제 1]에서의 100원, 500원과 같이 직접적인 숫자로 주어지지 않고 간접적으로 주어진 것이 영향을 미쳤다고 가정해볼 수 있다. 결론적으로 이원일차연립방정식 형태의 동형 문장제 해결에

있어서 수학적 요소와 언어적 요소가 모두 문제해결 성취도에 영향을 줄 수 있다고 해석된다.

나. 문제해결 전략 선호도

초등학생들의 이원일차연립방정식 형태의 문제해결전략 선호도를 살펴보기 위해 문제해결전략 코드표(<표 4> 참고)에 따라 [문제 1]은 199명, [문제 2]는 181명을 대상으로 하여 분석한 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6> 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 전략 분류

코드 \ 대상	문제 1		문제 2	
	5학년	6학년	5학년	6학년
MD	5(6%)	·	·	·
GC	40(45%)	39(35%)	27(32%)	24(25%)
MT	4(4%)	18(17%)	2(2%)	18(19%)
WE	·	·	·	2(2%)
GC-MD	3(3%)	·	3(4%)	·
GC-MT	36(40%)	41(38%)	46(55%)	48(49%)
GC-WE	1(1%)	10(9%)	4(5%)	4(4%)
SI	1(1%)	1(1%)	2(2%)	1(1%)
계	90	109	84	97

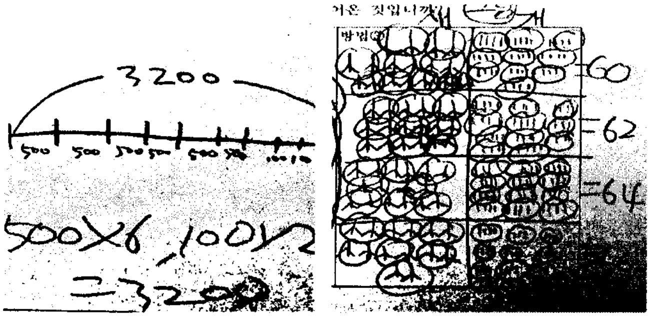
[문제 1]에서 5, 6학년 학생들 모두 GC와 GC-MT 사용 빈도가 높게 나타났다. 5학년은 GC가 5% 차이로 좀 더 높았고, 6학년 학생들은 3% 차이로 GC-MT가 좀 더 높게 사용되는 것으로 분석되었다. [문제 2]에서는 두 학년 모두 GC-MT가 가장 높게 나타났다. 두 문제 모두 예상과 확인을 단독으로 혹은 다른 전략과 연결(예, GC-MD, GC-MT, GC-WE)하여 사용한 학생들이 5학년은 80%이상, 6학년은 78%이상으로 나타났다. 이를 통해 초등학교 학생들에게 이원일차연립방정식 문장제를 해결함에 있어서 예상과 확인 전략이 매우 유효하다는 것을 알 수 있었다. 초등학교 교과서에서 이원일차연립방정식 문장제를 예상과 확인, 표 만들기 두 가지 전략으로 해결해보도록 명시적 혹은 암묵적으로 제시하고 있다는 점을 고려했을 때 이런 결과가 놀라운 것은 아니다. 하지만 교육과정 및 교과서 분석 결과 5학년 학생들의 경우 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 예상과 확인 전략으로만 해결한 경험을 가지고 있었고, 6학년 학생들은 예상과 확인과 표 만들기 두 전략을 모두 사용하여 해결해 보고 더 편리한 전략을 선택했던 경험의 차이가 있었다. 그럼에도 불구하고 전략의 선호도면에서 학년 간 차이를 보이지 않았다는 점에서, 학년 간 계열성과 난이도를 고려한 가치 있는 과제 제시를 재고할 필요가 있다.

학생들 대부분은 GC와 GC-MT를 선호하였으나, 다른 코드에서 학년 간 차이를 발견할 수 있다. MD와 GC-MD는 6학년 학생들에게서는 발견되지 않았으나, 5학년의 일부 학생들에게서 나타난 코드이다. MD나 GC-MD를 사용한 학생들은 "보면 재미있고 문제를 이해하기 쉬워서.", "시간은 걸리지만 정확하게 풀 수 있다." 라는 이유를 들어 그림 그리기 전략의 장점을 설명했다. WE와 GC-WE는 5학년에 비해 6학년 학생들에게서 더 높게 나타났다. WE와 GC-WE를 사용한 학생들은 "그냥 계산하는 것이 더 편하다. 이유는 어렸을 때도 그림은 별로 하지 않아서, 그림은 귀찮으니깐", "표는 복잡하게 그려야 하지만 식은 간단하게 풀 수 있게 때문이다."라는 이유를 들어 식 만들기 전략의 장점을 설명했다. 이를 통해 일부 초등학생들은 GC와 GC-MT 외에도 다양한 방법으로 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 해결할 수 있는 것을 알 수 있다.

2. 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 특성

가. 전략들 사이의 연결

문제해결전략 선호도 분석을 통해 학생들은 예상과 확인 전략을 선호하고 있음을 알 수 있고, 또한 예상과 확인 전략을 그림 그리기, 표 만들기, 식 만들기 전략들과 연결하여 문제를 해결하고 있음을 알았다. 이에 코드화된 GC-MD, GC-MT, GC-WE의 경우를 보다 면밀히 분석해 보았다. <그림 2>는 학생들이 문제를 해결할 때 GC-MD전략을 사용한 활동지다. 그림 그리기 전략의 경우 동전이나 새의 다리와 같은 문제의 소재를 그대로 그려서 답에 이를 때까지 차례대로 세거나, 막대기와 같은 기호로 소재를 간략하게 나타낸 뒤 각 단위에 맞게 묶어서 세는 경우가 있었다. GC-MD는 그림 그리기에 예상과 확인 전략이 반영되어, 처음부터 문제에 제시된 대상을 그리기보다는 예상을 통해 얻을 답을 간략하게 그려서 확인하고 있었다. <그림 2>의 첫 번째 학생의 경우, 수직선을 변형하여 전체 선분을 3200원이라고 나타내고, 길이에 상관없이 두 종류의 동전의 합인 8만큼 일정한 칸으로 나눴다. 각 칸에 500원과 100원을 써넣으면서 자신의 예상을 가시화하였다. 500원을 계속 써가면서 500, 500, 500…으로 늘려가면서 자신의 예상에 이를 때까지 5회에 걸쳐 이런 활동을 반복하였다. 5번째 칸까지 500원짜리 동전을 늘리던 학생은 6, 7번째 칸에는 100원을 썼다. 하지만 곧 100원 하나를 지우고 다시 500원을 썼다. 첫 예상이었던 (5, 3)을 수직선을 통해 쉽게 확인하고 (6, 2)로 수정했다.

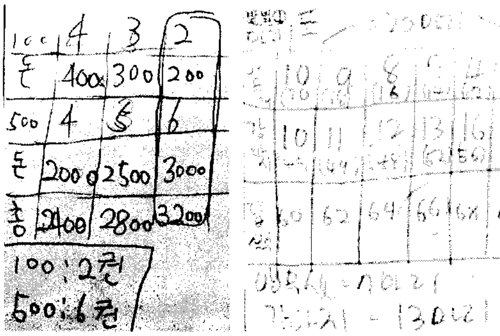


<그림 2> GC-MD 예

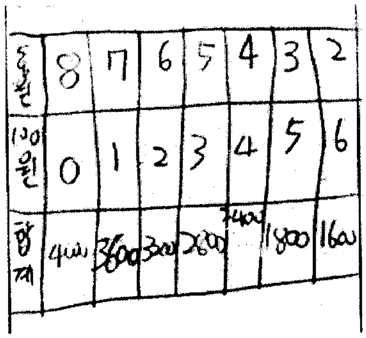
<그림 2>의 두 번째 학생은 새의 다리와 개의 다리를 막대와 비슷한 간단한 표시로 그렸다. 각 동물의 다리 수만큼 2개와 4개를 각각 동그라미로 묶었다. 각 동그라미의 수는 한 마리를 나타내고 있어, 앵무새와 강아지의 마리수를 모두 합친 20으로 일정한 관계를 갖고 있다. 첫 예상으로 20 마리를 반으로 나누어 그 묶음을 각 10개에서 시작하여 정답에 이르기까지 앵무새를 한 마리 줄이면 개를 한 마리씩 늘리는 그림을 반복하여 그렸다. 이 학생은 표의 형태가 어떠해야하는지, 열과 줄에 어떤 명칭을 부여해야할지 명확하게 결정하지 못하고, 문제의 소재를 그림으로 그려 동물의 마리 수를 찾았다. 명료하게 드러내지는 못했지만, 이 학생들의 경우 예상과 확인, 그림 그리기의 두 가지 전략을 연결할 뿐만 아니라, 일부는 표의 형태로 자료를 정리함으로써 세 가지 전략들도 연결할 수 있다는 가능성을 보여주었다.

<그림 3>은 본 연구의 학생들이 높은 선호를 보였던 GC-MT의 예이다. 5학년 학생들은 직접적으로 이원일차연립방정식 문장제를 표 만들기 전략으로 해결한 경험이 없음에도 불구하고, 전략을 매우 자연스럽게 연결하여 사용했다. GC-MT를 사용한 학생들은 <그림 3>과 같이 첫 칸을 전체 동전의 수 8을 반으로 나눈 (4, 4)로 시작한 경우가 많았다. 이들은 8개의 동전과 20마리의 동물의 수를 반으로 나누어 시작해서 두 양을 하나씩 바꿔갔고, 문제를 해결할 때까지 수차례 반복하였다. 또는 $x+y$ 값의 반에서 시작하기보다는 자신의 수 감각을 활용하여 500원 동전이 8개이면, 전체 금액이 4000원이 되므로 500원 동전의 개수는 8개보다 작은 수에서 시작하는 학생들도 있었다.

GC-MT를 사용한 학생들은 자신이 만든 표를 보면서 전체 돈의 액수나 동물의 다리 수의 변화에 주목했다. 예를 들어 전체량을 나타내는 칸들 사이를 줄로 연결해서 '+2'라고 써두거나, '동전을 하나씩 바꾸면 400원씩 늘어난다.'는 설명을 덧붙여서 규칙을 찾았다고 말했다. 학생들은 문제해결 방법으로 규칙 찾기 전략을 언급했으나, 규칙 찾기가 본인이 선호하는 전략은 아니라고 하였다. 그 이유로 "내가 선호하는 전략은 표 만들기이다. 이 규칙은 표를 그리다가 알게 된 것이니까"라고 설명했다.



<그림 3> GC-MT 예

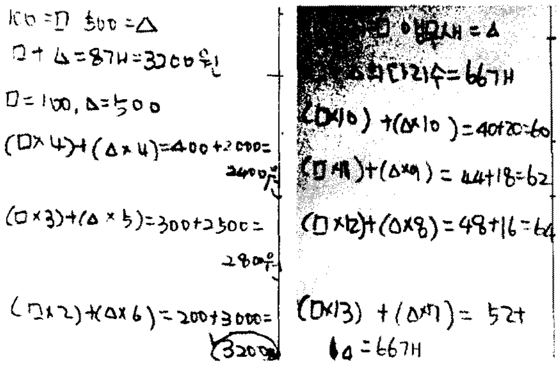


<그림 4> MT 예

표 만들기 전략을 사용하는 학생들에게서 찾아볼 수 있었던 문제해결 특징들 중의 다른 하나는 <그림 3>의 두 번째 학생과 <그림 4>의 학생과 같이 어떤 값에서 문제가 해결되었음에도 불구하고 자신이 처음 그렸던 표를 완성하기 위해 시간과 노고를 쏟는다는 것이다. 이는 문제를 해결하기 위한 전략으로 표를 사용하기보다는 외형적인 표 만들기에 더욱 집중했던 것으로 보인다. MT를 사용한 학생들은 <그림 4>와 같이 순서대로 두 수의 관계를 유지하면서 1씩 더하거나 빼가면서 계획했던 표를 채워간 경우가 많았다. 그런데 MT를 사용한 학생들에게 그 전략을 선호하는 이유에 대해서 묻자, "표의 첫 칸이 8부터 시작할 필요는 없지만 학교에서 표 만들기를 할 때 이런 방법으로 했다."고 설명했다. 반면에 GC-MT를 선호한다고 답한 학생들은 "표로 풀면 헷갈리지 않아서 좋다. 그런데 칸을 많이 그리면 불편하니까 20을 반으로 나눠서 시작했다."라고 답하였다. 즉, MT만을 사용하기보다는 GC-MT를 사용한 학생들이 보다 효율적으로 문제를 해결하고 있음을 알 수 있다.

식 만들기는 학년이 올라갈수록 문제해결에서 매우 유용하게 사용되는 전략이며, 이원일차연립방정식 형태의 문장제의 경우 중등의 방정식과도 연계될 수 있다. 일단 식을 세우고 나면 문제해결이 수월해 질 수 있으나, 학생들에게 처음부터 식을 세우는 것은 쉽지 않은 일이다. <그림 5>은 GC-WE전략을 사용한 예로, 문장제의 정보를 이용하여 계산식을 세우거나, 미지수를 넣은 계산식을 만들어 답을 찾는 방법을 사용했다. <그림 5>의 왼쪽 학생은 [문제 1]에 대한 해결 과정으로, 세운 식의 미지수 부분에 예상하는 수를 넣어 식을 계산하는 전략을 사용했다. 이 학생의 경우 미지의 값을 찾는 문제 상황을 인지하고 있었지만 무엇을 미지수로 두어야할지 모른 채 혼용하고 사용하고 있다. 하지만 (4, 4), (3, 5), (2, 6)과 같이 세 차례의 예상과 확인 전략을 통하여 식으로 문제를 해결하였다.

<그림 5>의 오른쪽 학생은 '강아지=□, 앵무새=△'라고 하였지만, '□+△의 다리 수=66'이라는 식에서 '강아지 전체 마리 수=□'라고 하여 사실 □를 혼용하고 있다. 하지만 문제해결을 위해 사용된 식을 볼 때 □는 강아지 다리 수, △는 앵무새 다리 수로 쓰이고 있다. 이 학생도 첫 번째 학생과 동일하게 미지수 사용이 명확하지 않았다. 예상과 확인을 포함한 첫 식은 20마리를 나누어 (10, 10)으로 시작했다. 두 번째 예상에서 강아지 쪽에 9, 앵무새 쪽에 11이라고 썼다가 지우고 (11, 9)로 고쳤다. 이것은 강아지 수를 하나 줄인 두 번째 예상에서 첫 예상의 값보다 그 크기가 줄어들자 예상을 수정한 것이다. 그 이후에는 강아지 수를 하나씩 늘리면서 전체 다리 수를 찾아 문제를 해결했다.



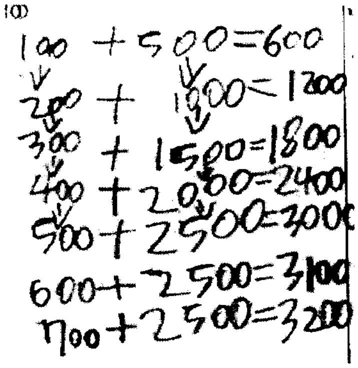
<그림 5> GC-WE 예

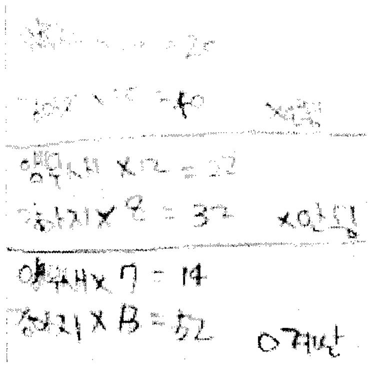
위의 GC-MD, GC-MT, GC-WE의 경우처럼 전략을 연결하여 사용하는 학생들은 자신의 문제해결 표현을 문제해결전략으로 생각하였기 때문에, 선호하는 전략에 '그림 그리기', '표 만들기', '식 만들기' 등을 적었다. 일부 학생들은 자신이 전략을 연결하여 사용하고 있음을 알고 있었다. 그들은 선호하는 전략의 이유로 '나만의 방법', '표, 예상을 섞어서 나만의 특별한 계산이 왠지 더 쉬웠다.'라고 답했다.

나. 효율적인 예상과 확인

이원일차연립방정식 형태의 문장제는 미지수 2개, 방정식 2개로 학생들에게는 도전적인 문제이다. 즉, [문제 1]의 경우 학생들이 전체 3200원을 염두에 두어야할 뿐만 아니라, 동시에 100원과 500원짜리 동전의 개수 합이 8개라는 사실도 고려해야한다는 것이다. 문제해결전략 코드에서 제외된 무작위 시행착오 접근법을 사용한 학생들의 경우를 보면, 동전들의 합이 8개라는 조건과 전체 금액이 3200원이라는 두 가지 조건 중 한 가지만 고려하여 해결하였다. 무작위 시행착오의 경우 문제의 조건이 모두 고려되지 않았기 때문에 엉뚱한 답이 나오거나, 우연히 '이것일 것 같아서'와 같이 추측을 통해 문제가 해결되기도 하였다.

예를 들어 <그림 6>의 학생은 [문제 1]의 3200원을 만들기 위해서 100원과 500원을 동시에 하나씩 늘리기를 5회 실시했다. 5회 때 두 동전의 합이 3000원이 되자 6, 7번째 식에서는 500원 동전을 더 이상 늘리지 않고 100원짜리 동전만 하나씩 늘렸다. 총 7개의 식으로 계산한 후 '700+2500=3200'이라는 전체 금액은 맞추었으나, 두 동전의 수의 개수의 합이 8개라는 조건은 고려하지 않았다. 학생의 답대로 한다면 100원짜리 동전 7개와 500원짜리 동전 5개로 총 12개가 된다.

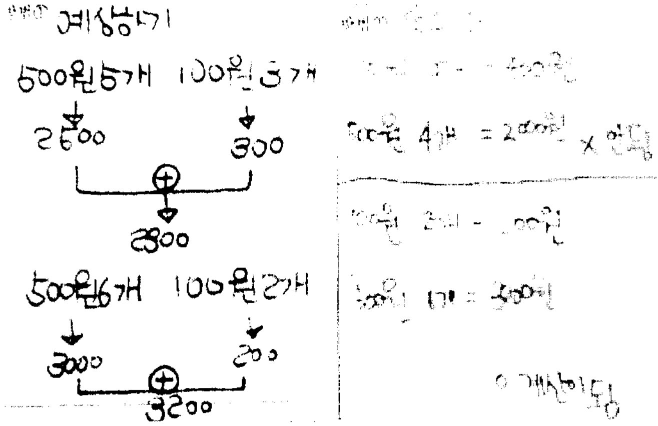




<그림 6> 잘못된 GC-WE 예 <그림 7> 무작위 시행착오 예

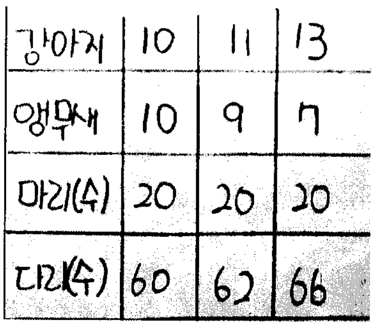
<그림 7>의 학생은 무작위 시행착오의 대표적인 예이다. 이 학생은 두 동물의 수의 합이 20이라는 [문제 2]의 조건을 기억하고 있었다. 첫 번째 추측에서 학생은 20을 반으로 나눈 (10, 10)에서 시작했고, 그 결과 60으로 문제에서 요구하는 66에 못 미쳤다. 학생은 두 번째 예상에서 앵무새의 수를 늘려야할 것인지 강아지 수를 늘려야할 것인지 전혀 생각하지 않고 앵무새 12마리, 강아지 8마리로 예상한 결과 전체 다리 수 54를 얻었다. 이 학생은 두 번의 예상과 확인 결과를 확인한 뒤에서야 세 번째 예상에서 앵무새의 수를 대폭 줄여서 원하는 답을 얻을 수 있었다. 학생은 자신의 전략에 대해서 '수를 대강 잡아서 계산하는 방법'이라고 설명한 것을 통해서, 우연한 추측으로 문제를 해결했음을 알 수 있다.

<그림 8>의 두 학생은 자신만의 수 감각을 가지고 GC를 단독으로 사용한 경우를 보여준다. 하나씩 나누어 살펴보면, 첫 번째 학생은 어림한 첫 예상 (5, 3)을 계산하여 3200원이 되는지를 확인했다. 도식화된 표현에서 이 학생이 500원짜리 동전들의 총 액수와 100원짜리 동전들의 총 액수의 합이 전체 3200원이 되어야 한다는 문제의 조건을 잘 파악하고 있음을 알 수 있다. 학생은 처음 500원짜리 5개, 100원짜리 3개라고 예상하였으며, 그 결과 값은 2800원으로 3200원이 되기에 부족하였으므로, 값이 큰 500원짜리 동전의 수를 늘리겠다고 예상하였고, 그 결과 조건에 맞는 답을 얻을 수 있었다. 이 학생은 그림이나 표와 같은 표상을 사용하지 않았으나, 문제의 구조를 자신만의 방식으로 도식화하여 명료하게 나타내고 있다. 두 번째 학생은 전체 8개의 동전을 반으로 나누어 500원짜리 4개, 100원짜리 4개에서 첫 시도를 하였다. 이 학생의 해결에서 우리가 살펴야할 것은 대부분의 학생들이 (4, 4)의 결과가 전체량에 도달하지 못한 경우, 다음으로 (5, 3)을 예상했다는 것이다. 하지만 이 학생은 두 번째 예상에서 500원짜리 동전을 단번에 2개 늘려 예상했고, 단 두 번의 예상과 확인으로 답을 얻을 수 있었다. 위와 유사한 경우는 GC-MT로 해결한 <그림 9>의 학생에게서도 찾아볼 수 있었다.



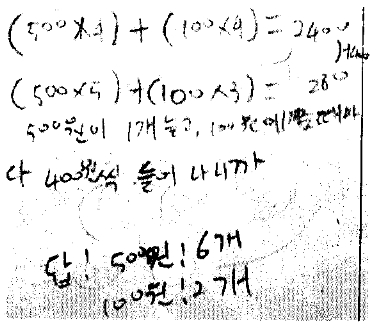
<그림 8> 효율적인 GC 예

<그림 9>의 학생도 전체 동물의 마리 수인 20을 반으로 나누어 (10, 10)에서 첫 시도를 했다. 두 번째 시도는 많은 학생들과 다르지 않게 강아지를 한 마리 늘리고, 앵무새를 한 마리 줄여 예상을 하였다. 그 뒤 세 번째 예상에서 두 번째 과정을 반복하여 1씩 증감한 (12, 8)을 예상한 것이 아닌 (13, 7)로 제시하여 문제를 해결하였다. 이는 학생의 두 번의 예상과 확인을 통해 다리의 수가 60에서 62로 늘어난 것을 보고 이러한 과정이 몇 번 더 일어나야 할 것인지를 추론한 것이다. 즉 강아지를 한 마리 더 늘리면 앵무새는 한 마리 줄어들고 전체 다리의 수는 2씩 늘어난다는 관계를 알게 된 것이다. 66개의 다리를 만들기 위해서는 두 번째 예상과 확인을 통해 얻은 62에서 4만큼 증가해야 한다는 생각을 두 번째 예상인 (11, 9)에서 하나를 건너뛰어 (13, 7)로 문제해결을 예상했음을 알 수 있다. 이는 학생이 단순한 예상과 확인에 표 만들기 전략을 연결했기보다는 이미 알고 있는 사실을 기초로 하여 반복되어야할 과정을 생략하고, 효율적으로 다음 예상을 할 수 있었음을 의미한다.



강아지	10	11	13
앵무새	10	9	7
마리(수)	20	20	20
다리(수)	60	62	66

<그림 9> 효율적인 GC-MT 예

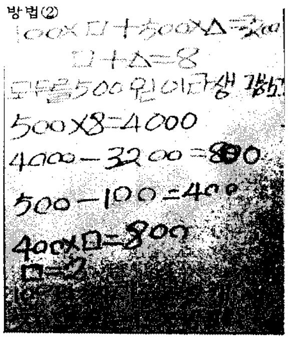


<그림 10> 효율적인 GC-WE 예

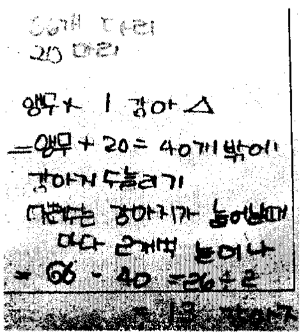
<그림 10>의 학생은 식을 만들었지만 미지수를 따로 표현하지 않고, 문제에서 제시한 수학적 구조를 수식으로 제시했다. 많은 학생들과 동일하게 전체 8개의 동전의 수를 반으로 나누어 첫 번째 식

을 계산했고, 500원짜리 동전의 수를 하나 늘려 두 번째 식을 계산하였다. 하지만 세 번째 식을 만들기 전에 이 학생은 두 식의 결과에 주목했다. 두 식의 계산된 전체량을 줄로 잇고 '+400'이란 표기를 했고, '500원이 1개 늘고, 100원이 1개 줄 때마다 400원씩 늘어나니까'라는 설명을 아래에 덧붙였다. 이는 학생이 동전의 개수 변화에 따라 전체 돈의 액수가 어떻게 달라지는지 그 관계를 인지하였다는 점을 보여준다. 결국 학생은 세 번째 식을 만들어 계산을 하지 않고도 문제를 해결했다. 그 외의 다른 학생들도 전체 돈의 액수를 늘리려면, 500원짜리 동전을 하나 늘리고 동시에 100원짜리 동전을 하나 줄이는 교환이 필요함을 알았다. 그 과정에서 100원과 500원의 차이는 400원, 강아지와 앵무새 다리 수의 차이는 2개라는 규칙을 발견했으며 이런 교환이 일어날 때마다 그 차이만큼 전체 돈의 액수와 전체 다리 수가 변한다는 사실을 알았다. 이러한 규칙을 확장하고 패턴을 발견하는 추론을 통해 5, 6학년 학생들은 자신들만의 효율적인 방법으로 문제를 해결하였다.

<그림 11, 12>는 이러한 패턴과 논리적 추론을 이용하여 문제를 해결한 SI의 예이다. [문제 1]을 예로 들면, 학생은 처음 500원짜리 동전과 100원짜리 동전이 모두 8개 있는 상황에서 8개를 모두 500원이라 가정한다. 그 다음 4000원에서 전체 3200원이 되기 위해서는 몇 번의 동전의 교환이 일어나야할지를 생각하여 문제를 해결했다. 즉 <그림 11>의 학생은 문제 1의 문장제의 내용을 '100×□+500×△=3200, □+△=8'이라는 대수화된 식으로 나타냈고, 8개 동전이 모두 500원짜리라고 보았을 때, 4000원이 되므로 만들고자 하는 3200원보다 800원이 더 많다는 점을 알았다. 500원과 100원의 차이가 400원이므로 800원만큼 줄이려면 500원짜리 동전 2개를 100원짜리로 바꾸어야한다는 추론을 통해 결론을 얻게 된 것이다. <그림 12>의 학생은 맨 처음 문장제에서 제시된 조건인 66개 다리, 20마리 부분을 위쪽에 따로 적었다. 그리고 앵무새를 ×, 강아지를 △로 표현했으나 식을 세우거나 나중에 활용하지는 못했다. 앵무새가 20마리라고 예상한다면 '40개 밖에'라고 말하고, '강아지 수 늘리기'라고 적었다. 그 다음 총 66개의 다리를 가져야 하므로 부족한 26개의 다리를 충족하기 위해서는, 강아지가 1마리씩 늘어날 때 다리는 2개씩 늘어나기 때문에 총 13마리의 강아지를 늘려야 한다는 결론을 내려 문제를 해결했다. SI 전략을 사용한 학생들의 예를 통해서 학생들은 패턴을 이용한 수준 높은 예상과 확인 전략을 사용함을 알 수 있었다.



<그림 11> SI 예

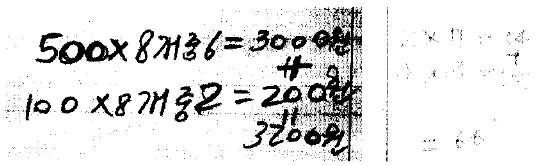


<그림 12> SI 예

문제해결 특성을 분석하는 과정에서 학생들이 같은 예상과 확인 전략을 사용했어도 차이가 있음을 알 수 있었다. 첫째, 두 변량을 하나씩 가감해가며 답에 가까워지도록 순차적으로 예상하고 확인하는 전략이었다. 예를 들면 (4, 4)를 예상하고 그 다음에는 (5, 3), (6, 2)로 하나씩 양을 조절해가며 순차적으로 답에 접근하는 것이다. 둘째, 변수의 변화에 따른 규칙을 찾아 예상하는 것이다. 500원 동전이 하나 늘어나고 100원짜리 동전이 하나 줄어들면 400원씩 전체 금액이 늘어난다는 것을 보고 예상하는 것이다. 셋째, 두 변수 사이의 관계와 변수의 변화에 따른 전체 다리의 수의 관계까지도 파악하여 패턴화하는 것이다. 예를 들어 두 양의 교환을 통해 400원씩 전체량에 차이가 난다는 사실을 이용하여, 첫 예상의 4000원이라는 결과를 보고 문제에서 제시한 3200원과의 차이를 없애기 위해 몇 번의 교환이 이루어져야 할 것인지를 알아낸다. 학생은 800만큼 전체량을 조정해야하는 경우 가역적인 사고를 통해 두 변수를 2만큼씩 조정하는 것이다. 초등학교 학생들의 문제해결에서 표면적으로는 예상과 확인이라는 전략으로 보이지만, 그 속에서 효율적이고 논리적인 사고와 추론에 따라 여러 양상을 보였다. 같은 문제해결 전략에서도 그 수준이나 방식의 차이가 있으며 이와 같은 차이는 문제해결의 효율성 및 정교성을 높이는 교수, 발문이나 문제해결 환경에 따라 영향을 받을 것이다.

다. 대수식의 표현

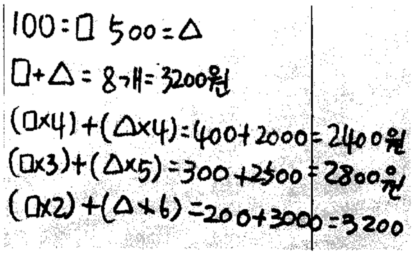
선호하는 전략에서는 낮게 나타났지만, 예상과 확인으로 문제를 해결한 많은 학생들이 자신의 문제해결 결과를 이용하여 식을 만드는 학생이 많았다. 이제까지 문제를 풀기 위해 하나의 식만 쓰면 되었던 것과는 다르게, 두 개의 식을 결합하는 과정에서 어려움을 보였다. 이러한 어려움은 <그림 13>과 같이 불완전한 식의 형태로 나타나게 되었다. 예를 들어 500원짜리 동전 6개로 3000원임을 나타내는 식과 100원짜리 동전 2개가 200원이라는 식의 결과를 더하여 3200원을 얻었다. 이 때 둘의 합을 나타내는 식을 따로 만들지 않고 전체량의 결과를 그대로 두고, '+'라는 연산 기호를 첨가하여 나타냈다. 이러한 식은 문제의 수학적 구조가 식에 비형식적으로 반영되어 있음을 보여준다.



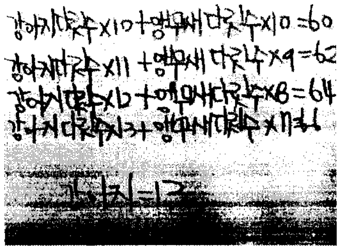
<그림 13> 불완전한 GC-WE 예

또 다른 불완전한 식 만들기 사용은 <그림 5>의 오른쪽 학생처럼 미지수를 어떤 것으로 두어야할지 고민하는 경우도 포함한다. <그림 14>의 학생은 문제에서 제시한 100원, 500원을 미지수로 두거나, 100원짜리 혹은 500원짜리 동전들의 전체 액수를 미지수로 사용했다. 그리고 실제 미지수로 들어가야 할 부분에 자신이 예상한 수들을 식 속의 숫자로 써서 여러 개의 식을 완성했다. 자신이 알고 있는 정보를 식에 어떻게 나타내야하고, 미지수로 두어야 할 것이 무엇인지 정확하게 인지하지 못하고 있다.

<그림 15>의 학생은 미지수를 다른 기호로 나타내지 않고 학생이 예상한 수를 넣었다. 식을 만드는 과정에서 '강아지 다리 수', '앵무새 다리 수'를 미지수로 생각하였고, 미지수 부분은 자신의 예상한 수를 넣어 4개의 식을 순차적으로 만들었다.

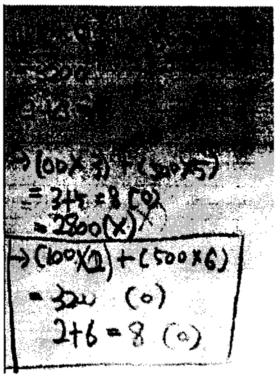


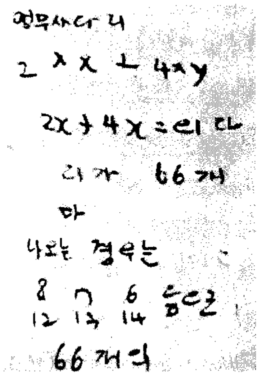
<그림 14> GC-WE 예



<그림 15> GC-WE 예

GC-WE로 분류된 <그림 16>은 <그림 5, 13, 14, 15>보다는 세련된 식의 사용을 보여준다. 대수식에서 미지수의 자리를 바르게 놓고, 문제 속의 수학적 구조를 하나의 식으로 올바르게 만들었다. <그림 16>의 왼쪽 학생은 [문제 1]을 (100×□)+(500×△)=3200으로 □+△=8로 나타냈고, 오른쪽 학생은 [문제 2]를 $2\times x+4\times y=66$으로 대수식을 보여주고 있다. 두 학생 모두 세련된 대수식을 세울 수는 있었으나, 등식의 성질을 이용하여 대수적으로 문제를 해결하지는 못했다. 두 학생 모두 자신이 세운 식의 미지수 자리에 예상한 수를 넣고 결과를 확인했다. 두 학생의 모두 □+△=8과 $x+y=20$라는 관계를 고려하고 있음을 알 수 있었다. 오른쪽 학생은 (100×3)+(500×5)=3200라는 첫 번째 예상 밑에 '=3+5=8 (0)'라는 부분을 통해 알 수 있고, 왼쪽 학생도 문제를 해결하기 위해 (8, 12), (7, 13), (6, 14)로 짝을 지어 쓴 내용을 볼 수 있었다.





<그림 16> GC-WE 예

WE와 GC-WE 전략을 선택한 학생들 외에도 다양하게 문제를 해결하는 과정에서 식 만들기 전략을 여러 차례 볼 수 있었다. 대부분 <그림 13, 14, 15, 16>과 같이 반구조화된 식이거나 2개의 미지수를

넣은 대수식이었다. <그림 17>의 학생은 두 미지수 사이의 관계를 인지하여, 미지수가 1개인 식을 만들었다. 문장제에서 두 동전의 합이 8개이므로 500원짜리 동전이 □개이면, 100원짜리 동전은 8-□가 된다는 추론을 식에 반영한 것이다. 앞서 살펴봤던 대부분의 예에서 초등학교 고학년 학생들이 □+△=8라는 덧셈의 합병 상황은 쉽게 파악하고 식으로 세웠다. 학생들이 변화 미지수와 결과 미지수를 동시에 갖는 구잔 유형의 뺄셈 상황으로의 변환은 쉽지 않았음에도, <그림 17>의 학생은 두 변량 사이의 관계를 식에 대입함으로써 더욱 정교한 대수식을 만들었다. 이는 중등의 대입법과 동일한 수학적 아이디어를 갖고 있다고 볼 수 있다. 물론 이 학생의 경우 문제를 해결하는 과정에서 분배 법칙을 사용하여 문제를 대수적으로 해결하지는 못했지만, 이러한 학생들의 사고는 중등의 대수적인 방정식 풀이와 연계되어 발전할 수 있는 부분이 된다. <그림 17>의 학생은 현재 자신이 사용할 수 있는 예상과 확인 전략을 반복 사용하여 해결했다. 만약 이 학생이 분배 법칙을 알았다면, 중등의 이원일차연립방정식을 대입법으로 해결한 셈이 된다. 위에서 살펴보았던 GC-WE의 예에서 본 초등 학생들의 식은 중등에서의 방정식과는 다르다. 하지만 초등학교 고학년 학생들이 이원일차연립방정식 문장제의 수학적 구조와 미지수들 사이의 관계를 이해하여 대수식을 세울 수 있다는 가능성을 발견했다.

$$500\times\square+100\times(8-\square)=3200$$

<그림 17> GC-WE 예

V. 맺는말

본 연구는 초등학교 고학년을 대상으로 교과서에 동일한 수준으로 반복 제시된 이원일차연립방정식 형태의 문장제를 해결하는 학생들의 성취도와 선호하는 전략 및 문제해결 특성을 알아보았다. 연구 결과 초등학교 학생들이 이원일차연립방정식 문장제를 해결하는데 문장제의 언어적·수학적 요소에 따라 성취도의 차이가 나타났으며, 선호하는 문제해결전략으로 GC와 GC-MT가 높게 나타났다. 이원일차연립방정식 형태의 문장제의 해결 특성으로 전략들 사이의 연결, 효율적인 예상과 확인, 대수식의 표현이 나타났다. 분석 결과를 근거로 5·6학년 학생들의 이원일차연립방정식 형태의 문장제 지도에 대한 시사점을 논의해 보면 다음과 같다.

첫째, 학년 간 차별화하여 구성된 문제해결 지도가 필요하다. 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결에 있어서 6학년 학생들이 5학년 학생들보다 동형 문제해결 경험이 더 많음에도 불구하고, 성취도 및 전략 사용에 있어서 차이가 나타나지 않았다. 교실 수업에서 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 자신의 전략을 만들어 내고, 정당화하는 의미 있는 지도가 필요하다.

둘째, 문제해결전략 사이의 연결을 촉진하도록 도와야 한다. 문장제에 따라 유효한 문제해결전략을 각각 분리하여 학습하는 상황이 학생들의 유연한 문제해결에 걸림돌이 될 수 있다. 연구 결과 초등학교 고학년 학생들은 상황에 맞게 전략들을 연결하거나 수정하여 문제를 해결할 수 있었다. 일부

학생들은 효율적인 문제해결전략을 가지고 있었음에도 교사가 다양한 문제해결전략을 제시하도록 하였을 때, 두 전략을 나누어 사용하는 모습을 보였다. 예를 들면, MT를 선호한다고 했던 학생들은 더 효율적인 GC-MT로도 문제를 해결할 능력을 가지고 있었으나, 다양한 해결 전략을 나타내기 위해 GC, MT로 전략을 나누어 해결하고 선호하는 전략으로 MT를 선택했다. MT를 선택한 이유로 '학교에서 이렇게 표 만들기를 했다.'는 학생의 설명은 교실 관행과 학생의 수학에 대한 태도를 추측하게 했다. 문제해결에 있어서 학생들의 사고가 생산적인 방향으로 진행되도록 추론을 유도하고 학생에게 문제해결을 정당화하도록 요구하는 교실 내 규범의 형성에 관한 노력이 필요하다.

마지막으로 초등과 중등에서 별개의 접근법을 연결하려는 노력이 필요하다. 초등에서는 전략을 사용하여 반복적으로 동일한 문제를 풀고, 중등에서는 초등에서 배웠던 다양한 문제해결전략을 활용하기보다는 대수적인 방정식 풀이를 습득하여 문제를 해결하고, 반복적으로 연습하도록 하고 있다. 이런 과정이 학생들의 문제해결력을 신장시킬 것이라고 기대하긴 어렵다. 중등의 대수적인 문제해결과 연결될 수 있는 문제해결 아이디어를 학생 스스로 발전시킬 수 있도록 노력해야 한다. 그러기 위해서는 문제의 유형이나 특성에 따른 유효한 전략을 학생들이 발견하고, 스스로 자신의 전략을 진화시키며 일반화, 모델화하는 경험을 가져야 한다. 연구 결과에서 나타난 문제해결특성을 고려하여 초등과 중등의 연결성을 강화하는 접근법을 논의할 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2008a). 수학 4-나. (주) 두산.

__________ (2008b). 수학 5-가. (주) 두산.

__________ (2008c). 수학 5-나. (주) 두산.

__________ (2008d). 수학 6-가. (주) 두산.

__________ (2008d). 수학 6-나. (주) 두산.

__________ (2008e). 수학 익힘책 4-나. (주) 두산.

__________ (2008f). 수학 익힘책 5-가. (주) 두산.

__________ (2008g). 수학 익힘책 5-나. (주) 두산.

__________ (2008h). 수학 익힘책 6-가. (주) 두산.

__________ (2008i). 수학 익힘책 6-나. (주) 두산.

__________ (2008j). 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ). 서울 : 대한교과서주식회사.

권석일·임재훈 (2007). 그림그리기 전략을 통한 초·중등수학의 연립방정식 지도 연결성 강화, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> **17(2)**, pp.91-109.

김성준·김한나 (2006). 문장제 유형 및 그 구성요소가 문제해결에 미치는 영향 분석, 교육과정평가연구 **9(2)**, pp.281-309.

노현옥·정은실 (2005) 초등학교 수학 교과서에 나오는 자연수의 사칙 연산 문장제 분석, 진주교육대학교 과학교육연구 **28**, pp.1-19.

박교식 (2001). 제 7차 초등학교 수학과 교육과정에서의 문제해결 관련 내용의 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> **3(1)**, pp.1-23.

박두일·신동선·강영환·윤재성·김인종 (2002). 중학교 수학 8-가, (주) 교학사.

박윤범·박혜숙·권혁천·육인선 (2002). 중학교 수학 8-가, 대한교과서 (주).

방정숙·김상화 (2006). 문제해결과 관련된 제7차 초등학교 수학과 교육과정 및 교과용 도서 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> **8(3)**, pp.341-364.

이준열·장훈·최부림·남호영·이상은 (2002). 중학교 수학 8-가, (주)도서출판 디딤돌.

장혜원(2002). 덧셈 문장제에서 대상의 동질성과 상황의 다양성에 대한 소고, 대한수학교육학회 <수학교육학연구> **12(1)**, pp.17-27.

전평국·신동윤·방승진·황현모·정석규 (2002). 중학교 수학 8-가, 교학연구사.

황우형·김경미(2008). 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **47(4)**, pp.519-543.

Covi, T., Ratcliffe, N., Luninski, C. A. & Warfield, J. (2006). Reasoning and sense-making: What can we expect in grades three through five? In C. W. Langrall (Ed.), *Teachers engaged in research: Inquiry into mathematics classrooms, Grades 3-5* pp.33-48, Charlotte, NC: Information Age.

Kim, H. (2003). Responses to the Bike Trike Problem. *Teaching Children Mathematics,* **9(8)**, pp.457-460.

Mann, R. (2002). Responses to the Football Frenzy Problem. *Teaching Children Mathematics,* **9(3)**, pp.160-162.

________ (2003). Responses to the Package Puzzle Problem. *Teaching Children Mathematics,* **10(4)**, pp.198-202.

Polya (1981). 수학적 발견(Ⅰ) (우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈, 공역). 교우사.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lanbdin, D. V. & Smith, N. L. (2007) Helping children with problem solving. In Reys, Robert E. (Ed.), *Helping children learn mathematics* (8th ed.) pp.119-147, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Robert, M. F. (2002). Problem Solving and At-Risk Students. *Teaching Children Mathematics,* **8(5)**, pp.290-295.

Wiest, L. R. (2008). Problem-solving support for english language learners. *Teaching Children Mathematics* **14(8)**, pp.479-485.

Word problem solving of simultaneous equations by 5th and 6th grade students

Yun, MinJi
Graduate School of Korea National University of Education, Chung-Buk 363-791, Korea
E-mail : minji311@hanmail.net

Pang, JeongSuk
Korea National University of Education, Chung-Buk 363-791, Korea
E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

Problem solving ability can be fostered by dealing with many different types of problems. We investigated how 5th and 6th graders who did not learn traditional algebraic methods might approach the word problems of simultaneous equations. This result reveals that the strategy of guess-and-check serves as a basis for elementary school students in solving simultaneous equations. A noticeable remark is that students used the guess-and-check strategy in various ways. Whereas some students changed a variable given in the problem step by step, others did in a sophisticated way focusing on the relation between two variables. Moreover, some students were able to write an equation which was not typical but meaningful and correct. This paper emphasizes the need of connections between pre-algebraic and algebraic solutions.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : problem solving, word problem, simultaneous equations