韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 3호, 2009. 9. 599-624

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 3, Sep. 2009. 599-624

대수 문장제의 오류 유형과 문제 해결의 관련성 분석

김 진 호 (고려대학교 대학원)
김 경 미 (고려대학교 교과교육연구소)
권 혁 진 (고려대학교)

본 연구에서는 중학교 2학년 106명의 학생들을 대상으로 대수 문장제 해결에서 나타난 오류의 유형을 조사하고, 학생들의 오류 유형과 Polya의 문제 해결 단계의 관련성에 대하여 알아보았다. 연구 결과 대수 문장제 해결에서 학생들의 오류는 "잘못 해석된 언어"(39.7%), "왜곡된 정리나 정의"(38.2%), "기술적 오류"(11.8%), "검증되지 않은 답"(7.4%), "오용된 자료"(2.9%), "논리적으로 타당하지 않은 추론"(0%)의 6가지 오류로 분류하였다. 대수 문장제 해결에서 나타나는 학생들의 오류가 대수 문장제 해결과 어떤 관련성을 가지고 있는지 조사한 결과 학생들의 특정 오류 유형과 문제 해결 단계 사이에 긴밀한 관련성이 발견되었다. 오용된 자료의 오류를 범하는 학생들은 대부분 계획 실행 단계를 성공적으로 수행하지 못하였고, 잘못 해석된 언어, 왜곡된 정리나 정의의 오류를 범하는 학생들은 문제의 이해, 계획의 작성, 반성 단계를 성공적으로 수행하지 못하였다. 검증되지 않은 답의 오류를 범한 학생들은 계획의 작성과 반성의 단계를 성공적으로 수행하지 못하였으며, 기술적 오류를 범한 학생들은 특히 반성 단계를 성공적으로 수행하지 못하였다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교 교육의 궁극적인 목적 중의 하나는 그 시대의 사회 문화적 배경과 밀접한 관계를 유지하면서 현재뿐만 아니라 미래 사회의 요구에 능동적으로 대처할 수 있는 능력과 자질을 기르는데 있다. 이러한 대처능력과 자질을 기르기 위해서는 문제해결력이 필요하다. 문제 해결이란 '현재 상태와 목표 상태 사이의 격차를 메우기 위해서 기존의 지식과 경험을 총체적으로 활용하여, 조리 있고 이치에 맞는 사고과정을 거쳐서 목표 상태에 이르도록 하는 것'이다(남승인 · 류성림, 2002). 1980년대 이후 많은 연구자들이 수학 교육에서 문제해결을 강조하였고, 학생들의 문제해결력 신장을 위하여 다양한 연구를 수행하였다(Dooren, Verschaffel, & Onghena, 2002; Lawson, M. J. & Chinnappan, M. 2000; NCTM, 2000). 특히 Polya(1957)는 문제해결을 위한 사고과정을 문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성의 4단계로 제시하였고, 그림 그리기, 예상과 확인, 표 만들기, 식 세우기, 거꾸로 풀기, 규칙

* 접수일(2009년 7월 30일), 게재확정일자(2009년 8월 20일)
* ZDM 분류 : D73
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 대수 문장제, 오류, 문제 해결

성 찾기, 단순화하기 등 다양한 문제해결 전략을 제시하였다.

문제 해결력을 강화하기 위해서는 실생활과 관련된 문제 상황을 학생들에게 많이 접하게 해 주어야 한다. 그 중 하나가 수학적 상황을 언어로 표현한 문장제이다. 문장제 해결을 통해 학생들은 일상생활에서 일어나는 여러 가지 문제를 합리적으로 처리하는 능력이나 태도를 기를 수 있다. 문장제라는 것은 말 그대로 문제 상황을 서술해 놓은 문장 형태의 문제를 말하며, 허구적이고 실현 불가능한 상황이 아닌 실생활의 문제를 다루고 있다는 점에서 학습자로 하여금 매력을 느낄 수 있게 한다(이정은, 1998). 그러나 많은 학생들이 문장제 해결에 어려움을 갖고 있다. 언어로 쓰여진 것을 수학적 언어로 전환함에 있어 많은 어려움을 느끼고 있다(Mayer, 1983; Ng & Lee, 2009; 박정아 · 신현용, 2005; 이정은, 1998). 특히 기호적 대수에서 사용된 문자의 의미에 대한 이해, 자연 언어를 방정식으로의 변환, 문장제의 의미론적 구조의 이해, 양 사이의 관계의 특성과 그것들이 어떻게 연결되어 있는지에 대한 이해, 방정식의 구조에서 텍스트기반의 의미론적 암시의 사용 과정에서 인지론적 장애에 직면하게 된다(Ng & Lee, 2009). 이러한 어려움으로 인하여 학생들은 문장제 해결에 있어 많은 오류를 범하게 된다(Xin, 2008). Hadar et al. (1987)는 문장제 해결에서 나타나는 학생들의 오류를 오용된 자료(Misused Data), 잘못 해석된 언어(Misinterpreted language), 논리적으로 타당치 않은 추론(Logically invalid inference), 왜곡된 정리나 정의(Distorted theorem or solution), 검증되지 않은 답(Unverified solution), 기술적 오류(Technical error)의 6가지 오류 유형으로 범주화하여 제시하였다. 오류의 유형은 학생들의 문제 해결 과정에서 나타나는 오류를 보고 그에 맞는 명칭을 붙이는 것으로서, 이러한 분류는 교수-학습의 측면에서 중요한 역할을 한다. 오류의 분석은 학생들에게 오류의 원인에 대한 정확한 피드백을 제공할 수 있다. 또한 오류 모형에 대한 교사의 지식은 학생들의 수학 개념에 대한 잘못된 이해나 문제 해결 전략의 부족한 점을 이해하게 되어 학생들이 겪고 있는 오류를 치료하거나 예방하는데 도움이 될 수 있다. 학생들의 오류는 수학 학습에서 학생들이 겪는 어려움의 주요 원인을 파악하고, 적절한 교수학습 방안을 마련하는데 큰 역할을 한다(Hadar et al., 1987).

대수 문장제와 오류에 관한 선행 연구에서는 대부분 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형만을 범주화하고, 오류 유형에서 도출되는 일반적인 교수학습 방안 및 새로운 교수학습 방안을 제시하거나(Blando, Keely, Schneider, & Sleeman, 1989; Hadar et al., 1987; Radatz, 1979; Ng & Lee, 2009; Xin, 2008), 학생들이 대수 문장제 해결에서 사용한 문제 해결 전략에 관하여 조사하는데 그쳤다(이정은, 1998). 최근 Ng와 Lee (2009)는 학생들의 대수 문장제 해결 능력을 증진시키기 위한 방안으로 문제의 중요한 정보를 표현하기 위해 다이어그램을 그리는 모델 방법을 제안하였고, Xin (2008)은 문장제 해결 능력을 향상시키기 위한 방안으로 스키마 기반의 교수법을 제안하였다.

그러나 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류의 원인에 관한 심도 있는 연구와 학생들의 오류 유형과 대수 문장제 해결 과정 사이에 어떤 관련성이 있는지에 대한 연구는 아직 거의 이루어지지 않았다. 문장제 해결 과정에서 오류의 원인과 문제해결 과정 사이의 관련성을 밝히는 것은 매우 중요하다. 대수 문장제 해결 과정에서 학생들이 범하는 오류의 원인을 찾고, 학생들이 다신

오류를 범하지 않도록 교수학적 처치가 수행되지 않는다면, 문제해결 능력이 저하될 뿐만 아니라 후속 학습의 결손으로 이어져 악순환이 반복될 수 있다. 대수 문장제 해결 과정에서 학생들이 범하는 오류의 원인을 찾기 위해서는 학생들의 문제 해결 과정에 대하여 분석이 이루어져야 한다. 예를 들어, 학생들이 대수 문장제 해결 과정에서 항상 기술상의 오류를 범하는 학생의 문제 해결 과정을 분석한 결과 계획 실행 단계에서 항상 계산상의 실수를 범하는 특징을 가지고 있다면, 이 학생은 계산 풀이에 대한 집중적인 지도를 통해서 대수 문장제 해결 과정에서의 오류를 줄일 수 있으며, 학생의 대수 문장제 해결 능력을 향상시킬 수 있다. 이와 유사하게 어떤 특정 오류 유형이 문제의 이해 단계 혹은 계획 실행 단계, 반성 단계와 관련성이 있다면, 특정 문제 해결 단계에 대한 집중적인 교수학적 처치를 통하여 학생들의 오류를 치료하고, 예방할 수 있으며 학생들의 대수 문장제 해결 능력을 증진시킬 수 있다. 따라서 대수 문장제 해결과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형과 문제 해결 과정 사이의 관련성에 관한 심도 있는 연구가 필요하다.

본 연구의 목적은 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형을 조사하고, 오류의 원인을 밝히기 위한 방법의 일환으로 대수 문장제 해결에서 나타나는 학생들의 오류가 대수 문장제 해결과 어떤 관련성을 가지고 있는지 조사하는 것이다.

본 연구에서는 Hadar et al. (1987)의 6가지 각각의 오류 유형을 사용하여 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형을 분석하고, 각 오류 유형이 대수 문장제 해결 과정과 어떤 관련성을 가지고 있는지 알아보았다. 대수 문장제 해결 과정은 Polya의 문제 해결 과정 4단계로 분류하여 각 오류 유형이 어떤 문제 해결 단계와 관련성이 있는지 알아봄으로써, 대수 문장제 지도에 대한 좀 더 상세한 교수학적 방안을 도출하고자 하였다. 다음은 본 연구의 연구 문제이다.

1. 중학교 2학년 학생들의 대수 문장제 해결에서 나타나는 학생들의 오류 유형은 무엇인가?
2. 대수 문장제 해결에서 나타나는 학생들의 오류는 Polya의 문제해결 단계와 어떤 관련성을 가고 있는가?

Ⅱ. 문헌 고찰

1. 오류

수학의 오류분석 연구는 오랜 역사를 가지고 있다. Radats (1979)의 연구에 의하면, 오류분석은 1900년 초반부터 지난 70년 동안 수학교육의 중요한 관심 영역이었다. 이 당시 오류 분석에 관한 많은 연구는 산술에서의 오류와 관련되어 있었고, Buswell과 Judd(1925, 재인용)는 산술오류 분석에 대한 30개 이상의 연구를 하였다(Radatz, 1979). 1970년대에는 산술 계산에서의 오류뿐만 아니라 다른 영역에 대한 오류분석에 대한 관심이 증가하였으며, 1980년대에는 대수 문장제 해결에서 나타나는 오류에 대한 많은 연구들이 이루어졌다(Clement, 1982; Wollman, 1983). Clement(1982)는 대수 문장

제 해결에서 일반적인 오 개념의 사고과정을 알아보았고, 이 연구에 이어서 Wollman (1983)은 문장에서 방정식으로의 변환에서 생기는 오류의 원인을 알아보았다.

수학 학습에서 오류는 매우 복잡한 과정의 결과물이며, 오류의 원인을 규명하는 것은 매우 어려운 일이다. 왜냐하면 원인들 사이에 긴밀한 상호작용이 있기 때문이다(Radatz, 1979). 이런 어려움에도 불구하고 지금까지 많은 연구자들이 다양한 수학 영역에서 나타나는 오류 유형을 분류하고, 다양한 오류 관련 연구를 수행하였다. Radatz (1979)는 정보처리 분류관점에서 수학과제(mathematical task)에서 얻은 정보를 획득(obtaining), 처리(processing), 보유(retaining), 재생(reducing)을 사용한 방식으로 오류를 '언어의 어려움에 의한 오류(Errors Due to Language Difficulties)', '공간적 정보 획득의 어려움에 의한 오류(Errors Due to Difficulties in Obtaining Spatial Information)', '필수적인 사실과 기술의 불충분한 숙달에 의한 오류(Errors Due to Deficient Mastery of Prerequisite Skills, Facts, and Concepts)', '사고의 경직 또는 옳지 않은 관계에 의한 오류(Error Due to Incorect Associations or Rigidity of Thinking)', '부적절한 공식이나 전략의 적용에 의한 오류(Errors Due to the Application of Irrelevant Rules or Strategies)'의 5가지로 분류하였다. 언어의 어려움에 의한 오류는 의미의 오해로 일어나는 학생들의 오류를 말하고, 공간적 정보 획득의 어려움에 의한 오류는 지각적 분석과 통합의 요구로 인하여 발생되는 오류이다. 필수적인 사실과 기술의 불충분한 숙달에 의한 오류는 수학과제의 성공적인 수행에 필요한 내용 및 문제 지식에서의 모든 결함을 포함하며, 사고의 경직 또는 옳지 않은 관계에 의한 오류는 부적절한 전이로부터 일어나는 오류를 말한다.

Blando, Keely, Schneider와 Sleeman (1989)는 7학년 학생들을 대상으로 정수의 사칙연산에서 나타나는 오류의 유형을 '연산 순서의 오류(Precedence Errors)', '대체 오류(Substitution Errors)', '이외의 오류(Other Error)', '비 모형 오류(Nomodeled Errors)'의 4가지로 분류하였다. 연산 순서의 오류는 '$4+2\times3=6\times3$' 와 같이 연산 순서가 잘못되었거나 괄호를 무시한 경우를 말하며, 대체 오류는 덧셈을 해야 하는데 뺄셈을 하는 경우(예: 5+1=4)처럼 문제에서 제시된 연산 기호로 연산을 하지 않고 다른 연산 기호로 연산을 하는 경우를 말한다. 이외의 오류는 해답에 대한 부정, 즉 8-(2+4) = -2와 같이 정답에 부호를 반대로 붙이는 경우이고, 비 모형 오류는 부주의한 연산(예: 6+4=9)이나 원인 규명을 할 수 없는 경우를 말한다. 이러한 오류에 대하여 Blando et al. (1989)는 교사들이 다양한 방식으로 수학적 규칙을 가르쳐야 한다고 주장하였다.

많은 학자들의 오류 분류 모델 중에서도 Hadar et al. (1987)의 오류 유형은 지금까지도 가장 많은 연구에서 사용하고 있는 오류 분류 모델이다. Hadar et al. (1987)는 이스라엘 고등학교 11학년 남·여학생 2만 명을 대상으로 2년 동안 연구하여 수학 입학시험에서 나타나는 오류에 대해 경험적 분류 모델을 개발하였다. Hadar et al. (1987)의 6가지 오류 유형 모델은 오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 타당하지 않은 추론, 왜곡된 정리나 정의, 검증되지 않은 답, 기술적 오류이다.

첫 째, 오용된 자료(Misused Data)는 문항에 주어진 자료와 학생들이 그 자료를 처리하는 방법 사이의 불일치와 관련된 오류이다. 문제를 풀기 위해 옮겨 쓰는 과정에서 어떤 세부 항목을 잘못 옮겨

쓰는 경우를 말한다.

둘 째, 잘못 해석된 언어(Misinterpreted language)는 하나의 언어로 기술된 것을 다른 언어로 수학적 사실을 잘못 전환함으로서 생기는 오류이다. 문제에서 제시하고 있는 것과는 다른 의미로 해석하여 수학적인 수식이나 용어로 나타내는 경우를 말한다.

셋 째, 논리적으로 타당하지 않은 추론(Logically invalid inference)은 명확한 내용은 다루지 않고 그릇된 추론을 하여 생기는 오류로, 주어진 정보의 부분이나 이미 추론된 것으로 새로운 잘못된 정보를 만드는 경우이다. 일반적으로 귀납 또는 연역적인 추론 도중에 발생하는 불합리한 추론을 말한다.

넷 째, 왜곡된 정리나 정의(Distorted theorem or definition)는 특별한 원리, 규칙, 정리나, 정의를 다루는 과정에서 발생하는 오류이다. 문제와 관련 없는 규칙을 사용하는 경우 등을 말한다.

다섯째, 검증되지 않은 답(Unverified solution)은 주어진 문제에 대한 풀이 과정은 맞으나, 문제에서 요구한 것을 검토하지 않았기 때문에 마지막에 제시된 답이 잘못된 경우이다. 학생들의 풀이과정 각 단계는 옳지만 제시된 마지막 결과는 문제에서 요구하는 해답이 아닌 경우, 즉 문제의 이해 과정에서 주어진 문제의 마지막 목표가 무엇인지 확인하지 않는데서 생기는 오류를 말한다.

여섯째, 기술적 오류(Technical error)는 계산적 오류이거나, 표에서 자료를 이끌어 내는 데 생기는 오류, 초등 대수 기호 조작 오류(부주의한 괄호 생략), 초·중·고등학교 수학에서 숙달된 알고리즘을 수행하는 과정에서 실수로 발생하는 다양한 오류 등을 말한다. 실수로 인한 계산상의 오류가 기술적 오류에 포함된다.

본 연구에서는 Hadar et al. (1987)의 6가지 오류 유형 모델을 사용하여 대수 문장제 해결과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형을 조사하였다. 학생들의 오류를 수학에 대한 학생들의 어려움과 인지적 장애를 알 수 있게 하며, 교수법을 계획하는 데에도 사용될 수 있다(Hadar et al., 1987).

2. 대수 문장제의 오류

대수 문장제를 해결하기 위해서는 대수적 사고가 필요하다. 대수적 사고는 수학적 사고의 도구 개발과 기본적인 대수적 사고를 수반하며(Kriegler, 2000), 기본적인 대수적 사고는 패턴, 변수, 함수 등을 포함한다(Xin, 2008). 대수적 사고는 “하나 또는 그 이상의 양이 미지수인 양적 문제 상황을 나타내는 방정식”을 만드는 것과 같이, “언어적 정보를 기호적 표현 또는 방정식으로의 변환”등의 표상적 활동에도 포함된다(NRC, 2001). 많은 학생들이 대수 문장제 해결에 어려움을 겪고 있으며, 대수 문장제 해결 시 많은 오류를 범하고 있다.

대수 문장제 해결 과정에서 나타난 학생들의 오류에 관한 선행 연구를 살펴보면, Clement (1982)는 공대 신입생 150명을 대상으로 대수 문장제 해결 시 학생들의 오류를 분석한 결과 대수 문장제 해결에서는 대수적 지식의 부족으로 인하여 오류가 발생하기도 하지만, 대수 문장제를 대수적 방정

식으로 나타낼 때 가장 많은 오류가 나타났다. 특히 많은 학생들이 문장에서 제시된 단어 순서대로 대수적 방정식을 구성하는 역(reversal)의 오류를 범하였다. Clement (1982)의 연구에 이어 Wollman(1983)은 문장에서 방정식으로의 변환에서의 오류 원인을 알아보았다. Wollman (1983)은 대수적 형태로의 변환에서의 어려움은 문장의 이해 부족으로 일어나지 않고, 문장에서 방정식으로 바꾸는 상황에서 어려움이 생긴다고 하였다. Wollman(1983)의 연구결과 오류의 대부분은 역(reversal)의 오류였고, Clement의 연구에서 나타난 역(reversal)의 오류 결과보다 더 높은 비율이었다. Quintero(1983, 재인용)는 2단계 문장제에서 아동들의 문제 표상 방법을 분석하였는데 아동들의 주된 오류는 주어진 문제에서 기술되어진 주요 개념과 그 관계를 제대로 표상하지 못하는데 기인한 것으로 보고되었다(김영채, 1996). 따라서 문제를 이해하고 대수 문장제를 방정식으로 표상하는데 유용한 지식인 언어적 지식, 의미적 지식, 도식적 지식의 학습 지도에 주의를 기울여야 한다(Clement, 1982).

이정은 (1998)은 중학생을 대상으로 문장제 유형별로 학생들의 해결 전략을 조사하고, 학생들의 오류 유형을 분석하였다. 연구 결과 학생들은 교과서에 제시된 일차 방정식에 관한 문장제 해결에 어려움을 겪고 있음이 확인되었고, 문장제 유형별로는 거리-속력-시간 문제와 혼합물 문제, 길이 문제에서 특히 낮은 성취를 보였다. 일차 방정식에 관한 문장제 해결 과정에서 학생들의 오류의 대부분은 적절하지 못한 식을 세운 경우의 잘못된 예상과 확인이었으며, 수 계산 문제와 자연수 문제에서는 구문에 대한 이해가 부족하고, 혼합물 문제, 거리-속력-시간문제, 길이 문제에서는 선행 지식이 부족한 것으로 나타났다. 이에 문장제 지도에 있어 문제를 이해하여 정확한 식을 세우는 데 보다 많은 지도가 필요하며, 교사는 일차방정식에 관한 문장제 유형별로 학생들이 갖고 있는 오류를 알고 이를 극복할 수 있도록 도와주어야 한다고 주장하였다. 최근 박정아·신현용 (2005)은 농도 문장제에 대한 학생들의 어려움을 농도에 대한 이해가 부족한 경우, 농도를 비교하지 못한 경우, 식이 틀린 경우, 계산과정의 오류 등으로 나누었고, 문제 해결력을 향상시키는 효과적인 교수 학습 방안을 제시하였다.

대수 문장제에 관한 선행 연구 결과에 따르면, 선행지식(기본개념)의 부족, 문장제를 대수 방정식으로 나타내는 어려움 등의 두 요인이 문장제 해결의 가장 큰 장애 요인으로 보인다. 따라서 대수 문장제를 지도시 기본 개념에 중점을 두어 이해시키고, 수학적 표상 능력을 증진시킬 수 있는 다양한 활동들이 수반되어야 할 것이다.

3. 대수 문장제 해결 과정

대수 문장제를 해결하기 위해서는 문장제에서 중요한 내용을 선택하고, 미지수로 놓을 것을 정하고 문제 상황에 맞게 방정식을 세우고, 문제에 맞는 적절한 답을 제시하는 등의 다양한 능력을 필요로 한다. 일반적으로 우리나라 교과서 7-가 단계의 일차방정식 활용 단원에서는 일차방정식의 문제를 푸는 순서를 다음과 같이 제시한다. 먼저, 주어진 문제의 뜻을 파악하고, 구하려는 수량을 미지수 x로 놓는다. 다음으로 문제 중에 있는 수량들 사이의 관계를 찾아 방정식을 세우고, 방정식을 푼다.

마지막으로 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다. 이처럼 대수 문장제 해결 단계는 Polya의 문제 해결 4단계와 유사하다.

Polya (1957)는 사고의 네 가지 단계를 다음과 같이 언급하였다.

첫째, 문제를 이해해야 한다. 즉 구하는 것이 무엇인지를 분명히 알아야 한다.

둘째, 여러 가지 사항들이 어떻게 관련되어 있는지 또한 미지인 것이 자료와 어떻게 연결되어 있는지를 알아내어 풀이에 대한 착상을 하고 계획을 세워야 한다.

셋째, 계획을 실행하여야 한다.

넷째, 완성된 풀이를 뒤 돌아 보고, 다시 검토하며 논의하여야 한다.

이들 각 단계는 모두 중요하며 계획은 실행하면서 매 단계를 점검한다면 많은 오류를 방지할 수 있다(Polya, 1957). 남승인 · 류성림 (2002)은 대수 문장제 해결과정을 1)문제의 이해, 2)주어진 정보 사이의 관계 파악, 3)문제를 시각화하기, 4)식 세우기, 5)정답 예상하기, 6)방정식 풀이, 7)검산, 8)답의 확인 · 결정, 9)문제의 확장의 9단계로 제시하였다. 지재근 · 오세열 (2000)은 대수 문장제를 해결한다는 것은 기본적인 대수적 계산 능력이 갖추어져 있다고 볼 때, 결국 문제를 바르게 이해하고 문제 상황을 대수적 구조로 표현하는 것을 의미한다고 하였다. 그리고 대수 문장제를 대수적 구조로 전환하는 과정을 다음과 같은 단계로 제시하였다. 먼저 '문제 읽기'를 하고 '대상들의 연관된 성질을 생각하여 문제를 해석하고 정신적 표상으로 형성하기'를 한다. 그 다음으로 '그 대상들 사이의 관계를 조직화하기'를 한 뒤 '방정식이나 부등식으로 그 관계를 표상하기'를 한다. 지재근 · 오세열 (2000)에 의하면 교사는 학습자에게 반복학습을 통해 문제요소를 조직화하고 상황에 맞게 그들을 표상화하는데 초점을 맞추어야 한다.

방승진 · 이상원 (1999)는 대수 문장제 해결에 있어 Polya의 문제해결 과정과 문제 해결 전략을 강조하였다. 방승진 · 이상원 (1999)은 문장이 길고 복잡하여 식을 세우기가 어려운 저해 요인은 Polya의 문장제 해결전략을 통하여 학생들로 하여금 계획을 세우는 습관을 길러주도록 하고, 흥미가 상실하여 문제를 포기한 저해요인은 Polya의 문장제 해결전략을 통하여 어려운 문장제를 포기하지 않고 문제를 해결할 수 있도록 해야 한다고 제안하였다. Polya의 문제 해결 전략으로는 그림 그리기, 식 세우기, 표 만들기, 예상과 확인, 거꾸로 풀기, 규칙성 찾기, 단수화하기 등이 있다. 주익한 · 김영국 (1997)은 상, 중, 하 집단의 학생들을 대상으로 Polya의 문제 해결 과정에 기초하여 대수 문장제 해결 과정에서 학생들의 실패 유형을 살펴보았다. 연구 결과 상위 집단은 모든 단계에서 실패율이 낮게 나오고, 중위 집단은 문제 해결의 계획 수립과 계획 실행 단계의 기술적인 잘못으로 높은 실패율을 나타내었다. 하위집단은 문제 이해 단계와 계획 수립 단계에서 높은 실패율을 보였다. 주익한 · 김영국 (1997)은 학생들의 성취도 집단마다 많은 실패를 보이는 문제 해결의 단계가 상이하게 나타났으므로, 문제 해결의 지도에 있어서 상위 집단은 문제의 이해단계에 주의를 기울일 필요가 있으며, 중위집단은 계획의 수립과 계획 실행 단계에, 하위집단은 초기단계인 문제 이해와 계획 수립 단계를

좀 더 중점적으로 지도하여야 한다고 하였다.

대수 문장제에 관한 몇몇 선행 연구들에서는 Polya의 문제 해결 과정과 대수 문장제 해결 과정을 동일시하였으며, 대수 문장제의 올바른 교수-학습 방안으로 Polya의 문제 해결 단계와 문제 해결 전략을 제시하였다. 따라서 본 연구에서 Hadar et al (1987)의 6가지 각각의 오류 유형이 대수 문장제 해결 과정과 어떤 관련성을 가지고 있는지 알아보기 위해 Polya의 문제 해결 4단계를 이용하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

경기도에 소재하고 있는 A중학교 2학년 3개 반의 106명(남자 56명, 여자 50명)을 대상으로 대수 문장제 시험을 실시하였다. 본 연구에 참여한 A중학교는 남 · 여 공학으로 모든 반이 남 · 여 합반이고, 수학 수업을 상 · 중 · 하로 나누어 수준별 수업을 실시하고 있었다. 본 연구에서 사용한 대수 문장제는 학생들이 매우 어려워하는 문제이기 때문에, 연구 참여자로 <7-가 단계>를 이미 학습한 중위권 학생들이 적절하다고 판단되어 중학교 2학년 중위권 3개 반 106명을 대상으로 실시하였다.

2. 예비 연구

예비 연구는 A중학교 2학년 학생 36명(남19명, 여17명)을 대상으로 2008년 12월 1일 수학 교사의 감독 하에 45분 동안 실시하였다. 대수 문장제 10문항(혼합물 2문제, 시간-거리-속력 2문제, 나이 2문제, 자연수 2문제, 수계산 2문제)에서 1, 2번 문제와 3, 4번 문제는 서로 동형문제(내용이 다르지만 문제를 해결하기 위한 해법이 같은 문제)로 많은 학생들이 1, 3번 문제를 풀면 동일한 해법으로 2, 4번 문제도 쉽게 풀어 2, 4번 문제를 해법이 다르게 변형을 하였다. 또한 예비연구를 통하여 평가문항에 응답하는 시간은 모든 학생이 40분 안에 문장제 10문항을 해결하였으므로 40분이 적당하다고 판단하였다.

3. 연구 방법 및 절차

본 연구는 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류를 분석하고, 학생들의 오류 유형과 문제 해결 사이의 관련성을 알아보기 위하여 대수 문장제 10문항을 제작하고 106명의 중학교 2학년 학생들을 대상으로 평가를 실시하였다. 평가는 2009년 5월 12일, 14일, 18일 해당 학급의 수학 교사의 감독 하에 40분 동안 실시되었다. 그리고 Hadar et al. (1987)의 6가지 오류 유형을 사용하여 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형을 조사하였다. 또한 각 오류 유형이 대수 문장

제 해결 과정과 어떤 관련성을 가지고 있는지 알아보기 위하여 Polya의 문제 해결 과정 체크리스트를 제작하고, 오류를 범한 학생들에게 다시 학생들이 풀은 시험지와 문제 해결 과정 체크리스트를 주어 각 문항에 대하여 학생들이 어떻게 문제를 해결하였는지 작성하도록 하였다. 학생들이 풀은 시험지와 문제 해결 체크리스트를 이용하여 각 오류 유형이 어떤 문제 해결 단계와 관련성이 있는지 분석하였고, 면담이 필요한 경우에는 교사와 학생에게 동의를 구한 후 개별 면담을 실시하였다.

4. 자료 수집 및 분석

1) 대수 문장제 해결 과정에서 학생들의 오류

대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형을 조사하기 위하여 우선 7차 교육과정 수학교과서 7종(형설, 천재교육, 대한교과서, 두산, 블랙박스, 금성, 두레교육)에 있는 일차 방정식의 활용 단원의 문장제를 Mayer(1983)의 표면적 유형 분류를 이용하여 7종 교과서 모두에 제시되어 있는 유형의 문장제를 검사지로 제작하였다. 제작된 검사지는 수학교육 전문가 1명, 현장 교사 1명과 협의하여 결정하였다. 검사지의 문제는 혼합물 문제, 거리-속력-시간문제, 나이 문제, 자연수 문제, 수계산 문제의 5가지 유형이며, 각 문장제 유형마다 교과서에 가장 많이 제시된 형태를 2문항씩 선정하여 총 10문항으로 지필 검사를 실시하였다. <표 1>는 본 연구에서 사용한 대수 문장제이다.

<표 1> 유형별 대수 문장제

문장제 유형	문제
혼합물 문제	1. 12%의 소금물 300g이 있다. 여기에 7%의 소금물 200g을 섞었을 경우 소금물의 농도는 얼마가 되겠는가? 2. 6%의 소금물 300g이 있다. 이것에서 몇 g의 물을 증발시키면 10%의 소금물이 되겠는가?
거리-속력 문제	3. 산 아래 지점 A와 산꼭대기 지점 B 사이를 올라갈 때는 시속 3km, 내려올 때는 시속 4km로 걸어서 왕복하는 데 3시간이 걸렸다. 두 지점 A, B 사이의 거리는 몇 Km인가? 4. 매시 5Km로 흐르는 강물을 따라 배로 20Km 거슬러 올라가는데 2시간이 걸렸다. 강물이 흐르지 않는 곳에서의 이 배의 속도를 구하여라.
나이 문제	5. 디오판토스는 일생의 1/6을 소년으로 지냈고, 그의 턱수염은 그로부터 일생의 1/12이 지난 뒤에 났으며, 다시 일생의 1/7이 지난 뒤에 결혼을 하였다. 결혼한 지 5년 뒤에 아들을 낳았고, 그 아이는 아버지의 일생의 반밖에 살지 못했고, 디오판토스는 아들이 죽은지 4년 뒤에 일생을 마쳤다. 디오판토스가 세상을 떠 날 때의 나이를 구하시오. 6. 올해 아버지의 나이는 48세이고, 아들의 나이는 14세이다. 몇 년 후에 아버지의 나이가 아들의 나이의 3배가 되는가?
자연수 문제	7. 어떤 수에 5를 더해야 할 것을 잘못해서 5를 곱했더니, 구하려고 했던 수 보다 19만큼 커졌다. 어떤 수를 구하여라. 8. 두 자리의 자연수가 있다. 일의 자리와 십의 자리 숫자의 합은 12이고, 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾸면 원래의 수 보다 18이 커진다. 원래의 수는 얼마인가?
수 계산 문제	9. 사탕 36개를 형과 동생에게 나누어 주려고 한다. 형게에는 동생보다 8개를 더 주려고 한다면, 각각 몇 개씩 나누어 주면 되겠는가? 10. 책을 학생들에게 나누어 주는데, 5권씩 나누어 주면 7권이 모자라고, 4권씩 나누어 주면 10권이 남는다. 학생 수를 구하여라.

Hadar et al.(1987)의 6가지 오류 유형을 사용하여 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형을 알아보았다. 오류의 분석은 학생들이 검사지에 직접 기록한 풀이 과정만을 보고 분석하였다. 문항에 대하여 전혀 응답하지 않은 경우는 무응답으로 처리하여 오류 분석에서 제외시켰고, 정답만을 제시한 경우도 오류 분석 대상에서 제외시켰다. 한 문제의 풀이 과정에서 여러 개의 오류가 발생한 경우에는 먼저 발생한 오류만을 대상으로 삼았다.

2) 오류 유형과 Polya의 문제 해결 단계의 관련성

본 연구에서는 대수 문장제 해결 과정에서 나타난 학생들의 오류 유형과 Polya의 문제 해결 단계의 관련성을 분석하기 위해서 연구자는 Polya(1957)의 'How to solve it' 자료를 참고로 문제해결 4단계 체크리스트를 제작하였다. 체크리스트는 O, X로 체크하는 방식으로 제작되었으며, 문제 이해 단계 4문항, 계획 수립 단계 6문항, 계획 실행 단계 2문항, 반성 단계 4문항으로 총 16문항으로 구성되었다. 문제 해결 체크 리스트는 부록에 첨부하였다.

본 연구에 참여한 106명의 학생 중에 67명의 학생에게서 136개의 오류가 발견되었다. 오류가 발견된 67명의 학생을 대상으로 오류유형과 Polya의 문제 해결 단계의 관련성을 알아보기 위해 2009년 5월 29일 67명의 학생들을 대상으로 다시 설문을 실시하였다. 한 학생이 다른 유형의 오류 2개를 일으켰다면, 오류를 범한 2문제를 복사하여 복사한 문제지와 각 문제에 대한 문제해결을 알아보기 위해 체크리스트 2개를 그 학생에게 제시하여 작성하도록 하였다. 오류가 발견된 모든 문항에 대하여 학생의 오류 유형과 문제 해결 체크 리스트의 결과를 토대로 오류 유형과 문제 해결 단계의 관련성을 분석하였다. 체크리스트에 대한 평가 기준은 분석적 채점법(강완 · 김진호 · 신혜진, 2001))이 적당하다고 판단되어 본 연구에 맞게 분석적 채점법을 재구성하였다. 문제의 이해 단계 4문항 중 4문제 모두 O표시를 하였을 경우 '완전 이해', O표시가 1~3개인 경우 '불완전 이해' 0개인 경우 '이해 못함'이라고 판별하였다. 계획의 실행, 계획의 작성, 반성 또한 이와 동일한 방법으로 판별하였다. <표 2>는 학생들이 작성한 문제 해결 체크리스트에 대한 평가 기준표이다.

<표 2> 문제 해결 단계 체크리스트 평가 기준표

단계	O의 개수	측정의 관점
문제의 이해	4	문제를 완전히 이해(완전한 이해)
	1-3	문제를 부분적으로 잘못 이해(불완전 이해)
	0	문제를 완전히 잘못 이해이거나 전혀 이해를 못함(이해 못함)
계획의 작성	6	완전한 계획의 작성(완전한 계획의 작성)
	1-5	부분적으로 잘못된 계획의 작성(불완전 계획 작성)
	0	완전히 잘못된 계획의 작성이거나 계획의 작성이 전혀 없음(계획 작성 못함)
계획의 실행	2	완전한 계획의 실행(완전한 계획의 실행)
	1	부분적으로 잘못된 계획의 실행(불완전 계획 실행)
	0	완전히 잘못된 계획의 실행이거나 계획의 실행이 전혀 없음(계획 실행 못함)
반성	4	완전한 반성(완전한 반성)
	1-3	부분적으로 잘못된 반성(불완전 반성)
	0	완전히 잘못된 반성이거나 반성이 전혀 없음(반성 못함)

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 대수 문장제 해결에서 나타나는 학생들의 오류 유형

10개의 대수 문장제에 대하여 1문항을 10점으로 채점한 결과 평균은 60.9점, 표준편차는 17.9점이었다. 연구 참여자 106명의 중학교 2학년 학생들을 대상으로 조사한 결과 67명의 학생에게서 136개의 오류가 발견되었다. 나머지 39명에서는 오류가 전혀 발견되지 않았다. 학생들의 풀이 과정을 분석한 결과 잘못 해석된 언어가 54개(39.7%), 왜곡된 정리나 정의가 52개(38.2%)로 잘못 해석된 언어와 왜곡된 정리나 정의가 오류의 대부분을 차지하였으며, 다음으로 기술적 오류는 16개(11.8%), 검증되지 않은 답은 10개(7.4%), 오용된 자료 4개(2.9%) 논리적으로 타당하지 않은 추론 0개(0%)의 순으로 나타났다. 문장제 유형에 따른 오류 유형 및 빈도수는 다음 <표 3>에서 자세히 알 수 있다.

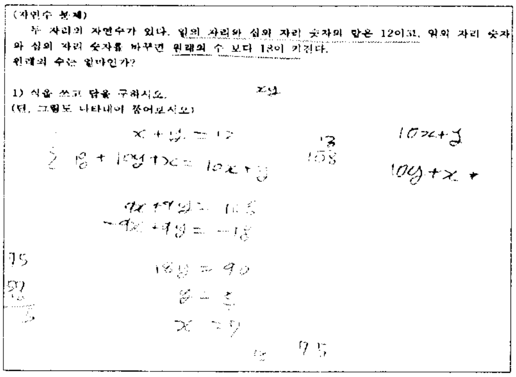
<표 3> 문장제 유형에 따른 오류 유형 빈도 수

문장제 유형 / 오류유형	혼합물	거리-속력	나이	자연수	수계산	합계(개)	비율(%)
잘못 해석된 언어	3개	15개	3개	24개	9개	54개	39.7%
왜곡된 정리나 정의	14개	20개	15개	0개	3개	52개	38.2%
기술적 오류	5개	0개	4개	2개	5개	16개	11.8%
검증되지 않은 답	2개	0개	4개	1개	3개	10개	7.4%
오용된 자료	0개	1개	0개	2개	1개	4개	2.9%
논리적으로 타당하지 않은 추론	0개	0개	0개	0개	0개	0개	0%
합계(개)	24개	36개	26개	29개	21개	136개	100%
비율(%)	17.6%	26.5%	19.1%	21.3%	15.5%	100%	

오류 유형별 학생 빈도수는 잘못 해석된 언어의 오류가 34명으로 가장 많았으며, 왜곡된 정리나 정의의 오류가 20명, 기술적 오류가 12명, 검증되지 않은 답의 오류가 8명, 오용된 자료의 오류가 4명이었다. 논리적으로 타당하지 않은 추론의 오류는 아무도 없었다. 잘못 해석된 언어의 오류만을 범한 학생이 전체의 41.8%(28명)로 나타났는데, 특히 8번 자연수 문제에서 이 오류가 많이 발생하였다.

1) 잘못 해석된 언어의 오류

잘못 해석된 언어의 오류는 문제에서 제시하고 있는 것과는 다른 의미로 해석하여 수학적인 수식이나 용어로 나타내는 경우로 모두 34명의 학생이 이 오류를 범하였다. 34명중 15명의 학생이 4번 문항에서 잘못 해석된 언어의 오류를 나타냈는데, 그 중 10명의 학생이 다음과 같은 오류를 범하였다.


(자연수 문제)
두 자리의 자연수가 있다. 일의 자리와 십의 자리 숫자의 합은 12이고, 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾸면 원래의 수 보다 18이 커진다.
원래의 수는 얼마인가?

1) 식을 쓰고 답을 구하시오.
(단, 그림도 나타내어 풀어보시오)

<그림 1> 학생 S2의 자연수 문제 풀이

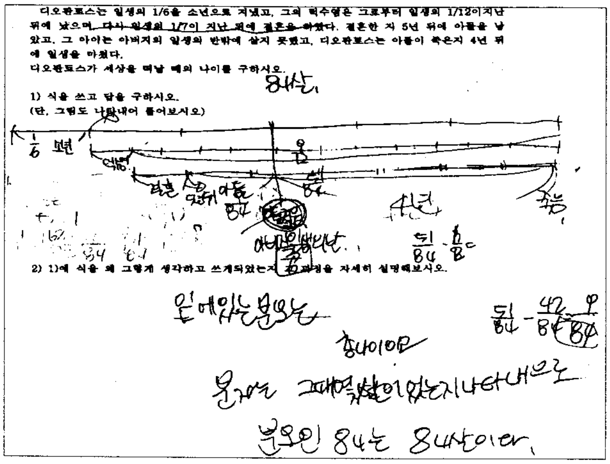
학생 S2는 문제에서는 제시한 의미를 반대로 해석하였다. 문제에서는 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾸면 원래의 수보다 18이 커진다라고 하였지만 S2는 원래의 수가 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾼 수보다 18이 더 커진다라는 의미로 해석하고 있었다. 다음은 S2와의 면담내용이다.

R : 이 문제는 어떻게 풀었어요?
S2 : 18을 반대로 썼어요.
R : 그때는 왜 18을 반대로 썼어요?
S2 : 이런 문제를 풀 때는 가끔씩 헷갈려요. 그래서 그때도 원래의 수가 바뀐 수보다 18이 더 커진다라고 문제를 이해해서 풀었거든요.
R : 음. 자주 이런 문제를 풀 때 이런 실수를 해요?
S2 : 자주는 아니지만 가끔씩 하더라고요.
R : 네, 알겠어요.

학생 S2는 면담과정에서 자연수 문제를 풀 때 가끔씩 문제를 잘못 이해하여 실수한다고 하였다. S2 이외의 많은 학생들이 자연수 문제에서 잘못 해석된 오류를 범하였다.

2) 왜곡된 정리나 정의의 오류

왜곡된 정리나 정의의 오류는 문제와 관련 없는 규칙(공식)을 사용하는 경우로 모두 20명의 학생이 이 오류를 범하였다. 20명중 13명의 학생이 5번 문항에서 왜곡된 정리나 정의의 오류를 나타냈는데, 그 중 13명의 학생 모두 다음과 같은 오류를 범하였다.



<그림 2> 학생 S3의 나이 문제 풀이

학생 S3는 디오판토스의 나이를 구하기 위해, 문제에서 제시된 분수 1/6, 1/12, 1/7를 통분한 분모, 즉 6,12,7의 최소 공배수가 전체 나이를 나타낸다는 잘못된 규칙(공식)을 사용하였다. 다음은 학생 S3과의 면담내용이다.

R : 5번 문제는 왜 이렇게 풀었나요?

S3 : 일단 이것이 6분의 1이거든요. 소년이요. 12분의 1이 있으니까 이만큼이 12분의 1이거든요. 그러면 일단 이 소년은요. 12분의 2이구요. 이것은 12분의 1이예요 다시 인생을 7분의 1을 7은 뭐하기 힘든데요. 했다고 하면 지금 12까지 나왔잖아요. 가장 다 포함시킬 수 있는 수가 12까지 나왔는데, 7을 또 하면요.

R : 포함시킬 수 있는 수가 84예요?

S3 : 네. 84분의 몇 나오더라, 이것은 12나오고 12는 84분의 7나오잖아요.

R : 결국 맨 처음에는 6과 12의 최소공배수 12분의 1로 했고, 다음에 12와 7의 최소공배수인 84라서 대충 84세일 것 같다 해서 끼워 맞춰봤더니, 다 맞았다는 거예요?

S3 : 그렇긴 한데요. 그냥 일단 그리면요. 사는 수가 자꾸 자꾸 나누다보면 84로 나뉘잖아요.

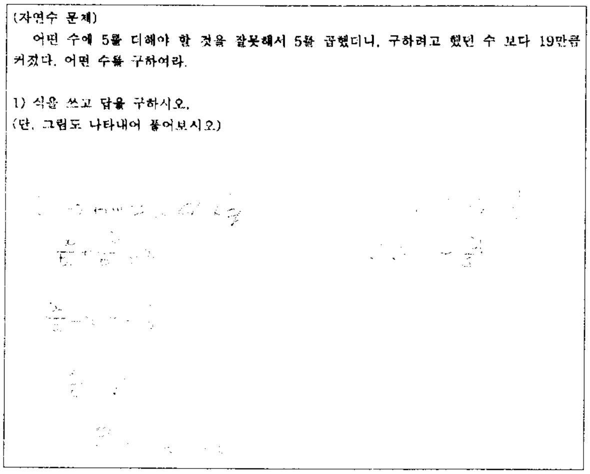
R : 그러니까 6, 7, 12의 최소 공배수를 하니까. 검토해보니까 딱 들어 맞았다는 거죠?

S3 : 네.

학생 S3은 면담과정에서 나이 문제를 풀 때 문제의 분모, 즉 6, 7, 12의 최소공배수가 문제에서 구하고자하는 디오판토스의 총 나이라고 생각하고 있었다. S3 이외의 많은 학생들이 나이 문제에서 S3과 동일하게 왜곡된 정리나 정의의 오류를 범하였다.

3) 기술적 오류

기술적 오류는 계산상의 실수로 인하여 나타나는 오류로 모두 12명의 학생이 이 오류를 범하였다. 기술적 오류는 모든 문장제 유형에서 골고루 나타났으며, 다음은 자연수 문제 풀이에서 나타난 기술적 오류의 예이다.


(자연수 문제)
어떤 수에 5를 더해야 할 것을 잘못해서 5를 곱했더니, 구하려고 했던 수 보다 19만큼 커졌다. 어떤 수를 구하여라.

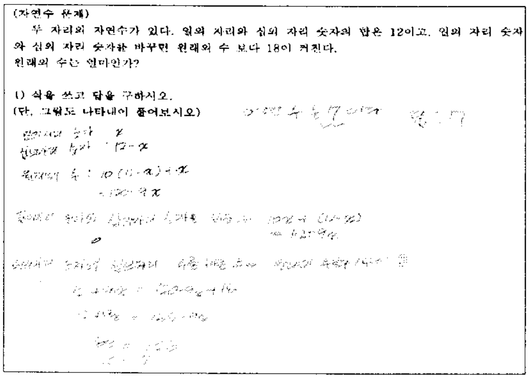
1) 식을 쓰고 답을 구하시오.
(단, 그림도 나타내어 풀어보시오.)

<그림 3> 학생 S5의 자연수 문제 풀이

학생 S5는 식을 올바르게 세웠지만, 곱셈의 분배 법칙을 사용할 때 계산을 잘못하고, '$\frac{x}{5}-\frac{5x}{5}=-\frac{19}{5}$'의 좌변 계산에서도 부호를 반대로 붙이는 계산상의 오류를 범하였다. S5는 면담 과정에서 암산을 했는데 실수로 계산을 잘못했다고 말하였다. 학생 S5 이외의 많은 학생들이 자연수 문제를 풀 때 단지 암산을 잘못하여 계산상의 실수를 범하였다. 기술적 오류는 나이 문제뿐만 아니라 다른 문장제 유형에서도 골고루 나타났다.

4) 검증되지 않은 답의 오류

검증되지 않은 답의 오류는 학생들의 풀이과정 각 단계는 옳지만 제시된 마지막 결과가 문제에서 요구하는 해답이 아닌 경우로 모두 8명의 학생이 이 오류를 범하였다. 그 예는 다음과 같다.


(자연수 문제)
두 자리의 자연수가 있다. 일의 자리와 십의 자리 숫자의 합은 12이고, 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾸면 원래의 수 보다 18이 커진다.
원래의 수는 얼마인가?

1) 식을 쓰고 답을 구하시오.
(단, 그림도 나타내어 풀어보시오)

<그림 4> 학생 S4의 자연수 문제 풀이

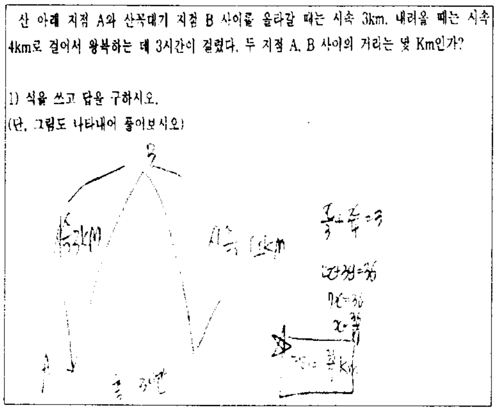
학생 S4는 풀이과정 각 단계는 옳으나 제시된 답은 문제에서 요구하는 답이 아닌 것을 구했다. 문제에서 요구하는 것은 원래의 두 자리 자연수이지만, S4는 풀이과정에서 일의 자리 숫자를 미지수로 두고 구함으로써, 구한 미지수 즉, 일의 자리 숫자 7을 답이라고 생각하였다. 이 경우는 문제에서 요구하는 것이 무엇인지 명확히 확인하지 않음으로써 생길 수 있는 검증되지 않은 답의 사례라 볼 수 있다. 다음은 S4와의 면담내용이다.

R : 잘 풀었는데 왜 답을 7이라고 했어요?
S4 : 그냥 X만 구했어요.
R : X만 구하고 뭘 안했어요?
S4 : 네?
R : 뭘 안 해서 이렇게 틀린 것 같아요? 검토를 안했죠?
S4 : 네.
R : 왜 이렇게 푼 것 같아요? 실수한거 같아요?
S4 : 이것은 이상하게 푼 것 같아요.
R : 답이 맞았는지 한번 확인해보세요.
S4 : X는 7을 구한 다음에 원래 수 여기에다가 7을 대입해서 풀어야 원래 답이 나와요.
R : X만 구하고 끝내버렸구나?
S4 : 네. 만날 X가 답이었으니까. X만 구하고 끝낸 것 같아요.

학생 S4는 면담과정에서 자연수 문제를 풀 때 미지수 X가 항상 구하고자 하는 문제의 답이었기 때문에 문제에서 요구하지 않은 답을 구하였다고 하였다. S4 이외의 몇몇 학생들도 자연수 문제뿐만 아니라 다른 문장제 유형에서 검증되지 않은 답의 오류를 범하였다.

5) 오용된 자료의 오류

오용된 자료의 오류는 문제를 풀기 위해 옮겨 쓰는 과정에서 어떤 세부 항목을 잘못 옮겨 쓰는 경우로 모두 4명의 학생이 이 오류를 범하였다. 오용된 자료의 예는 다음과 같다.



<그림 5> 학생 S1의 거리-속력 문제 풀이

학생 S1은 문제3을 해결할 때, $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=3$ 다음 식에서 $4x+3y=36$ 라고 표기하였다. 앞 식을 계산하고, 다음 식으로 옮겨 쓰는 과정에 x를 y로 잘못 옮겨 쓴 사례라고 볼 수 있다. 학생 S1은 면담과정에서 속력-거리 문제 풀이과정에서 처음 식에서 다음 식으로 넘어가는 과정에서 단지 잘못으로 인해 처음 식에 없던 문자 Y를 다음 식에 썼다고 하였다. S1 이외의 소수 학생들도 속력-거리 문제뿐만 아니라 다른 유형의 문장제에서 검증되지 않은 답의 오류를 범하였다.

6) 논리적으로 타당하지 않은 추론의 오류

논리적으로 타당하지 않은 추론의 오류는 그릇된 추론(이미 알고 있는 것으로부터 결론을 도출하는 행위 또는 과정)을 하여 생기는 경우로 학생들은 이 오류를 전혀 범하지 않았다. 왜냐하면 본 연구에서 사용한 10문항의 문장제는 추론을 사용하지 않고도 충분히 풀 수 있는 수준의 문제들로 구성되었기 때문에 모든 학생들이 문제 해결에서 추론상의 오류는 전혀 나타나지 않았다.

2. 오류 유형과 Polya의 문제 해결 단계의 관련성 분석

1) 잘못 해석된 언어의 오류

대수 문장제 해결 과정에서 나타난 학생들의 오류 유형과 Polya의 문제 해결 단계의 관련성을 분석한 결과 잘못 해석된 언어의 오류를 범한 학생들은 문제 해결의 문제 이해 단계와 계획 작성 단계, 반성 단계에서 이해가 부족함이 발견되었다. 잘못 해석된 언어의 오류가 발견된 54개 문항에 대

하여 조사한 결과 문제의 이해에서 '불완전 이해'가 61.1%로 이해가 부족하고, 계획의 작성에서는 '불완전 계획의 작성'이 77.8%로 계획의 작성도 부족하였다. 반성에서는 '불완전 반성'이 63%로 반성도 부족한 것으로 밝혀졌다. 잘못 해석된 언어의 오류는 문제의 해석상의 오류로 문제의 이해가 가장 부족할 것으로 예상되었지만 계획의 작성과 반성이 더욱 부족한 것으로 나타났다.

문제 해결 4단계 체크리스트의 문항 중 문제의 이해에서는 특히 '문제의 조건을 여러 부분으로 분리하여 쓸 수 없다'는 응답(9/20)이 가장 많았다. 계획의 작성에서는 '문제를 다르게 진술할 수 없다'는 응답(15/40)이 가장 많았다. 그리고 반성에서는 '문제에서 구한 결과를 다른 방법으로 구할 수 없다'는 응답(16/28)이 가장 많았다.

잘못 해석된 언어의 오류와 Polya의 문제 해결 4단계와의 관련성을 분석한 결과 잘못 해석된 언어의 오류와 문제 해결의 계획 작성 단계, 반성 단계가 상대적으로 다른 단계보다 더욱 관련되어 있는 만큼 학생들이 잘못 해석된 언어의 오류를 범하지 않도록 하기 위해서는 대수 문장제 해결 과정에서 계획을 작성하고 반성하는 단계에 주의를 기울여 지도해야 할 것이다.

<표 6> 잘못 해석된 언어의 오류와 문제 해결 단계의 관련성

문제 해결 단계	척도	개수	비율
문제의 이해	완전한 이해	20개	37.0%
	불완전 이해	33개	61.1%
	이해 못함	1개	1.9%
	합 계	54개	100%
계획의 작성	완전한 계획의 작성	10개	18.5%
	불완전 계획의 작성	42개	77.8%
	계획 작성 못함	2개	3.7%
	합 계	54개	100%
계획의 실행	완전한 계획의 실행	31개	57.4%
	불완전 계획 실행	14개	25.9%
	계획 실행 못함	9개	16.7%
	합 계	54개	100%
반성	완전한 반성	16개	29.6%
	불완전 반성	34개	63.0%
	반성 못함	4개	7.4%
	합 계	54개	100%

2) 왜곡된 정리나 정의의 오류

왜곡된 정리나 정의의 오류를 범한 학생들은 문제 해결의 문제 이해 단계, 계획 작성 단계, 반성 단계에 대한 이해가 부족한 것으로 나타났다. 특히 계획 작성이 특히 부족한 것으로 발견되었다. 문제의 이해에서 '불완전 이해'가 57.7%로 이해가 부족하고, 계획의 작성에서 '불완전 계획의 작성'이 90.4%로 계획의 작성이 매우 부족하였다. 반성에서는 '불완전 반성'이 65.4%로 반성 단계에 대한 수행이 미흡하였다. 문제 해결 4단계 체크리스트의 문항 중 문제의 이해에서는 '문제 상황을 그림으로

그리고 적절한 기호를 붙일 수 없다'는 응답(7/20)이 가장 많았다. 계획의 작성에서는 '문제를 다르게 진술할 수 없다'는 응답(13/38)이 가장 많았다. 그리고 반성에는 '문제에서 구한 결과를 다른 방법으로 구할 수 없다'는 응답(12/30)이 가장 많았다.

왜곡된 정리나 정의의 오류와 Polya의 문제 해결 4단계와의 관련성을 분석한 결과 왜곡된 정리나 정의의 오류와 문제 해결의 문제 이해 단계, 계획 작성 단계와 반성 단계가 상대적으로 다른 단계보다 더욱 관련되어 있었다. 학생들이 왜곡된 정리나 정의의 오류를 범하지 않도록 하기 위해서는 대수 문장제 해결 과정에서 문제의 이해, 계획을 작성하고 반성하는 단계에 주의를 기울여 지도해야 할 것이다.

<표 7> 왜곡된 정리나 정의의 오류와 문제 해결 단계의 관련성

문제 해결 단계	척도	개수	비율(%)
문제의 이해	완전한 이해	17개	32.7%
	불완전 이해	30개	57.7%
	이해 못함	5개	9.6%
	합 계	52개	100%
계획의 작성	완전한 계획의 작성	2개	3.8%
	불완전 계획의 작성	47개	90.4%
	계획 작성 못함	3개	5.8%
	합 계	52개	100%
계획의 실행	완전한 계획의 실행	22개	42.3%
	불완전 계획 실행	17개	32.7%
	계획 실행 못함	13개	25.0%
	합 계	52개	100%
반성	완전한 반성	4개	7.7%
	불완전 반성	34개	65.4%
	반성 못함	14개	26.9%
	합 계	52개	100%

3) 기술적 오류

기술적 오류를 범한 학생들은 문제 해결 단계에서 특히 반성 단계가 성실히 수행되지 않은 것으로 발견되었다. 반성에서 '불완전 반성'이 81.3%로 기술적 오류에서는 반성이 특히 부족하였다. 기술적 오류는 계산상의 오류로 계획의 실행이 가장 부족할 것으로 예상되었지만 문제의 이해, 계획의 작성, 반성이 더욱 부족한 것으로 나타났다.

문제 해결 4단계 체크리스트의 문항 중 문제의 이해에서는 '문제의 조건을 여러 부분으로 분리하여 쓸 수 없다'는 응답(6/12)이 가장 많았다. 계획의 실행에서는 '풀이 단계가 옳다는 것을 증명할 수 없다.'는 응답(2/9)이 가장 많았다. 그리고 계획의 작성과 반성에서는 특별히 많은 응답 없이 고르게 나타났다.

기술적 오류와 Polya의 문제 해결 4단계와의 관련성을 분석한 결과 기술적 오류와 문제 해결의

반성 단계가 특히 다른 단계보다 더욱 관련되어 있었다. 학생들이 기술적 오류를 범하지 않도록 하기 위해서는 대수 문장제 해결 과정에서 계획을 작성하고 반성하는 단계에 특히 주의를 기울여 지도해야 할 것이다.

<표 8> 기술적 오류와 문제 해결 단계의 관계성

문제 해결 단계	척도	개수(개)	비율(%)
문제의 이해	완전한 이해	7개	43.7%
	불완전 이해	9개	56.3%
	이해 못함	0개	0%
	합 계	16개	100%
계획의 작성	완전한 계획의 작성	7개	43.7%
	불완전 계획의 작성	9개	56.3%
	계획 작성 못함	0개	0%
	합 계	16개	100%
계획의 실행	완전한 계획의 실행	7개	43.75%
	불완전 계획 실행	7개	43.75%
	계획 실행 못함	2개	12.5%
	합 계	16개	100%
반성	완전한 반성	3개	18.7%
	불완전 반성	13개	81.3%
	반성 못함	0개	0%
	합 계	16개	100%

4) 검증되지 않은 답의 오류

검증되지 않은 답의 오류를 범한 학생들은 문제 해결의 계획 작성 단계, 반성 단계에 대한 이해가 부족한 것으로 나타났다. 특히 계획의 작성 단계가 충분히 이루어지지 않았다. 검증되지 않은 답의 오류에서는 계획의 작성에서 '불완전 계획의 작성'이 100%로 계획의 작성이 매우 부족하였다. 반성에서는' 불완전 반성'이 80%로 반성 또한 많이 부족하였다. 즉 검증되지 않은 답의 오류에서는 계획의 작성 및 반성이 매우 부족한 것으로 나타났다. 검증되지 않은 답의 오류는 문제에서 요구한 것을 검토하지 않아 생기는 오류로 반성이 가장 부족할 것으로 예상되었지만 계획의 작성이 더욱 부족한 것으로 나타났다.

문제 해결 4단계 체크리스트의 문항 중 문제의 이해에서는 '문제의 조건을 여러 부분으로 분리하여 쓸 수 있다.'는 응답(4/8)이 가장 많았다. 계획의 작성에서는 '보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 없다.'는 응답(6/7)이 가장 많았다. 그리고 반성에서는 '문제를 풀고 난후 문제 풀이과정을 점검하지 않았다.'는 응답(7/13)이 가장 많았다.

검증되지 않은 답의 오류와 Polya의 문제 해결 4단계와의 관련성을 분석한 결과 검증되지 않은 답의 오류와 문제 해결의 계획 작성 단계, 반성 단계가 상대적으로 다른 단계보다 더욱 관련되어 있

었다. 학생들이 검증되지 않은 답의 오류를 범하지 않도록 하기 위해서는 대수 문장제 해결 과정에서 계획을 작성하고 반성하는 단계에 주의를 기울여 지도해야 할 것이다.

<표 9> 검증되지 않은 답의 오류와 문제 해결 단계의 관련성

문제 해결 단계	척도	개수	비율
문제의 이해	완전한 이해	5개	50%
	불완전 이해	5개	50%
	이해 못함	0개	0%
	합 계	10개	100%
계획의 작성	완전한 계획의 작성	0개	0%
	불완전 계획의 작성	10개	100%
	계획 작성 못함	0개	0%
	합 계	10개	100%
계획의 실행	완전한 계획의 실행	8개	80%
	불완전 계획 실행	2개	20%
	계획 실행 못함	0개	0%
	합 계	10개	100%
반성	완전한 반성	2개	20%
	불완전 반성	8개	80%
	반성 못함	0개	0%
	합 계	10개	100%

5) 오용된 자료의 오류

오용된 자료의 오류를 범한 학생들은 문제 해결의 문제 이해 단계, 계획 작성 단계와 반성 단계는 충실히 수행한 반면, 계획 실행 단계가 부족한 것으로 나타났다. 계획의 실행에서 '불완전 계획 실행'이 50%로 나타났다. 즉 오용된 자료에서는 계획의 실행 부분이 부족한 것으로 밝혀졌다.

문제 해결 4단계 체크리스트의 문항 중 계획의 실행에서는 '풀이 단계가 옳다는 것을 증명할 수 없다.'는 응답(2/2)이 가장 많았다. 문제의 이해, 계획의 작성, 반성에서는 특별히 많은 응답을 한 것 없이 고르게 나타났다.

오용된 자료의 오류와 Polya의 문제 해결 4단계와의 관련성을 분석한 결과 오용된 자료의 오류와 문제 해결의 계획 실행 단계가 상대적으로 다른 단계보다 더욱 관련되어 있었다. 학생들이 오용된 자료의 오류를 범하지 않도록 하기 위해서는 대수 문장제 해결 과정에서 계획을 실행하는 단계에 주의를 기울여 지도해야 할 것이다.

<표 10> 오용된 자료의 오류와 문제 해결 단계의 관련성

문제 해결 단계	척도	개수	비율
문제의 이해	완전한 이해	4개	100%
	불완전 이해	0개	0%
	이해 못함	0개	0%
	합 계	4개	100%
계획의 작성	완전한 계획의 작성	4개	100%
	불완전 계획의 작성	0개	0%
	계획 작성 못함	0개	0%
	합 계	4개	100%
계획의 실행	완전한 계획의 실행	2개	50%
	불완전 계획 실행	2개	50%
	계획 실행 못함	0개	0%
	합 계	4개	100%
반성	완전한 반성	4개	100%
	불완전 반성	0개	0%
	반성 못함	0개	0%
	합 계	4개	100%

V. 결론 및 제언

문장제는 일상생활에서 일어나는 여러 가지 문제를 합리적으로 처리하는 능력이나 태도를 기를 수 있기 때문에 실생활에 매우 유용하다. 그러나 선행 연구결과에 따르면 대부분의 학생들이 문장제 해결에 많은 어려움을 갖고 있다. 대수 문장제 해결 과정에서 학생들이 범하는 오류의 원인을 찾기 위해서는 학생들의 문제 해결 과정에 대하여 분석이 이루어져야 한다. 본 연구에서는 중학교 2학년 106명을 대상으로 대수 문장제 지도에 대한 좀 더 상세한 교수학적 방안을 도출하고자 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류 유형을 조사하고, 각 오류 유형이 Polya의 문제 해결 단계와 어떤 관련성을 가지고 있는지 알아보았다. 본 연구 결과는 크게 두 가지로 요약할 수 있다.

첫 째, 학생들의 문장제 해결 과정에서 나타나는 오류 유형을 조사한 결과 잘못 해석된 언어, 왜곡된 정리나 정의의 오류가 대부분을 차지하였다. 따라서 교사의 문장제 지도 시 학생들의 정확한 의미 파악 및 올바른 개념 지식 전달에 특히 유념하여 지도할 필요가 있다.

둘 째, 대수 문장제 해결 과정에서 나타난 학생들의 오류 유형이 대수 문장제의 해결 단계와 어떤 관련성을 가지고 있는지 조사한 결과 오용된 자료의 오류를 범하는 학생들은 대부분 계획 실행 단계를 성공적으로 수행하지 못하였고, 잘못 해석된 언어, 왜곡된 정리나 정의의 오류를 범하는 학생들은 문제의 이해, 계획의 작성, 반성 단계를 성공적으로 수행하지 못하였다. 검증되지 않은 답의 오류를 범한 학생들은 계획의 작성과 반성의 단계를 성공적으로 수행하지 못하였으며, 기술적 오류를 범한 학생들은 특히 반성 단계를 성공적으로 수행하지 못하였다. 따라서 오용된 자료의 오류를 범하는 학

생들은 계획 실행 단계를 강조하여 지도하고, 잘못 해석된 언어, 왜곡된 정리나 정의의 오류를 범하는 경우에는 문제의 이해, 계획의 작성, 반성 단계를 강조하여 지도할 필요가 있다. 그리고 검증되지 않은 답의 오류를 범하는 경우에는 계획의 작성, 반성의 단계에 좀 더 주의를 기울여야 하고, 기술적 오류를 범하는 경우에는 특히 반성 단계를 강조하여 지도할 필요가 있다.

본 연구에서는 경기도 지역에 소재한 중학교 2학년 3학급만을 대상으로 문장제에서 나타나는 오류 유형 및 문제 해결 단계와의 관련성을 알아보았지만, 미래 연구에서는 신뢰도를 높이기 위해 다양한 지역, 연구 대상을 선정하여 연구할 필요가 있다. 대수 문장제와 관련된 선행 연구와 본 연구 결과에서 학생들은 문장제 해결에서 식 세우기 외의 다양한 해결 전략(표 그리기, 그림 그리기, 예상과 확인 등)을 사용하여 문제를 정확하게 해결하였다. 문장제에 해결력을 높이기 위한 방안으로 다양한 해결 전략을 이용한 교수·학습 방안에 대한 연구도 이루어질 필요가 있다. 또한 본 연구에서는 대수 문장제 해결에서 나타나는 학생들의 오류 유형과 Polya의 문제해결 4단계와의 관련성만을 알아보았지만 앞으로 대수 문장제 해결과 관련된 좀 더 심층적인 연구가 수행되기를 제언하는 바이다.

참 고 문 헌

고성은·박복현·김준희·최수일·강운중·소순영 (2006). 중학교 7-가 수학, 서울: (주)블랙박스.

강옥기·정순영·이환철 (2006). 중학교 7-가 수학, 서울: (주)두산.

강완·김진호·신혜진 (2001). 문제 해결 과정의 평가 기법, 서울: 동명사.

김영채 (1996). 사고와 문제해결심리학, 서울: 다우문화사.

남승인·류성림 (2002). 문제해결 학습의 원리와 방법, 서울: 형설출판사.

박규홍·한옥동·김성국·임창우·고성군·김유태·육상국·박재용 (2002). 중학교 7-가 수학, 서울: 두레교육(주).

박윤범·박혜숙·권력천·육인선 (2002). 중학교 7-가 수학, 서울: 대한교과서(주).

박정아·신현용 (2005). 중학교 1학년 학생들의 농도 문장제 해결력에 대한 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, pp.525-534.

방승진·이상원 (1999). Polya의 문제해결 전략을 이용한 효과적인 문장제 지도방안 -고등학교 중심, 한국학교수학회논문집 **8**, pp.209-229.

양승갑·박영수·박원선·배종숙·성덕현·이성길·홍우철 (2002). 중학교 7-가 수학, 서울: (주)금성출판사.

이정은 (1998). 중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석, 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

신항균 (2006). 7-가 수학, 서울: 형설출판사.

주익한·김영국 (1997). 문장제 풀이의 실패 유형 분류와 그 경향의 연구, 한국수학교육학회지 시리

즈 A <수학교육> **36(2)**, pp.161-169.

지재근 · 오세열 (2000). 문장제에 대한 이해정도가 문제해결력 신장에 미치는 영향에 대한 연구, 한국학교수학회논문집 **3(1)**, pp.189-200.

최용준 (2006). 중학교 7-가 수학, 서울: (주)천재교육.

Blando, J. A., Kelly, A. E., Schneider, B. R. & Sleeman, D. (1989). Analyzing and modeling arithmetic errors, *Journal for Research in Mathematics Education* **20(3)**, pp.301-308.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception, *Journal for Research in Mathematics Education* **13(1)**, pp.16-30.

Dooren, W. V., Verschaffel L. & Onghena, P. (2002). The Impact of Preservice Teachers' Content Knowledge on Their Evaluation of Students' Strategies for Soving Arithmetic and Algebra Word Problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **33(5)**, pp.319-351.

Hadar, N. M., Zasalarsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education* **18(1)**, pp.3-14.

Kriegler, S. (2000). Mathematics content programs for teachers, UCLA, Department of Mathematics, Retrieved July, 8 ,2008, from http://www.learner.org/channel/courses/learning math/algebra/session1/part_a/index.html.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education* **10(3)**, pp.163-172.

Lawson, M. J. & Chinnappan, M. (2000). Knowledge Connectedness in Geometry Problem Solving, *Journal for Research in Mathematics Education* **31(1)**, pp.26-43.

Mayer. R. E. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition* pp.354-375, NY: W. H. Freeman and Company.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics* p.334, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ng, S. F. & Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **40(3)**, pp.282-313.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*, J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, Washington, DC: National Academy Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it*, Princeton University Press, NJ: Princeton.

Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation, *Journal for Research in Mathematics Education* **14(3)**, pp.169-181.

Xin, Y. P. (2008). The effect of schema-based instruction in solving mathematics word problems: An emphasis on prealgebraic conceptualization of multiplicative relations, *Journal for Resarch in Mathematics Education* **39(5)**, pp.526-551.

The Analysis of Relationship between Error Types of Word Problems and Problem Solving Process in Algebra

Kim, Jinho

Dept. of Curriculum and Instruction, Graduate School of Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701

E-mail : beat7070@hanmail.net

Kim, Kyungmi

Center for Curriculum and Instruction studies, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701

E-mail : kyungmi@korea.ac.kr

Kwean, Hyukjin

Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701

E-mail : Kwean@korea.ac.kr

The purpose of this study was to investigate the relationship between error types and Polya's problem solving process. For doing this, we selected 106 sophomore students in a middle school and gave them algebra word problem test. With this test, we analyzed the students' error types in solving algebra word problems.

First, We analyzed students' errors in solving algebra word problems into the following six error types. The result showed that the rate of student's errors in each type is as follows: "misinterpreted language"(39.7%), "distorted theorem or solution"(38.2%), "technical error"(11.8%), "unverified solution"(7.4%), "misused data"(2.9%) and "logically invalid inference"(0%). Therefore, we found that the most of student's errors occur in "misinterpreted language" and "distorted theorem or solution" types.

According to the analysis of the relationship between students' error types and Polya's problem-solving process, we found that students who made errors of "misinterpreted language" and "distorted theorem or solution" types had some problems in the stage of "understanding", "planning" and "looking back". Also those who made errors of "unverified solution" type showed some problems in "planing" and "looking back" steps. Finally, errors of "misused data" and "technical error" types were related in "carrying out" and "looking back" steps, respectively.

* ZDM Classification : D73

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

* Key Words : Algebra word problems, Error, problem solving

<부록> 문제 해결 4단계 체크 리스트

문제해결 4단계 체크 리스트

학년: 반: 이름: 성별: 날짜 : 2009년 월 일

1. 다음 문항을 읽고 맞으면 O, 틀리면 X 표시를 하시오.

단 계	문제 해결 각 단계에 대한 질문 사항	O,X
문제의 이해	• 나는 주어진 조건과 미지의 것이 무엇인지 알고 있다.	
	• 문제의 주어진 조건은 미지의 것을 구하는데 충분하다.	
	• 나는 문제 상황을 그림으로 그리고 적절한 기호를 붙일 수 있다.	
	• 나는 문제의 조건을 여러 부분으로 분리하여 쓸 수 있다.	
계획의 작성	• 나는 전에 이 문제 또는 이 문제와 약간 다른 형태의 문제를 본 일이 있다.	
	• 나는 이 문제를 푸는데 유용한 어떤 정의나 정리를 알고 있다.	
	• 나는 문제를 다르게 진술할 수 있다.	
	• 나는 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있다.	
	• 나는 유사한 문제를 생각해 낼 수 있다.	
	• 나는 문제에 주어진 조건을 모두 사용하였다.	
계획의 실행	• 나의 문제 풀이 단계는 명확하다.	
	• 나는 풀이 단계가 옳다는 것을 증명할 수 있다.	
반성	• 나는 문제를 풀고 난 후 결과가 맞는지 확인하였다.	
	• 나는 문제를 풀고 난 후 문제 풀이과정을 점검하였다.	
	• 나는 문제에서 구한 결과를 다른 방법으로 구할 수 있다.	
	• 나는 문제에서 구한 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용(응용)할 수 있다.	