韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 3호, 2009. 9. 625-642

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 3, Sep. 2009. 625-642

선형 근사로서의 접선 개념의 교육학적 고찰[1)]

김 영 록 · 이 영 이 (한국외국어대학교 교육대학원)
한 종 민 (한국외국어대학교 수학전공)

우리나라 학교수학에서는 접선에 대한 개념을 학년별로 다양하게 제시하고 있다. 학년이 올라감에 따라 이전 학년에서 학습했던 개념을 점차 수정하면서 최종적으로는 할선의 극한으로서의 접선의 개념에 도달한다.
이 연구에서는 선형 근사로서의 접선 개념을 도입하고 이에 대한 수학 교육학적 의미에 대하여 고찰한다. 이 개념이 비선형 문제의 국소적 측면을 다룰 때 이를 선형화 시켜서 바라보는 현대 수학의 중요한 관점을 내포하고 있음을 살펴본다. 이 개념의 교수학적 변환으로서 접선을 이용하여 제곱근의 값을 근사적으로 구하는 방법을 알아보고, 이를 통하여 접선 개념의 학습에 대한 긍정적인 태도, 흥미, 동기 부여 등의 정의적인 요소들을 증진시킬 수 있음을 논의한다. 또한, 이 개념을 통하여 첨점이 있는 그래프에서 첨점의 좌우에서 서로 다른 접선이 생길 경우 학생들이 가질 수 있는 오류의 의미 분석 및 그 해소 방안을 모색한다.

Ⅰ. 서 론

우리나라 학교수학에서는 접선에 대한 개념을 학년별로 다양하게 제시하고 있다. 7차 교육과정 개정안에 따르며 접선의 개념이 처음 도입되는 시기는 중학교 1학년의 원과 직선의 위치관계 단원으로 접선의 정의를 '원과 한 점에서 만나는 직선'으로 제시한다. 원을 맥락으로 하여 제시하는 접선의 개념은 중학교 3학년에서 다시 한 번 학습된다. 고등학교 1학년에서는 원을 맥락으로 하지 않고 이차함수의 그래프와 직선과의 위치 관계를 맥락으로 하여 '이차함수와 직선의 방정식의 교점이 만족시키는 방정식이 중근을 갖는 경우'에 이 직선을 접선으로 제시한다. 마지막으로 미적분과 통계 기본, 수학Ⅱ 과정에서는 '할선의 극한'으로 접선의 개념을 도입하고 미분계수가 접선의 기울기를 의미함을 이해하도록 한다. (교육부, 2006)

학교수학의 교육과정에서 접선 개념이 중학교 1학년 이후 학년급이 올라감에 따라 반복적으로 다루어지고 있으며 접선을 다루는 맥락도 변화되어 가는 것을 고려해 볼 때, 학습자가 이전 학년에서 습득한 개념을 반성 및 수정하여 새로운 개념을 형성하는 것은 학습과정에서 필수적인 것이다. 접선을 다루는 맥락이 풍부해지면 이전에 학습한 접선 개념에 대한 반례가 출현하기 때문에 기존의 개념을 반성 및 수정하여 새로운 개념으로 재구성하는 것이 요구된다. 이전 학년에서 경험한 접선 개념

---

1) 이 연구는 2009학년도 한국외국어대학교 교내학술연구비의 지원에 의해 이루어진 것임.
* 접수일(2009년 7월 31일), 게재확정일(2009년 8월 14일)
* ZDM 분류 : I40
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 선형 근사, 접선

은 새로운 맥락에서 도입되는 접선을 포함할 수 있는 방향으로 수정되어야 하는데, 이 과정에서 기존의 학습 경험이 새로운 개념을 받아들이는데 인식론적 장애를 불러올 수 있다. 예를 들면, Vinner(1982)는 접선의 개념을 '한 점에서 원에 스치는 직선'으로 받아들인 학습자는 원이 아닌 다른 곡선에서도 이 곡선에 대한 접선은 곡선과 반드시 한 점에서 스치고 지나가야 한다는 인식을 가져올 수 있음을 지적하였다. 이러한 인식을 가지게 되면 $y = x^3$의 그래프의 원점에서의 접선이 곡선을 통과하게 된다는 사실을 받아들이기 쉽지 않다. 이와 같이 특정한 맥락에서는 적합한 반응을 생산해내지만, 그 맥락 밖에서는 틀린 응답을 생성해내는 장애는 탐구되어야 할 지식에서의 그 형성적 역할 때문에 피할 수 없는 것으로 이의 극복을 위해서는 개념을 반성하고 수정할 수 있는 교수학적 상황을 구성하여 제공하는 것이 중요하다. (우정호, 2000)

임재훈과 박교식(2004)은 Lakatos의 수리철학에 바탕을 둔 오류주의적 관점에서 학습자가 기존에 가지고 있던 접선 개념을 반례의 출현에 따라 수정 및 재구성하는 경험을 하게 하는 학습 지도 방안을 제시하였다. 이들은 학교수학에서 등장하는 접선 개념을 기하적 접선 개념과 함수적 접선 개념으로 분류하였다. 기하적 개념은 곡선과 한점에서 만나는 직선, 곡선을 스쳐 지나가는 직선, 할선의 극한 등 세 가지로 분류되고, 함수적 개념은 직선의 방정식과 곡선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식이 중근을 갖게 되는 직선 및 곡선 위의 한 점을 지나며 기울기가 그 점에서의 미분 계수와 같은 직선 등 두 가지로 분류된다. 이들은 학교수학에서 순차적으로 도입되는 각 개념들에 대한 반례가 출현함에 따라 학습자가 이를 수정 및 개선하는 학습 경험이 이루어지도록 하는 교수 방안을 7단계로 제시하고 있다.

한편, 학교수학에서 접선의 개념을 다루는 맥락은 원과 직선의 위치 관계, 포물선과 직선의 위치 관계, 이차 곡선과 직선의 위치 관계, 미분 가능한 함수의 그래프와 직선의 위치 관계 순으로 점차 확대되어 가고 있다. 이전 맥락에서 추출할 수 있는 접선의 개념들은 맥락이 이전의 경우를 포괄하는 방향으로 확장되어 가면서 그 일부를 잃게 된다. 원과 직선과의 위치 관계로부터 얻어진 접선 개념은 도입 방법이 원의 중심에서 직선까지의 거리와 원의 반지름의 비교, 판별식 이용, 미분계수 이용 등 풍부하지만, 접선 개념을 원과 포물선을 맥락으로 하는 경우로 확장할 경우에 원의 중심에서 직선까지의 거리와 원의 반지름의 비교는 그 역할을 멈추게 된다. 어떤 수학적 개념이 하위 단계의 맥락에서는 여러 가지 동치 개념을 허용하지만 상위 단계의 맥락으로 확장될 때 그 풍부함을 잃게 되는 이러한 현상은 수학의 여러 분야에 종종 나타난다. 예를 들어 컴팩트 집합(compact set)의 개념에 대하여 유클리드 공간에서는 유계이고 닫힌 집합, 임의의 수열이 수렴하는 부분 수열을 갖게 되는 집합, 임의의 열린 덮개(open cover)가 유한 개의 부분 덮개를 갖게 되는 집합 등이 모두 동치이지만, 거리공간(metric space), 일반 위상 공간 등으로 맥락이 확장되어 가면서 이러한 동치 개념들의 일부가 사라지게 된다.

적용되는 맥락을 확장하여 가면서 가장 기본이 되는 개념들을 추출하는 과정은 수학의 연구 체계에서 중요한 부분이다. 이러한 과정의 특징 중 하나는 맥락이 확장되어 가면서 학습자에게 이전 맥락을 포괄하도록 하는 개념의 이해에 더욱 추상적인 사고를 요구한다는 점이다. 개념을 보다 정교하

게 다듬으면서 추상화하는 과정은 수학자들에게는 학습 및 연구의 충분한 동기가 된다. 확장되는 개념의 학습에 대한 이러한 동기 부여는 학교수학에서도 볼 수 있다. 예를 들면, 조영미(1999)는 각은 중학교에서 두 반직선으로 이루어지는 도형으로 정의되지만 고등학교에서는 일반각으로 확장되어 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ 로 정의됨을 지적하였다. 접선의 개념에 대한 경우를 살펴보면 원과 직선과의 관계로부터 접선의 개념을 도입하며 이후에 맥락을 확장하여 가면서 개념의 수정이 필요함을 이해하는 과정 자체가 '접선을 왜 배워야 하는가'에 대한 학습 동기가 될 수 있다. 그러나 학교수학에서는 직관적 이해가 가능한 맥락으로부터 어떤 개념을 도입하고 보다 폭 넓은 맥락에 적용하기 위하여 그것을 정교하게 추상화하는 과정을 학습자가 학습에 대한 동기로 순수하게 받아들이기에는 어려운 면이 있다. 학교수학에서는 학습되고 있는 개념이 맥락의 확장에 따른 추상화의 어느 단계에서 그 맥락의 범위 안에서 이해하고 받아들일 수 있는 구체적인 문제에 사용될 수 있는 예를 제시한다면 학습에 대한 동기 부여가 보다 효과적일 수 있다. 접선의 개념에 대한 경우 맥락이 어느 정도 확장된 고등학교 과정에서 접선의 방정식의 구체적 쓰임새를 제시한다면 학생이 학습에 대한 동기 부여를 보다 더 잘 받아들일 수 있다.

접선의 구체적 쓰임새를 제시하기 위해서는 접선의 개념 발생 및 발전 과정을 역사적으로 고찰하여 보고 이를 교수학적으로 변환할 수 있는지를 살펴보는 것이 필요하다. 조영미(1999)에 의하면 유클리드 원론의 원과 직선 사이의 관계 부분에서 원에 대한 접선 개념이 처음 등장하는데, 이는 실제적 문제를 해결하려는 관심보다는 도형과 도형 사이의 관계를 찾는 지적 호기심에서 비롯된 것으로 볼 수 있다. 17세기에는 한 점 P에서 어떤 물체의 운동 방향은 물체가 만드는 경로의 P에서의 접선 방향이라는 사실이 밝혀지면서, 접선을 구하는 문제가 중요시되었다. 이 시기에는 접선을 구하기 위하여 벡터 방법, 해석적 방법, 암묵적 무한소 방법 등을 사용하였다. 조영미(1999)는 그리스 시대로부터 17세기 전반기의 역사를 통하여 접선을 구하는 문제가 바뀜에 따라 접선을 구하는 방식 및 개념이 달라짐을 지적하였다. 19세기 이후 수학은 눈부신 발전을 이룩하였는데, 접선 개념도 그 의미 및 맥락이 매우 큰 폭으로 변하게 되었다. 일차원 그래프에 대한 접선 개념은 고차원 공간의 그래프에 대한 접평면 개념으로 확대되며, 이는 다시 다양체(manifold)의 접평면, 접다발(tangent bundle) 개념으로 이어진다. 현대수학에서 접선 개념은 이러한 기하적인 추상화 및 일반화의 단계를 넘어 비선형 문제에 대한 선형 근사의 의미로까지 확대된다. 비선형으로 주어지는 어떠한 양을 직접 파악하기 어렵기 때문에 이를 선형화시켜서 근사시키는 방법은 현대수학의 도처에서 이용되고 있는데, 이는 현대 수학의 중요한 연구 방법 중의 한 가지이다. 이와 같은 현대수학의 관점에서 볼 때 어떤 비선형 그래프의 한 점에서의 접선은 그 점에서 그래프를 선형 함수로 근사시키는 것으로 볼 수 있다. 즉, 비선형 함수 $y=f(x)$의 정보를 직접 파악하는 것이 어려울 때, 한 점 a에서 $y=f(x)$의 그래프에 대한 접선을 이용하면 점 a근처에서 그 곡선의 정보를 유추할 수 있게 된다. 선형 근사로서의 접선 개념을 적용할 수 있는 맥락은 수학의 다양한 분야에서 풍부하게 얻을 수 있는데, 이 중에서 학습자의 학습 동기를 고취시킬 수 있는 맥락을 적절한 교수학적 변환을 통하여 학교 수학에서 다룰 수 있도록 하는 것은 교육적으로 의미 있는 일이라고 할 수 있다.

이 연구에서는 접선 개념에 대한 학습 동기를 증진시키기 위하여 접선의 응용을 제시하는 방안으로 선형 근사로서의 접선 개념을 이용하는 방법을 모색해 보고자 한다. 먼저, 선형 근사로서의 접선에 대한 의미를 살펴보고, 이에 대한 교수학적인 변환으로 제곱근의 근삿값을 구하는 방안을 고찰해 본다. 또한, 제곱근의 근삿값을 구하는 문제가 접선의 방정식의 구체적 응용이 될 수 있음을 알아보고, 이는 다음과 같은 수학교육학적 의미를 내포하고 있음을 살펴본다. 접선의 맥락이 확장되어 갈 때 개념을 적절히 반성 및 수정하는 과정에서 개념은 점점 추상화된 형태로 제시되며 학습의 난이도도 높아진다. 이 때 접선의 방정식의 구체적 응용으로 제곱근의 근삿값을 구하는 방법을 제시함으로써 추상화로부터 오는 학습의 어려움의 해소 및 접선의 학습에 대한 흥미, 동기 부여와 같은 정의적인 측면에 대한 긍정적인 요소를 제공할 수 있음을 고찰한다. 두 번째로, 선형 근사로서의 접선 개념이 브루너가 제시하는 나선형 교육의 최정점이 될 수 있음을 살펴본다. 마지막으로, 선형 근사로서의 접선에 대한 개념이 Tall(1986)의 연구에 나타난 접선에 대한 오개념을 해소하는데 도움을 줄 수 있음을 고찰해 본다.

Ⅱ. 본 론

본론에서는 선형근사로서의 접선의 의미에 대하여 살펴보고, 이를 학교수학에 적용할 수 있도록 하는 교수학적 변환의 한 가지 방안으로 함숫값의 근삿값을 계산하는 문제에 대하여 모색해 본다. 또한, 선형근사로서의 접선의 교수에 대한 수학교육학적 의미에 대하여 고찰해 보고, 학교 현장에서 수업할 수 있는 교시안을 제시하도록 한다.

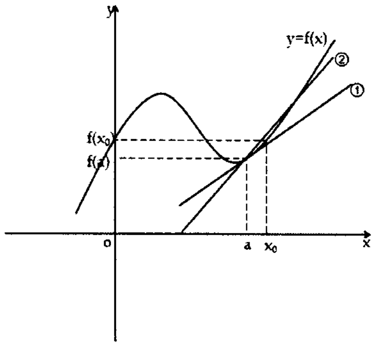
1. 선형 근사로서의 접선의 의미

현 교육과정에서 접선 개념은 원과 직선 사이의 관계를 맥락으로 처음 도입되며, 최종적으로는 기하적인 방법을 도입하여 접선을 할선의 극한으로 정의하고, 미분 가능한 함수의 경우에 접선의 기울기는 미분 계수가 됨을 제시한다. 일차원 그래프에 대한 접선 개념은 고차원 공간의 그래프에 대한 접평면 개념으로 확대되며, 이 때 할선의 극한이라는 맥락은 더 이상 적용하기 어렵다. 일반적으로 n차원 공간의 그래프에서 한 점에서의 접평면(tangent space)은 그 점에서의 법벡터(normal vector)에 수직인 평면으로 정의된다. 또한, 이 개념은 다시 다양체(manifold)의 접평면 및 접다발(tangent bundle)로 확대되는데 이는 미분기하학의 연구에 필요한 매우 기본적인 개념이 된다. 현대수학에서 접선 개념은 이러한 기하적인 추상화 및 일반화의 단계를 넘어 비선형 문제에 대한 선형 근사의 의미로까지 확대된다. 예를 들면, '일계 연립 미분방정식

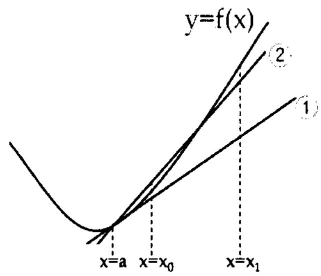
$$x' = f(x),$$
$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n,$$
$$f : R^n \to R^n$$

에서 x_0가 균형해(equilibrium solution), 즉 $f(x_0)=0$을 만족한다고 할 때, $n\times n$행렬 $A=Df(x_0)$의 고유값의 실수부가 0이 아니면, x_0가 원래 방정식에 대한 해로서 가지는 안정성(stability)에 관한 성질은 미분방정식 $x'=Ax$에서 자명해 $x=0$가 가지는 안정성에 관한 성질과 같다'는 Hartman-Grobman 정리를 생각해 볼 수 있다 (Perko, 2001). 즉, 적당한 조건하에서 비선형 미분방정식의 균형해의 정성적 성질은 그 해에서 이 방정식을 선형화한 방정식의 자명해의 정성적 성질과 같게 된다. 이처럼 비선형 문제의 국소적인 측면을 선형화 시켜서 바라보고 해결하려고 하는 관점은 현대 수학의 중요한 연구 방법 중의 한 가지이다. 위의 예에서 선형화된 미분방정식 $x'=Ax$는 처음 미분방정식 $x'=f(x)$의 우변을 테일러 급수로 전개했을 때 1차 항까지만 고려한 것이다. 이를 일변수 함수 $f(x)$의 경우에 적용하면 한 점 a 근처에서 이 함수의 국소적 성질을 a에서 $f(x)$의 1차 테일러 다항식 $f(a)+f'(a)(x-a)$을 통하여 살펴보는 것에 해당한다. 이와 같은 현대수학의 관점에서 볼 때 접선은 비선형 함수를 선형함수로 근사시킨 것으로 볼 수 있다. 즉, 비선형 함수 $y=f(x)$의 정보를 직접 파악하는 것이 어려울 때, 한 점 a에서 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 방정식을 이용하면 점 a근처에서 그 곡선의 정보를 유추할 수 있게 된다.

일차원 그래프의 한 점에서의 접선은 그 점에서의 최적 선형 근사를 제공해 준다. 즉, 그래프 위의 한 점을 지나는 모든 직선 중에서 그 점 근처에서 그래프에 가장 근사한 직선은 접선이 된다. 이를 그림으로 나타내면 <그림 1>과 같다. <그림 1>에서 점 $(a,f(a))$을 지나는 임의의 직선 ②과 이 점에서의 접선 ①에 대하여 x_0가 a에 충분히 가까우면 접선의 방정식 ①에 x_0를 대입한 값이 직선 ②의 방정식에 x_0를 대입한 값보다 $f(x_0)$에 더 가깝게 된다. 점 $(a,f(a))$ 근처의 그림을 <그림 2>와 같이 더 확대해서 살펴보면 논의가 더 명확해진다. <그림 2>에서 $x=x_1$일 때에는 직선 ②가 접선 ①보다 곡선 $y=f(x)$에 더 가깝지만, a에 충분히 가까운 점, 예를 들면 $x=x_0$일 때에는 직선 ②보다 접선 ①이 곡선 $y=f(x)$에 더 근사하다.



<그림 1>



<그림 2>

다음의 정리는 이러한 내용, 즉 한 점에서 접선이 그 점 근방에서 곡선에 대한 최적 선형 근사임을 보여준다. 더 일반적으로 김미경(2005)은 한 점에서 함수 $f(x)$에 대한 n차 테일러 다항식이 모든 n차 다항식 중 $f(x)$에 가장 근사함을 증명하였다. 이 논문에서는 김미경(2005)의 연구 내용을 바탕으로 접선이 최적 선형 근사임을 고등학교 교과 과정에서 이해될 수 있도록 함수의 극대·극소를 이용하여 증명하였다.

[정리] 미분 가능한 함수 $f: R \to R$에 대하여 f'이 연속이라 하자. 한 점 $(a, f(a))$을 지나는 접선의 방정식을 $h(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$라 하고 $(a, f(a))$을 지나는 임의의 직선의 방정식을 $g(x) = m(x-a) + f(a)$라 할 때, 적당한 실수 $\delta = \delta(m) > 0$가 존재하여 $|x-a| < \delta$이면, $|f(x) - g(x)| \geq |f(x) - h(x)|$이다.

즉, 충분히 a에 가까운 x에 대하여, 점 $(a, f(a))$을 지나는 임의의 직선보다 이 점에서의 접선이 그래프에 더 가깝다.

[증명] 함수의 극대·극소 및 연속의 개념을 이용하여 정리를 증명한다. 함수 F를 $F(x) = |f(x) - g(x)|^2 - |f(x) - h(x)|^2$로 정의하고 $F(x)$를 전개하면,

$$\begin{aligned} F(x) &= (f(x)^2 - 2f(x)g(x) + g(x)^2) - (f(x)^2 + 2f(x)h(x) + h(x)^2) \\ &= -2f(x)(g(x) - h(x)) + (g(x) + h(x))(g(x) - h(x)) \\ &= (g(x) - h(x))[g(x) + h(x) - 2f(x)] \\ &= (m - f'(a))(x-a)[(m + f'(a))(x-a) + 2f(a) - 2f(x)] \end{aligned}$$

가 된다. 점 a근처에서 F 의 극값을 구하기 위하여 F 를 미분하면,

$$\begin{aligned} F'(x) &= (m - f'(a))\,[\,(m + f'(a))(x-a) + 2f(a) - 2f(x)\,] + \\ &\qquad (m - f'(a))(x-a)[\,m + 2f'(a) - 2f'(x)\,] \\ &= (m - f'(a))[\,2(m + f'(a) - f'(x))(x-a) - 2(f(x) - f(a))] \\ &= 2(x-a)[\,(m - f'(a))((m + f'(a) - f'(x)) - (m - f'(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}\,] \\ &= (x-a)G(x) \end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서,

$$G(x)=(m-f'(a))(m-f'(a)+f'(a)+f'(a)-f'(x))-(m-f'(a))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=(m-f'(a))^2+(m-f'(a))(f'(a)-f'(x))+$$
$$f'(a)(m-f'(a))-(m-f'(a))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=(m-f'(a))^2+(m-f'(a))(f'(a)-f'(x))-(m-f'(a))[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)]$$

이다. f가 a에서 미분 가능하고, f'이 a에서 연속이므로, 이 식에서 위의 마지막 두 항은 x가 a에 가까와지면, 0으로 수렴한다. 그러므로, x가 a에 충분히 가까울 때 $G(x)>0$이 된다. 따라서 $F'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 부호가 -에서 +로 바뀌므로 $F(a)$는 $x=a$ 근처에서 극솟값이 된다. 그런데, $F(a)=0$이므로 $x=a$ 근처에서 $F(x)\geq 0$이 성립하게 된다. □

위의 증명에서 x가 a에 가까울 때 $G(x)>0$임을 조금 더 엄밀하게 보이면 다음과 같다. f가 a에서 미분 가능하고, f'이 a에서 연속이므로, 적당한 $\delta>0$가 존재하여 $|x-a|<\delta$이면,

$$|f'(x)-f'(a)|<\frac{|m-f'(a)|}{4},\qquad |\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)|<\frac{|m-f'(a)|}{4}$$

이 된다. 따라서 $|x-a|<\delta$이면,

$$G(x)\geq(m-f'(a))^2-|m-f'(a)|\cdot|f'(x)-f'(a)|-$$
$$|m-f'(a)|\cdot|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)|$$
$$\geq(m-f'(a))^2-\frac{|m-f'(a)|^2}{4}-\frac{|m-f'(a)|^2}{4}$$
$$=\frac{|m-f'(a)|}{2}>0$$

이 된다.

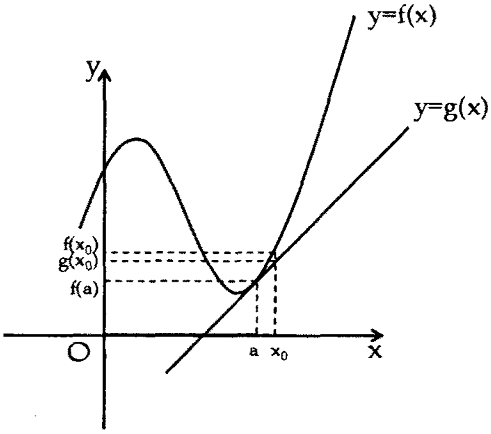
지금까지 논의한 바를 살펴보면, 현대수학의 '국소적 비선형 문제의 선형근사'라는 관점에서 볼 때 일차원 그래프에서 한 점에서의 접선은 그 점 근처에서 곡선에 대한 최적의 선형근사가 됨을 알 수 있다.

2. 교수학적 변환 : 함숫값의 근삿값 계산

접선의 방정식을 선형 근사로 보고 이를 학교수학에 도입할 때 가장 고려해야 할 사항은 현 교육과정의 학습 범위를 벗어나지 않으면서 학생이 그 의미를 음미할 수 있도록 하는 것이다. 앞서 논의한 바와 같이 현 교육과정에서 접선의 개념은 중학교 1학년부터 고등학교 2학년에 걸쳐 등장하며 학

년 급이 올라감에 따라 기존 개념을 수정 및 반성하도록 하는 새로운 맥락이 제시된다. 또한 새롭게 도입되는 개념이 기존의 맥락을 포함하도록 하는 과정에서 점점 추상화의 단계를 거치게 된다. 따라서 선형근사로서의 접선 개념의 학습을 위하여 현 교육과정에 등장하는 접선의 개념들을 그 하위 단계로 두는 새로운 맥락을 제시하는 것은 학생들에게 새로운 추상화의 과정을 요구하게 되어 학습의 난이도만 높이는 결과를 가져올 수 있다. 현 교육과정에서 제시되고 있는 접선 개념 및 이것이 적용되는 맥락의 범위 안에서 선형근사로서의 접선 개념의 도입이 이루어져야 하며 기존 개념의 이해에 도움이 되는 방향으로 교수학적 변환이 이루어지는 것이 바람직하다고 볼 수 있다.

이 연구에서는 선형근사로서의 접선 개념에 대한 교수학적 변환의 한 가지 방안으로 접선의 방정식을 이용하여 주어진 함숫값의 근삿값을 계산하는 방법을 고찰한다. 접선의 방정식을 이용하여 주어진 함숫값의 근삿값을 계산하는 것은 잘 알려진 방법으로 이를 그래프로 나타내면 <그림 3>과 같이 표현할 수 있다. a에서 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면 x_0가 a에 충분히 가까울 때, $f(x_0)$과 $g(x_0)$의 차이가 작게 되어 $g(x_0)$를 $f(x_0)$의 근삿값으로 볼 수 있다. a에서의 접선이 a 근처에서 $y=f(x)$의 그래프에 대한 최적의 선형 근사가 됨을 고려해 볼 때, $f(x_0)$의 값을 비교적 계산이 용이한 일차함수의 계산으로 근사하게 구할 수 있게 된다.



<그림 3>

이 논문에서는 선형근사로서의 접선의 개념을 이용하여 함숫값의 근삿값을 계산하는 방법에 대한 예제로 $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하는 문제를 고찰해 보고 이를 통하여 학습자가 다양한 제곱근의 근삿값을 구할 수 있도록 한다. 학생은 제곱근의 근삿값을 구하는 활동을 통하여 접선의 방정식을 구체적인 문제에 활용하는 경험을 할 수 있으며 이는 접선의 방정식을 학습하는 데 있어서 중요한 동기 부여가 될 수 있다. 접선의 개념이 중학교 1학년부터 고등학교 2학년까지 과정에 걸쳐 등장하는 것과 각 단계별로 도입되는 맥락이 변화됨을 고려해 볼 때, 접선의 구체적인 쓰임새 및 실용성의 도입도 그 맥락에 맞도록 제시되어야 할 것이다. 중학교 교과과정에서는 원을 맥락으로 하는 접선 개념만이

도입되므로 근삿값을 구하는 문제를 제시하기는 어렵다. 첫 번째로 가능한 맥락은 고등학교 1학년 과정에서 판별식을 사용하여 포물선에 접하는 접선의 방정식을 구하는 방법을 들 수 있으며, 두 번째는 미적분과 통계 기본, 수학 II 과정에서 미분계수를 구하여 접선의 방정식을 찾는 방법을 생각할 수 있다. 이 논문에서는 이러한 두 가지 맥락을 이용하여 제곱근의 근삿값을 구하는 문제를 고찰해 보고, 이를 통하여 접선의 구체적인 쓰임새 및 실용성을 음미해 볼 수 있도록 한다.

3. 미분계수를 이용하는 방법

$\sqrt{2}$는 $y=\sqrt{x}$에서 $x=2$를 대입한 값과 같다. 접선의 방정식을 이용하여 $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하기 위하여 가장 먼저 할 일은 제곱근의 값을 정확히 알 수 있으면서 2에 가까운 수를 찾는 것이다. 예를 들어 2에 가까운 제곱수 $1.4^2=1.96=\dfrac{196}{100}$을 생각해 볼 수 있다. 먼저, $f(x)=\sqrt{x}$라 두고 f를 미분하면, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 $f'(1.96)=\dfrac{1}{2.8}$이다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프의 $x=1.96$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면 $g(x)=\dfrac{1}{2.8}(x-1.96)+1.4$가 된다. 여기에서 $x=2$를 대입하면,

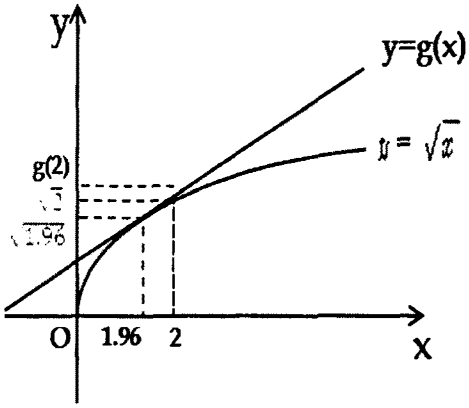
$$g(2)=\frac{1}{2.8}(2-1.96)+1.4=1.4+\frac{1}{70}=1.41428\cdots$$

를 얻는다. 그런데 $\sqrt{2}=1.4142135614\cdots$이므로 접선의 방정식을 이용하여 구한 근삿값이 원래의 값과 소수점 4번째 자리까지 일치한다. 이 과정을 그림으로 나타내면 <그림 4>와 같다. <그림 4>에서 2와 1.96의 차이가 아주 작기 때문에 그림에서 살펴본 것과 같이 $x=2$일 때 곡선과 직선의 차이가 아주 작은 것을 알 수 있다. 따라서, $y=\sqrt{x}$에 2를 대입한 값의 근삿값으로 $y=\sqrt{x}$의 $x=1.96$에서의 접선의 방정식에 2를 대입한 값을 이용할 수 있다. 즉, 비선형 함수 $f(x)=\sqrt{x}$를 $x=1.96$ 근처에서 선형함수 $g(x)=f'(1.96)(x-1.96)+f(1.96)$로 근사시키고 이로부터 $f(2)$의 근삿값으로 $g(2)$를 얻었다.

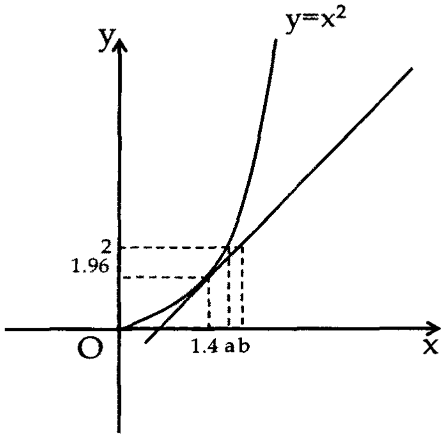
2에 더욱 가까운 제곱수를 생각하면 더 나은 근삿값을 얻을 수 있다. 예를 들어 $\sqrt{2}=\sqrt{\dfrac{20000}{10000}}$인 것을 고려하여 20000에 가까운 완전제곱수를 찾으면, $141^2=19881<20000<20164=142^2$ 이므로 141^2이 20000에 더 가까운 값임을 알 수 있다. 이제 $x=\dfrac{19881}{10000}=1.9881$에서 $y=\sqrt{x}$의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라 하고 $h(x)$를 구하면,

$$h(x)=f'(1.9981)(x-1.9981)+f(1.9981)=\frac{1}{2.82}(x-1.9981)+1.41$$

를 얻는다. 따라서, $h(2)=1.41+\dfrac{0.0019}{2.82}=1.414219\cdots$를 얻고 이것을 $\sqrt{2}$의 근삿값으로 본다. 이 값은 실제 $\sqrt{2}$의 값과 비교해 볼 때, 소숫점 다섯번 째 자리까지 일치하여 처음 얻었던 것보다 더 좋은 근삿값이 된다.



<그림 4>



<그림 5>

위의 과정을 요약하면 다음과 같다. $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하기 위하여 $x=2$ 근처의 완전제곱수를 찾은 후 이 점에서 $y=\sqrt{x}$의 그래프의 접선의 방정식을 구하고, 이 접선의 방정식에 $x=2$를 대입하여 근삿값을 얻는다. 이와 같이 $f(x_0)$의 값을 구하기 직접 어려울 때, x_0근처의 한 점 a에서 함숫값을 계산할 수 있는 경우에는 a에서의 접선을 구하고 이 접선의 방정식에 x_0를 대입한 값을 $f(x_0)$의 근삿값으로 생각할 수 있다. 이 때, a는 $f(a)$및 $f'(a)$의 값을 구하기 쉬운 값이어야 한다. 예를 들어 $1.7^2=2.89$임을 이용하여 $x=2.89$에서 $y=\sqrt{x}$의 접선의 방정식에 3을 대입하면 $\sqrt{3}$의 근삿값을 구할 수 있다. 여기서 접선의 방정식은 비선형 함수 $y=\sqrt{x}$에 대한 근사로 이해할 수 있고, 이러한 활동을 통해 학생들에게 접선을 구하는 문제에 대한 동기부여를 할 수 있다. 즉, 한 점에서 비선형 함수의 정확한 값을 구하는 것이 어려울 때, 그 점에 가까운 다른 점에서의 접선을 이용하여 그 값을 근사적으로 얻을 수 있으므로 접선의 방정식을 학습하는 것이 의미 있게 된다.

4. 판별식을 이용하는 방법

접선의 방정식을 구할 때 미분계수를 이용하지 않고 판별식만을 사용할 수 있는 맥락에서 $\sqrt{2}$의

근삿값을 구하는 문제를 해결하기 위한 방안을 찾아본다. 앞서와 같이 가장 먼저 할 일은 제곱근의 값을 정확히 알 수 있으면서 2에 가까운 수를 찾는 것이다. 예를 들어 2에 가까운 제곱수 $1.96=1.4^2$을 생각해 볼 수 있다. $f(x)=x^2$이라 하고 1.4에서 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 점 1.4에서 접선의 기울기를 m이라 하면, 접선의 방정식은 $g(x)=m(x-1.4)+1.96$이므로 이를 $f(x)=x^2$와 연립하면 $x^2-mx+1.4m-1.96=0$을 얻는다. 접선과 포물선이 한 점에서 만나므로 판별식

$$D=m^2-4(1.4m-1.96)=(m-2.8)^2=0$$

을 얻고, 이로부터 $m=2.8$임을 알 수 있다. 따라서, $g(x)=2.8(x-1.4)+1.96$이 된다. 이제 제곱해서 2가 되는 수를 a, 즉 $f(a)=2$를 만족하는 수를 a라 하고, $g(b)=2$를 만족하는 수를 b라 할 때, 위의 <그림 5>에서 a와 b의 차가 작으므로 b를 a의 근삿값으로 볼 수 있다. $g(b)=2$로부터

$$b=1.4+\frac{0.04}{2.8}=1.4+\frac{1}{70}=1.41428\cdots$$

를 얻는다. 그런데 $\sqrt{2}=1.4142135614\cdots$이므로 접선의 방정식을 이용해 근삿값이 원래의 값과 소수점 4번째 자리까지 일치함을 알 수 있다.

5. 수학교육학적 의미

선형 근사로서의 접선 개념에 대한 교수의 수학교육학적 의미는 접선의 활용 예시를 통한 학습동기, 흥미, 태도 등 정의적 영역에 대한 긍정적인 측면 강화, 현대 수학의 관점에서 바라본 접선의 의미에 대한 이해, 곡선이 첨점이 있는 경우에 학생들이 접선에 대하여 가지는 오개념의 의미 분석 및 해소 방안의 제시를 들 수 있다.

이민찬·길양숙(1998)에 의하면 우리나라 학생들의 수학에 대한 흥미, 태도, 학습 동기 등의 정의적 특성은 학년 급이 올라갈수록 하락하는 경향을 보이고 있다. 학습 동기, 흥미, 태도 등의 정의적 측면은 학생들의 학습 성과에 적지 않은 영향을 미치므로 교수·학습 방법에서 이를 증진시키는 것이 중요하다고 볼 수 있다. 7차 교육과정 개정안에서는 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 교수·학습 방법에서 수학에 대한 흥미, 관심, 자신감을 가질 수 있게 학습 동기와 의욕을 유발하도록 하고 있다(교육부, 2006).

학교수학에서 접선의 개념은 처음부터 모든 맥락을 포괄할 수 있도록 도입할 수 없기 때문에 중학교 1학년부터 고등학교 수학 II 과정까지 맥락이 확장되는 방향으로 수정되어 제시된다. 이러한 교육과정에서 접선의 학습에 대한 동기 부여, 즉 '접선 개념을 왜 학습해야 하는가'에 대한 답을 찾기

는 쉽지 않아 보인다. 우선 생각할 수 있는 동기로는 맥락의 확장에 따른 개념의 정교한 재구성을 들 수 있다. 학교수학에서 접선 개념은 곡선과 한점에서 만나는 직선, 곡선을 스쳐 지나가는 직선, 할선의 극한 등의 순서로 진행되며, 적용되는 맥락은 원과 직선의 위치 관계, 포물선과 직선의 위치 관계, 다항함수 및 미분 가능한 함수의 미분 계수로 확장이 된다. 한 개념이 적용될 수 없는 맥락이 도입되면 이 개념의 반성 및 수정을 통하여 새로운 개념이 제시되고, 새롭게 제시된 개념이 적용되는 맥락은 이전 개념이 적용되는 맥락을 포함하는 방향으로 확장되어 간다. 맥락의 확장에 따른 개념의 반성 및 수정은 수학적 개념 및 지식이 발전해 가는 중요한 패턴 중 하나로서 전문적인 수학 연구 및 수학 학습에서 매우 중요하며 그 자체가 학습 및 연구의 동기가 될 수 있다. 학교수학에서 원과 직선 사이의 관계로부터 도입된 접선의 개념이 보다 많은 맥락을 포괄할 수 있는 방향으로 반성 및 수정되어 가는 과정을 배우는 그 자체가 접선에 대한 학습 동기가 될 수 있다. 서론에서 논의한 바와 같이 이 과정의 특징 중 하나는 적용되는 맥락이 커질수록 개념의 점진적인 추상화를 요구하며 이에 따른 학습의 난이도도 상승하게 된다. 이 때, 자칫하면 학생들이 높아진 학습 난이도로 인하여 새롭게 도입되는 개념의 이해 없이 암기에만 치중할 경우 개념의 반성 및 수정이라는 본연의 학습 동기를 상실할 우려가 있다.

적용되는 맥락의 확장에 따른 개념의 재구성 이 외에 고려할 수 있는 접선 개념의 학습 동기 및 흥미 증진 방안 중의 하나는 접선을 활용하여 해결할 수 있는 문제를 제기하는 것이다. 7차 교육과정 개정 고시에 따른 검정도서 편찬상의 유의점을 보면 교과서 구성 체계에서 '동기유발 등을 위한 참고 자료'를 제시할 수 있도록 하고 있다 (교육부, 2006). 예를 들면 수학 II의 정적분의 활용 단원의 도입 부분에서'정적분을 이용하여 백두산 천지와 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다' 와 같은 내용을 제시할 수 있다 (박두일 외, 2008). 이를 통하여 학생들은 적분을 실생활에 어떻게 활용할 수 있는지 알게 되고, 정적분 학습에 대한 흥미, 긍정적인 태도 및 학습 동기를 높일 수 있다. 마찬가지로 고등학교 교과 과정의 접선에 대한 학습에서도 이와 비슷하게 학생들에게 동기부여를 할 만한 내용을 제시해 볼 수 있다. 예를 들면, '접선의 방정식을 이용하여 실수의 제곱근의 값을 근사적으로 구할 수 있다.' 이와 같은 관점에서 볼 때 선형 근사로서의 접선 개념의 교수학적 변환의 한 예로 제시한 $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하는 문제는 접선 개념을 적용하여 주변 문제를 해결하는 활동을 제공해 줄 수 있으며 접선 개념의 학습에 대한 흥미, 동기 부여 및 긍정적인 태도를 함양할 수 있을 것으로 보인다.

선형 근사로서의 접선의 교수에 대한 두 번째 수학교육학적 의미는 현대 수학의 관점에서 바라본 접선 개념에 내재된 기본 구조를 가르치는 것이라고 볼 수 있다. 현대수학의 관점에서 고려해 볼 때 접선은 주어진 곡선의 한 점에서의 국소적 성질을 파악하는데 중요한 정보를 제공해 주고 있으며, 그 점을 지나는 직선 중에서 곡선에 가장 근사한 직선이 된다. 이러한 접선의 의미를 학생들에게 가르치는 것은 브루너(J. S. Bruner)가 제시한 바와 같이 학생들에게 '지식의 구조'를 가르치는 것이라고 볼 수 있다. 브루너는 자신의 저서 '교육의 과정(The Process of Education, 1963)' 을 통하여 학

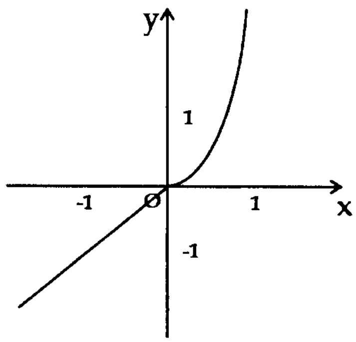
교에서 지식의 구조를 지도할 것을 주장하고 있다. 브루너가 말하는 지식의 구조란 '각 학문의 기저를 이루고 있는 핵심적인 개념과 원리', 즉 단순한 사실들이나 잡다한 현상에 대한 정보가 아니라 이러한 사실이나 현상을 서로 관련짓고 체계화하는 주요 개념이나 원리이다. 또한 브루너에 의하면, 교육에서 어떤 주제를 취급한다고 할 때, 그 주제를 최종적인 형태로 다루는 것이 가능하다고 여겨질 때까지 교육을 연기해서는 안 되며, 그 이전 단계에서 그 주제는 간단한 형태로 도입 되어야 한다. 이때 그 형태는 이후의 단계에서 재구성이 가능해야 한다. 그는 이와 같이 어떤 주제가 더 높은 학년에서 반복적으로 재구성 되어 가도록, 낮은 학년에서부터 지적으로 정직하게 그리고 학생들의 사고방식과 일치하는 방식으로 나선형을 이루어 가도록 해야 하는 '나선형 교육과정의 원리'를 제시하고 있다 (우정호, 2000). 현 교육과정에서 순차적으로 진행되고 있는 접선 개념의 재구성 과정은 브루너가 주장하는 이러한 나선형 원리를 잘 반영하고 있다. 즉, 접선의 개념이 중학교 1학년부터 고등학교 수학 II 과정까지 원과 직선과의 관계, 포물선과 직선의 위치 관계, 할선의 극한 등 기하적인 측면에서 적용되는 맥락이 확장되는 방향으로 단계를 밟아오면서 정립되어 가고 있으며, 그 최종 단계는 미분 가능한 함수의 맥락에 적용되는 할선의 극한으로 볼 수 있다. 선형 근사로서의 접선 개념은 할선의 극한으로서의 접선보다 한 단계 위에 있는 것으로 볼 수 있으며, 현대 수학에서 중요한 연구 방법 체계 중 하나로 국소적 비선형 문제를 선형 근사하여 해결하려는 관점을 포함하고 있는 것을 고려해 볼 때, 나선형 교육의 최종점에 위치하고 있다고 할 수 있다.

선형 근사로서의 접선의 교수에 대한 세 번째 수학교육학적 의미는 접선에 대한 오개념 해소에 기여할 수 있는 가능성이다. 임재훈과 박교식(2004)에 의하면 현 교육과정에서 제시하는 기하적 접선 개념은 '곡선과 한 점에서 만나는 직선', '곡선을 스치고 지나가는 직선', '할선의 극한'으로 분류된다. 최적 선형 근사로서의 접선 개념은 한 점에서의 접선이 그 점 근처에서 곡선과 가장 근사한 직선임을 나타내고 있으므로 이를 추가적인 기하적 접선 개념으로 볼 수 있다. 즉, 선형 근사로서의 접선은 '한 점 근처에서 곡선과 가장 근사한 직선'으로 볼 수 있으며 기존의 세 가지 기하적인 접선 개념에서 한 단계 더 나아간 것으로 이해할 수 있다. 이렇게 새로운 기하적 접선 개념을 도입하면 Tall(1986)의 연구에서 나타나는 첨점이 있는 그래프의 접선에 대한 오개념 해소에 도움을 줄 수 있을 것으로 보인다.

Tall(1986)은 컴퓨터를 활용한 교수 방법이 접선 개념의 이해에 도움을 주는지를 연구하기 위하여 다음과 같이 첨점이 그래프에 대한 접선의 존재 유무를 다루는 문제를 학생들에게 제시하였다.

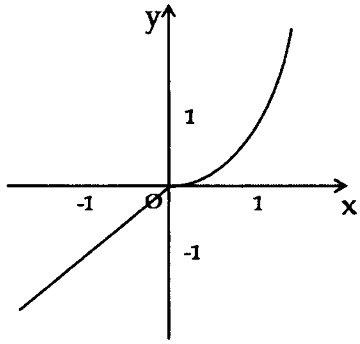
<그림 6>에서 일부 학생들은 원점에서의 접선이 $y=x$임을 유추하고서도 접선을 그릴 때에는 원점 왼쪽에서 곡선과 접선이 일치하게 됨을 당혹스럽게 생각하며 접선을 약간 비스듬하게 그린 것으로 나타났다. 이는 접선이 '곡선과 한 점에서 만나는 직선', '곡선을 스치고 지나가는 직선'이라는 일차지식에 의한 장애로 인한 것으로 보인다. 이러한 오류는 '할선의 극한'으로 접선을 바라보게 되면 해소될 수 있다. 한 편, 선형 근사로서의 접선을 고려하면 곡선의 한 점에서의 접선은 그 점 근처에서 곡선과 가장 근사한 직선이므로 직선에 대한 접선은 그 자신이 될 수 밖에 없다. 따라서, <그

림 6>에서 접선과 직선이 일치하게 되는 것을 오류로 생각할 필요가 없게 된다. <그림 7>에서 일부 학생들은 원점에서 곡선에 대한 접선이 두 개가 된다고 답하는 오류를 범하였다. 원점에서 접선이 존재하지 않지만 접선이 두 개가 된다고 답한 학생들이 사고한 방법을 모두 무시할 수는 없다. 선형 근사로서의 접선을 고려하면 $x>0$일 때에는 $y=0$이 원점 근처에서 곡선에 가장 가까운 직선이고, $x<0$일 때에는 $y=x$가 곡선에 가장 가까운 직선이 된다. 따라서 이 문제의 경우 '접선이 존재하지 않는다'고 하는 정답과 함께 $x=0$ 좌우에서 접선이 다르게 표현될 수 있음을 파악하는 것이 중요하다. 그렇지 않을 경우 단순히 '첨점이 있는 경우에는 접선이 존재하지 않는다'와 같은 기계적 이해에 머물게 될 가능성도 있게 된다.



$$y=\begin{cases} x & (x\leq 0) \\ x+x^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

<그림 6>



$$y=\begin{cases} x & (x\leq 0) \\ x^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

<그림 7>

6. 교시안 예시

선형 근사로서의 접선 개념을 교수할 때 주의할 점은 지나치게 그 개념을 강조할 경우 학습의 난이도가 높아질 수 있다는 점이다. 예를 들어 '최적' 선형 근사 개념은 몇 가지 그래프에 대한 예시로서 대략적인 설명을 하는 것이 좋으며 수학적으로 자세한 논거를 제시하는 것은 바람직하지 않을 것으로 보인다. 여기서는 접선의 활용으로 근삿값을 구하는 문제를 학교 수업에서 적용할 수 있도록 간단한 교시안을 제시해 보도록 하겠다.

<교시안 예시>

가령, $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하는 문제를 생각해보자. 아래 그림에서 2에 가까운 제곱수 1.96에서의 접선의 방정식을 이용하면 $\sqrt{2}$의 근삿값을 구할 수 있다. $f(x)=\sqrt{x}$라 두고 f를 미분하면,

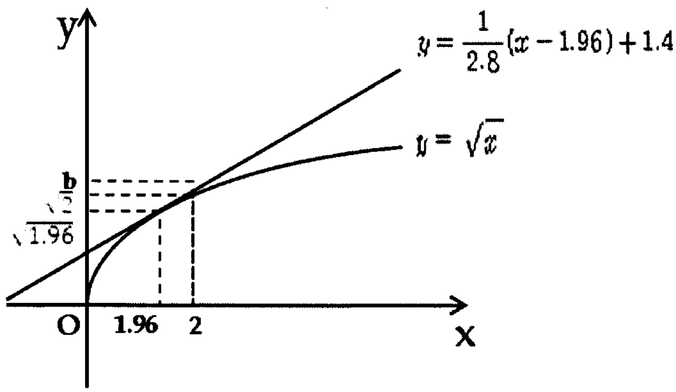
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 $f'(1.96)=\dfrac{1}{2.8}$이다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프의 $x=1.96$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2.8}(x-1.96)+1.4$$

가 된다. 여기에 $x=2$를 대입한 값을 b라 하면,

$$b=\frac{1}{2.8}(2-1.96)+1.4=1.4+\frac{1}{70}=1.41428\cdots$$

를 얻는다. 그런데 $\sqrt{2}=1.4142135614\cdots$이므로 접선의 방정식을 이용하여 구한 근삿값 b가 원래의 값과 소수점 네 번째 자리까지 일치한다.



이와 같이 한 점 x에서 계산하기 어려운 함수의 값이라도, x근처의 한 점 a에서 함숫값을 계산할 수 있는 경우에 a에서의 접선을 구하게 되면 x에서의 함숫값의 근삿값을 구할 수 있다.

예제. $1.41^2=1.9981$임을 이용하여 $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하여라.

(풀이) $x=1.9981$에서 $y=\sqrt{x}$의 접선의 방정식은

$$y = f'(1.9981)(x-1.9981) + f(1.9981) = \frac{1}{2.82}(x-1.9981) + 1.41$$

가 된다. 여기에 $x=2$를 대입하면, $1.41 + \frac{0.0019}{2.82} = 1.414219\cdots$를 얻고 이것을 $\sqrt{2}$의 근삿값으로 본다. 이 값은 실제 $\sqrt{2}$의 값과 비교해 볼 때, 소숫점 다섯 번 째 자리까지 일치한다. □

문제. $1.7^2 = 2.89$임을 이용하여 $\sqrt{3}$의 근삿값을 구하고, 이 값은 $\sqrt{3}$과 소수점 몇 째 자리까지 일치하는지 알아보아라.

III. 결 론

이 논문은 최적 선형 근사로서의 접선 개념을 학교수학에 구현하는 방법과 그 의미를 고찰한 것이다. 비선형 문제의 국소적 측면을 다룰 때 이를 선형화시켜서 바라보는 것은 현대 수학의 중요한 연구 방법 중의 하나이며, 최적 선형 근사로서의 접선 개념은 이를 내포하고 있다. 이 연구에서는 이러한 최적 선형 근사로서의 접선 개념의 의미를 고찰하고 교수학적 변환을 통하여 학교수학에 적용할 수 있는 방안과 이에 대한 수학교육학적 의미를 알아보았다.

현 교육과정에서 접선 개념은 원과 직선과의 거리로부터 출발하여 순차적으로 기존 개념의 반성 및 수정을 통하여 재구성되어 가며, 적용되는 맥락도 점진적으로 확장된다. 이러한 과정 자체가 수학 학습의 중요한 동기로 작용할 수 있으나, 어느 단계의 접선의 개념에 대하여 이것이 적용되는 맥락의 범위 내에서 이해할 수 있고 해결할 수 있는 구체적인 쓰임새를 제시할 수 있다면 이는 개념의 이해와 더불어 학습에 대한 효과적인 동기로 작용할 수 있다. 이 연구에서는 제곱근의 근삿값을 구하는 활동을 통하여 접선이 활용되는 예시를 제시하였으며, 이는 접선을 학습할 때 긍정적인 태도, 흥미, 동기 유발 등의 정의적 측면을 강화시킬 수 있을 것으로 보인다.

수학교육학적인 면에서 볼 때 선형 근사로서의 접선 개념은 정의적 요소를 긍정적인 방향으로 증진시키는 것 이외에 두 가지 측면이 있다. 현 교육과정에서 순차적으로 제시되는 접선 개념은 브루너가 주장하는 나선형 교육과정의 원리를 따른다고 볼 수 있으며, 최적 선형 근사로서의 접선 개념은 그 최종점이 될 수 있다. 또한, 첨점이 있는 곡선의 경우에 학생들이 가지는 접선의 오개념 분석 및 해소에도 도움을 줄 수 있다. 한 점의 좌우에서 접선이 서로 다른 기울기를 가질 때, 접선이 두 개라고 답하는 학생들이 사고하는 방법이 완전히 틀린 것이 아님을 인식하게 하고, 그 점의 좌우에서 최적 선형 근사가 다르게 주어짐을 이해하게 할 수 있다.

선형 근사로서의 접선은 현 교육과정의 밖에 있으나, 보충 혹은 심화 과정으로서 근삿값을 구하는 문제는 다루어 볼 가치가 있다. 선형 근사로서의 접선을 지나치게 엄밀하게 다루는 것은 학습의 난

이도만 높이게 되므로 지양해야 하지만, 이 논문에서 제시안 교시안 정도의 내용은 접선 개념의 학습에 있어서 학습 동기, 흥미 등의 정의적 측면을 강화시켜 줄 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2006). 수학-영어 교육과정 수정 고시안, 교육인적자원부 고시 제2006-75호.

교육인적자원부 (2006). 수학·영어 교육과정 개정고시(제 2006-75호. '06. 8. 29)에 따른 검정도서(수학, 영어) 편찬상의 유의점.

김미경 (2005). 테일러 다항식의 근사에 대하여, 한국외국어대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김응태 · 박한식 · 우정호 (2001). 수학교육학개론 제2증보판, 서울대학교 출판부.

박두일 · 신동선 · 김기현 · 송건수 · 박복현 · 김주석 · 안훈 · 이재근 · 최백선 (2008). 고등학교 수학 II, 서울:교학사.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

이민찬 · 길양숙 (1998). 수학 학습에 영향을 미치는 정의적 특성의 학년별 변화 및 성별 · 성취 집단별 차이, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **37(2)**, pp.147-158.

임재훈 · 박교식 (2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학 연구 **14(2)**, pp.3-15.

조영미 (1999). 접선 개념의 교육적 연구, 수학교육학 연구 **9(1)**, pp.229-237

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems 3rd ed*, New York:Springer.

Tall, D. (1986). Costructing the Concept Image of a Tangent, *Proceedings of PME* **11**, Montreal, pp.69-75.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions - the case of the tangent, *Proceedings of PME* **11**, Antwerp pp.24-28.

Pedagogical Discussion on the concept of Tangent as a Linear Approximation

Kim, Young Rock & Lee, Youngie
Department of Mathematics Education, Graduate School of Education, Hankuk University of Foreign Studies,
270 Imun-dong, Dongdaemun-gu, Seoul, 130-791, Korea
E-mail : rocky777@hufs.ac.kr, lypps02@hanmail.net

Han, Jongmin
Department of Mathematics, College of Natural Sciences, Hankuk University of Foreign Studies,
89 Wangsan-ri, Mohyeon, Cheoin-gu, Yongin-si, Gyeonggi-do, 449-791, Korea
E-mail : jmhan@hufs.ac.kr

In the school mathematics the concept of tangent is introduced in several steps in suitable contexts. Students are required to reflect and revise their concepts of tangent in order to apply the improved concept to wider range of contexts.

In this paper we consider the tangent as the optimal linear approximation to a curve at a given point and make three discussions on pedagogical aspects of it. First, it provides a method of finding roots of real numbers which can be used as an application of tangent. This may help students improve their affective variables such as interest, attitude, motivation about the learning of tangent. Second, this concept reflects the modern point of view of tangent, the linear approximation of nonlinear problems. Third, it gives precise meaning of two tangent lines appearing two sides of a cusp point of a curve.

* ZDM Classification : I40
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : tangent, linear approximation