韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 3호, 2009. 9. 583-597

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 3, Sep. 2009. 583-597

함수의 극값에서 이공계열 학생들의 오류에 대한 분석

심 상 길 (단국대학교)
최 재 길 (단국대학교)

본 연구는 함수의 극값에서 학생들이 범하는 오류를 분석하여 극값을 지도하는 교수자들에게 유용한 정보를 제공하기 위해 이공계열 신입생을 대상으로 극값에 대한 오류를 조사하였다. 이공계열 학생들의 극값에서의 오류는 대부분 곡해된 정리와 정의 유형으로, 필수적인 사실이나 개념의 부족한 숙련에서 발생한다. 조사 결과를 살펴보면, 극값의 정의에 대해 정확하게 설명하는 학생은 적었으나 주어진 그래프에서 극댓값과 극솟값을 올바르게 표시하는 학생은 비교적 많았고, 주어진 함수의 미분계수가 0인 점에서 극값을 갖는다고 생각하는 학생과 불연속함수에서는 극값이 존재하지 않는다고 생각하는 학생이 많았다. 따라서 극값의 정의를 설명할 때 그래프만 기억하지 않고 그래프에서 극값의 정의를 유추할 수 있도록 지도하고, 다양한 예를 통해 극값을 갖는 함수와 갖지 않는 함수, 불연속함수와 임계점에서의 극값 등을 서로 비교하며 설명해야 한다.

I. 서 론

대학수학에서 미적분 지도는 과학적 사고를 위한 강력한 도구의 개발을 위한 것으로, 특히 이공계열의 학생들에게는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물들의 현상과 실생활의 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 논리적인 사고력과 합리적인 문제해결 능력을 키움으로써 자연 과학이나 공학 분야의 전공을 올바르게 이해하고 활용하기 위해 필요하다. 이공계열 학생들이 대학에서 미적분을 학습하는 동안 선행지식과 수학적 용어에 대한 잘못된 인식, 추상성 및 형식성과 같은 수학의 학문적 특성, 학생들의 인지적, 정서적인 내적 요인 등 다양한 요인들로 인해 많은 오류를 범하게 된다. 이와 같은 오류는 쉽게 교정되지 않기 때문에 학생을 지도하는데 주의가 필요하다. 그러나 학생들이 범하는 오류는 일반적으로 문제를 이해하고 해결하는 과정에서 의미가 있는 경우가 많기 때문에 교수자들이 학생들의 수학적인 오류를 분석하여 적절한 처방을 준비하고 주의를 기울일 수 있다면 학생을 지도하는데 도움이 될 수 있다.

수학교육에서 학생들의 오류에 대한 연구는 학생들의 인지능력을 파악할 수 있고, 교수-학습 상황에서 더 효율적으로 활용할 수 있기 때문에 매우 중요하다. 이러한 이유에서 오류 및 오류 유형 분석(Radatz, 1979; Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987), 수학과 오류의 진단과 처방에 대한 자료 개발(김수미, 2003), 수학적 오류의 분류 가능성 탐색(김부미, 2005) 등 오류에 대한 일반적인 연구와 함수학

* 접수일(2009년 7월 31일), 게재확정일(2009년 8월 19일)
* ZDM 분류 : D75
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 이공계열 학생, 극값, 오류 분석

습에서 발생하는 수학적 오류(송순희, 오정현, 1997; 심상길, 최재용, 2008), 미분개념의 이해 및 오류 유형 분석(김정희, 조완영, 2004), 대학수학에서 문제풀이에서 오류, 결점, 모순(김병무, 2007) 등 수학 학습에서 발생하는 오류를 분석한 사례에 대한 연구 등 다양한 연구가 진행되어 왔다. 이러한 오류에 대한 풍부한 지식은 교사로 하여금 오류 원인에 따른 정확한 피드백을 학생들에게 제공해 주도록 하며, 오개념을 유발하는 교수법을 반성하고 수정하도록 할 것이다. 따라서 어떤 식으로든 교사는 학생의 오개념에 대해 민감해야 하며, 이를 위해서는 오개념 및 오류에 관련된 정보를 교사들이 쉽게 이해하고 활용할 수 있는 형태로 교사용 자료가 개발되어야 할 것이다(김수미, 2003).

최근 대학에서 이공계열 학생을 대상으로 강의하는 교수들은 많은 어려움을 이야기하고 있다. 이는 대학수학능력시험에서 '수리 나'형을 선택한 학생들을 이공계열의 학과에 지원을 허용하는 대학입시 제도로 인해 학생들의 수학 학습능력의 차가 매우 심하기도 하지만, 근본적인 원인 중 하나는 학생들이 수학학습에서 발생하는 오류에 대한 연구와 같이 수업에 도움을 줄 수 있는 체계적인 연구들이 미흡하기 때문이다. 특히, 미분의 활용에서 배우는 함수의 극값에서 학생들이 범하는 오류에 대한 연구가 부족한 상태이다. 따라서 극값을 지도하는 교수자들에게 유용한 정보를 제공하고, 수업 계획과 진행에 도움을 줄 수 있는 극값에서 학생들의 오류에 대한 연구가 필요하다.

본 연구에서는 고등학교와 대학에서 배우는 극값에 대해 알아보고 오류의 유형에 대해 살펴본 다음, 대학교 이공계열에 입학한 신입생들의 극값에서의 오류를 분석하여 대학에서 극값을 지도하는 교수자에게 유용한 자료를 제공하고 이에 따른 시사점을 찾으려고 한다.

II. 극값 지도와 오류 유형

1. 극값 지도

(1) 고등학교 수학 교과서에서의 극값

고등학교 수학에서 극값은 '수학 II'와 '미분과 적분'의 도함수의 활용 단원에서 도입된다. '수학 II'에서는 다항함수의 미분법, 접선의 방정식, 함수의 증가와 감소를 다룬 후 극값의 정의와 다항함수에 관련된 극댓값과 극솟값을 배운다. '미분과 적분'에서는 여러 가지 함수(합성함수, 삼각함수, 로그함수, 지수함수 등)의 미분법, 접선의 방정식, 평균값의 정리, 함수의 증가와 감소를 다룬 후 여러 가지 함수에 관련된 극댓값과 극솟값을 배운다.

우리나라에서 출판되고 있는 '수학 II' 교과서는 모두 12종이고, 각 교과서에서 제시하는 극값의 정의를 살펴보면 극값은 극댓값과 극솟값을 통틀어 말하고, 극댓값과 극솟값의 정의는 교과서마다 표현이 조금 다르지만 일반적으로 다음과 같다.

"함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, 그 때의 함수값

$f(a)$를 극댓값이라 한다. 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고, 그 때의 함수값 $f(a)$를 극솟값이라 한다."

극값을 정의할 때, 12종의 교과서 중 10종의 교과서(박규홍 외 5인, 2003; 박두일 외 8인, 2003; 박배훈 외 6인, 2003; 우정호 외 5인, 2003; 이강섭 외 6인, 2003; 임석훈 외 3인, 2003; 임재훈 외 9인, 2003; 조태근 외 4인, 2003; 최상기 외 3인, 2003; 최용준 외 1인, 2003)는 위에 제시한 정의와 같이 극값을 연속함수에서 다루고, 2종의 교과서(정광식 외 2인, 2003; 최대봉 외 5인, 2003)에서는 연속함수에 대한 언급이 없이 모든 함수에서 정의한다.

'수학 II'에서는 극값을 정의한 후 극값에서의 미분계수, 극대, 극소의 판정법을 배운 다음 여러 가지 문제 상황에서 극값을 구한다. '미분과 적분'에서는 극대, 극소를 판정하는 방법과 이계도함수를 이용한 함수의 극대, 극소를 배운 후 극값을 구한다.

(2) 대학 미분적분학에서의 극값

대학의 '미분적분학'에서는 연속성과 미분가능성, 미분계수, 여러 가지 함수의 미분법, 평균값의 정리, 함수의 증감과 곡선의 오목, 볼록을 배운 후 극값을 다룬다. 극값(extremum value)은 극댓값과 극솟값을 통틀어 말하고, 극댓값과 극솟값은 다음과 같이 정의한다(미분적분학교재편찬위원회, 2003).

"함수 f가 점 x_0을 포함하는 적당한 구간에서 정의 되었다고 하자. 이 때 x_0의 어떤 근방 안의 모든 점 x에 대하여 $f(x) \le f(x_0)$을 만족하면 $f(x_0)$을 f의 극댓값(relative maximum value)이라 하고, $f(x) \ge f(x_0)$을 만족하면 $f(x_0)$을 f의 극솟값(relative minimum value)이라 한다."

또, Bartle과 Sherbert(1982)는 극값을 다음과 같이 정의하고 있다.

"The function $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ is said to have a relative maximum [respectively, minimum] at $c \in \mathrm{I}$ if there exists a neighborhood U of c such that $f(x) \le f(c)$ [respectively, $f(c) \le f(x)$] for all x in $\mathrm{U} \cap \mathrm{I}$. We say that f has a relative extremum at $c \in \mathrm{I}$ if it has either a relative maximum or a relative minimum at c."

고등학교 교과서 12종 중 10종에서는 극값의 정의를 연속함수에서 다루고 있으나 대학에서는 연속이라는 언급 없이 모든 함수를 대상으로 다룬다. 또, 고등학교에서 배운 바와 같이, 극값을 구하기 위해 먼저 극값정리, 극대, 극소 판정법, 이계도함수를 이용한 극대, 극소 판정법을 배운 후 여러 가지 문제 상황에서 극값을 구하는 문제를 다룬다.

2. 오류 유형

수학학습에서 오류는 수학의 개념상 바르지 못한 논리과정을 의미한다(송순희, 오정현, 1997). 이러한 오류를 정보처리 과정으로 분류한 Radatz(1979)는 수학적 내용에 관련된 오류의 다양한 원인을

수학적 과제에 포함된 정보를 얻고, 처리하고, 파지하고, 재생산하는데 사용되는 매커니즘을 조사함으로써 확인되어질 수 있다고 하였다. 그리고 수학적 오류를 언어적 어려움에 기인한 오류, 공간적 지식 획득의 어려움에 기인한 오류, 선행 기술, 사실과 개념의 미숙에 기인한 오류, 부정확한 결합 혹은 사고의 경직성에 기인한 오류, 부적절한 규칙이나 전략의 응용에 기인한 오류로 분류하였다.

Hadar, Zaslavsky & Inbar(1987)은 이스라엘 고등학교 학생들의 수학졸업시험에서 범한 오류를 분석하여 오류 유형을 첫째, 오용된 자료(Misused data), 둘째, 잘못 해석된 언어(Misinterpreted language), 셋째, 논리적으로 부적절한 추론(Logically invalid inference), 넷째, 곡해된 정리와 정의(Distorted theorem or definition), 다섯째, 논증되지 않은 풀이(Unverified solution), 여섯째, 기술적인 오류(Technical error) 유형으로 분류하였다. 또, 이 연구에서 2년간 학생들이 범한 오류 중 높은 빈도를 보인 유형은 곡해된 정리와 정의 유형과 기술적 오류 유형이었다(<표 1> 참조).

<표 1> 각 유형별 오류 비율

오류 유형	1년차	2년차
오용된 자료	22%	20%
잘못 해석된 언어	17%	18%
논리적으로 부적절한 추론	2%	1%
곡해된 정리와 정의	34%	32%
논증되지 않은 풀이	0%	2%
기술적 오류	25%	27%

송순희, 오정현(1997)은 중학교 함수 영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구에서, Hadar, Zaslavsky & Inbar(1987)의 연구를 바탕으로 7가지 오류 모델을 제시하였는데, 그 유형은 첫째, 오용된 자료, 둘째, 잘못 해석된 언어, 셋째, 논리적으로 부적절한 추론, 넷째, 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련, 다섯째, 요구되지 않은 해답, 여섯째, 기술적 오류, 일곱째, 풀이 과정이 생략된 오류이다. 또, 이 연구에서 중학교 1, 2, 3학년 연구 대상에 따라 조금씩 그 결과가 달랐으나 전체적으로 살펴보면, 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련이 32.7%로 가장 높았고, 기술적 오류가 25.4%로 그 다음이었다. 이 결과는 Hadar, Zaslavsky & Inbar(1987)의 연구와 유사하게 나타났다.

Tall과 Vinner(1981)는 개념 이미지가 주어진 개념에 연관된 개인의 마음속의 모든 인지적 구조로 이루어지고, 이러한 이미지는 그림, 기호 형태, 다이어그램, 그래프 등의 모든 종류의 표상을 의미하며, 개념 이미지는 형식상의 개념 정의와 완전히 다른 측면을 가질 수 있을지 모르고, 전체적으로 분명하지 않을 수 있다고 언급하고 있다. Hadar, Zaslavsky & Inbar(1987)와 송순희, 오정현(1997)의 연구에서 학생들이 범하는 오류 중 가장 많은 부분을 차지한 곡해된 정리와 정의 유형과 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련 유형도 Tall과 Vinner가 언급한 개념에 대한 개념 이미지가 분명하게 인식되지 못했기 때문에 발생할 수 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 충청도에 위치한 A대학교 이공계열의 4개 학과에 입학한 신입생 197명을 대상으로 하였다. 이 연구에 선정된 대학의 이공계열 학생들을 사전에 조사한 결과 대학수학능력시험에서 '수리 가'형보다 '수리 나'형을 선택한 학생이 더 많았다(조사 대상인 이공계열 학생 705명 중 '수리 가'형 259명, 36.7%, '수리 나'형 367명, 52.1%, 특별전형 79명, 11.2%이다). 따라서 본 연구의 적절성을 위하여 연구 대상으로 선정된 학과는 대학수학능력시험에서 '수리 가'형과 '수리 나'형의 선택한 학생 비율이 비슷한 학과이며, 연구 대상으로 선정된 학생들은 본 연구에서 실시한 1차, 2차 조사에 모두 참여한 학생들이다.

<표 2> 연구 대상의 학과와 대학수학능력시험 선택 유형

	수리 가	수리 나	특별	합 계
화학과	20	27	4	51
전자물리학과	13	19	8	40
전자공학과	28	27	8	63
신소재공학과	21	15	7	43
합 계	82	88	27	197

2. 연구 방법 및 절차

(1) 연구 방법

본 연구는 대학교 이공계열에 입학한 신입생들의 극값에 대한 오류를 알아보기 위해 연구에 참여한 대상에게 문제를 제공하고 그 문제를 해결하는 과정에서 나타난 현상을 분석하는 연구가 수행되었다. 연구 대상들이 문제를 해결하는 과정 중 어떤 현상과 반응이 나타내는지를 살펴보기 위해 학생들이 기록한 질문지를 수집하여 그 내용을 일일이 살펴보고, 각각의 내용에서 유의미한 과정을 선정하고, 선정된 과정들은 과정이 의미하는 바에 따라 조직화하고 주제별로 분류하여 분석하였다.

(2) 질문지 구성

본 연구에서 사용한 질문지는 고등학교에서 배운 극값에 대해 어떻게 인식하고 있는 지를 알아보기 위한 1차 질문지와 대학에서 배운 극값에 대해 어떻게 인식하고 있는지를 알아보기 위한 2차 질문지로 나뉜다. 1차, 2차 질문지에 사용된 문항들은 고등학교 교과서와 대학에서 사용하는 교재를 중심으로 구성하였으며 그 내용을 살펴보면, 1차에서는 함수의 극값의 정의를 설명하는 문항, 주어진 그래프에서 극값을 찾는 문항, 다항함수의 극값을 구하는 문항으로 구성하였고, 2차에서는 주어진 명

제의 참과 거짓을 묻는 문항, 다항함수의 극값을 구하는 문항으로 구성하였다.

(3) 연구 절차

본 연구에서는 학생들이 배우는 극값의 내용을 알아보고 질문지 구성을 위하여 고등학교 수학 교과서와 대학에서 배우는 교재를 중심으로 극값에 대해 살펴본 후, 질문지를 작성하여 두 차례에 걸쳐 동일한 대상에게 극값에 대해 어떻게 알고 있는지를 묻는 조사를 실시하였다. 1차 조사는 대학에서 극값을 배우기 전인 4월 6일부터 4월 18일까지 전공별로 수학시간이 끝난 후 30분간 실시하였고, 2차 조사는 대학에서 극값을 배운 후 4월 27일부터 5월 8일까지 전공별로 수학시간이 끝난 후 30분간 실시하였다. 검사가 끝난 후 1, 2차 조사에 모두 참여한 학생들이 직접 작성한 질문지를 수거하여 그 내용을 분석하였다.

IV. 연구 결과 및 분석

본 연구에 참여한 학생들은 197명으로 학생들의 고등학교에서 선택했던 계열과 대학수학능력시험에서 선택한 유형은 다음과 같다.

<표 3> 참여 대상의 계열 및 수능 선택 유형

	수리 가	수리 나	특별	합계
이과	82	77	18	177
문과	0	8	1	9
실업	0	3	5	8
무응답	0	0	3	3
합계	82	88	27	197

<표 3>에서 보는 바와 같이, 197명 중 177명(89.8%)의 학생들이 고등학교에서 선택한 계열이 이과이므로 '수학 II'에서 다루는 극값에 대해 배운 것으로 나타났고, 문과나 실업계열의 학생 17명(8.6%)은 '수학 I'까지만 배운 것으로 나타났다.

1. 1차 조사 결과 분석

먼저, 극값의 정의에 대해 설명하라는 문항에 대해 다음과 같은 유형의 답이 나왔다.

(1) 기울기가 양에서 음으로, 음에서 양으로 변하는 점의 함수값 또는 그래프가 증가하다 감소하거나 감소하다 증가하는 점의 함수값(28명, 14.2%)

(2) 미분하여 기울기가 0이 되는 점 또는 $f'(x)=0$이 되는 점의 함수값(28명, 14.2%)

(3) 미분하여 0이 되고, 그래프가 증가하다 감소하거나 감소하다 증가하는 점의 함수값(14명,

7.1%)

(4) 기타 오답(41명, 20.8%)

(5) 무응답(86명, 43.7%)

고등학교에서 배운 극값의 정의를 바탕으로, 의미상 (1)번과 (3)번 유형을 답한 42명(21.3%)이 극값에 대해 알고 있는 것으로 분석된다. (1)번과 (3)번 유형을 답한 42명의 학생 중 함수값이라는 표현을 쓰지 않고 "~ 하는 점"이라고 답한 학생들도 있었으나 학생들이 극값의 의미를 알고 있는지를 알아보기 위한 것이므로 명확한 표현이 아니더라도 그 의미를 알고 있다고 판단하였다. 질문지에 아무런 답을 하지 않은 학생 86명(43.7%)과 극값과 상관없는 답을 한 학생 41명(20.8%)은 모두 127명(64.5%)으로 이들은 극값에 대해 전혀 설명하지 못하였다.

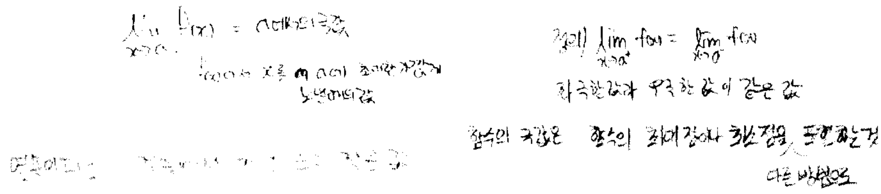
<표 4> 극값의 정의에 대한 설명

유형	수리 가	수리 나	특별	합계
(1)	19	6	3	28(14.2%)
(2)	14	10	4	28(14.2%)
(3)	12	1	1	14(7.1%)
(4)	17	18	6	41(20.8%)
(5)	20	53	13	86(43.7%)
합계	82(41.6%)	88(44.7%)	27(13.7%)	197(100%)

<표 4>에서 보는 바와 같이, 대학수학능력시험에서 '수리 나'형을 선택한 학생 88명 중 (4)번과 (5)번 유형을 답한 학생 71명(80.7%)이 극값에 대해 전혀 설명하지 못하였고, 특별전형인 학생 27명 중 19명(70.1%)이 극값에 대해 전혀 설명하지 못하였다. 이는 '수리 가'형을 선택한 학생(82명 중 37명, 45.1%)보다 더 높은 비율의 학생들이 극값에 대해 알지 못한 것으로 나타났다. 비록 문과나 실업계열의 학생들의 비율을 감안하더라도 매우 높은 수치의 학생들이 극값에 대해 설명하지 못한 것이다. 따라서 고등학교에서 계열이 이과이라도 대학수학능력시험에서 '수리 나'형을 선택하였거나 특별전형으로 입학한 학생들은 대학입시와 관련이 없는 극값에 대해 주의 깊게 학습하지 않아 그 개념을 기억하고 있지 못한 것으로 분석된다.

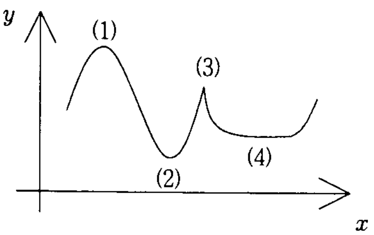
또, 극값을 구하는 과정에서 미분계수 즉 극값 정리를 사용하기 때문에 극값을 미분하여 "기울기가 0이 되는 점 또는 $f'(x)=0$이 되는 점"이라고 28명(14.2%)의 학생들이 답하였다. 이는 $f'(x)=0$이 되는 점에서 극값이 존재하지 않을 수도 있다는 사실을 간과하고, 극값을 구하는 과정에서 사용한 방법을 극값의 정의로 생각한 것이다. 이러한 오류는 Radatz(1979), Hadar, Zaslavsky & Inbar(1987), 송순희, 오정현(1997)이 분류한 오류 유형 중 개념의 미숙에 기인하거나 곡해된 정리와 정의 유형으로 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련에서 발생할 수 있고, 극값을 구하는 과정에서 발생한 개념 이미지가 그 개념으로 잘못 인식된 것으로 보인다. 이러한 학생은 극값에 관련된 문제를 해

결할 때, 미분계수가 0인 점만을 찾는다든지 극값이 없는 함수의 극값을 구하는 등의 오류를 범할 수 있다. 기타 오답으로는 극값을 극한값으로 설명한 경우 등 <그림 1>과 같이 극값에 대해 전혀 알고 있지 못한 경우이다.



<그림 1> 극값에 대한 기타 오류

다음은 <그림 2>에서 주어진 그래프에서 극댓값과 극솟값을 찾는 문제이다. <그림 2>에서 표시된 번호는 학생들에게 주어진 질문지에는 표시되지 않았고, 학생들이 직접 극댓값과 극솟값을 찾아 표시하게 하였다.



<그림 2> 주어진 그래프에서 극댓값, 극솟값 찾기

(1)을 극댓값, (2)를 극솟값이라고 답한 학생은 88명(44.7%)이었고, (1)을 극댓값, (2)를 극솟값, (3)을 극댓값이라고 답한 학생은 54명(27.4%)이었고, (1)을 극댓값, (2)를 극솟값, (3)을 극댓값, (4)를 극솟값이라고 답한 학생은 2명(1.0%)이었다. 이외에 (1)을 극댓값, (2)를 극솟값, (3)을 극댓값이라고 표시하고, (4)구간의 시작점만을 극솟값이라고 한 학생이 7명, (4)구간의 중간점만을 극솟값이라고 한 학생이 1명, (4)구간의 시작점과 끝점을 극솟값이라고 한 학생이 2명이 있었다. 또, 극값을 잘못 표시한 학생 16명(8.1%)과 아무런 표시를 하지 못한 학생도 27명(13.7%)이 있었다.

앞의 극값의 정의에서는 42명(21.3%)이 올바른 답을 한 반면에, 주어진 그래프에서 극댓값과 극솟값을 찾는 문제에서 (1)이 극댓값, (2)가 극솟값임을 아는 학생은 154명(78.2%)이었다. (3)과 (4)가 고등학교 교육과정에서는 특수한 경우임을 생각할 때, 극값에 대한 그래프에서 극값이 어떤 것을 의미하는지에 대해 어느 정도 알고 있는 것으로 나타났다. 이는 극값에 대해 언어적으로 설명을 하지 못하지만 그래프에서 아래로 오목하거나 위로 오목한 부분에서 극값을 갖는다는 개념 이미지가 그 개념보다 더 강하게 기억되기 때문이다. 이는 고등학교 12종 교과서 모두에서 극값의 정의를 설명할 때 그래프가 함께 제시되어 학생들은 정확한 정의는 기억하지 못하더라도 그래프에서의 극값은 구별

할 수 있는 것으로 보인다. 또한, 고등학교 교과서에서는 (3)과 (4)와 같은 특수한 경우를 제시하지 않기 때문에 많은 학생들이 (3)과 (4)가 극값임을 알지 못하였다. 그러나 (3)이 극댓값임을 아는 학생도 54명이 있었다. 이는 극값의 정의에서 증가상태에서 감소상태로 변하는 점에서의 함수값이라는 정의로부터 찾을 수 있었고, 이에 비해 (4)의 구간 전체가 극값임을 아는 학생은 매우 적었다. 실제로 이공계 학생들이 자주 사용하는 응용수학에서 표현되는 함수들은 임계점을 포함하는 함수가 많다. 예를 들어, 공업수학에서 푸리에 급수변환을 이용하여 비정현파를 분석하는 경우(최성재, 최희태, 김학범, 1996) 비정현파의 그래프에서는 <그림 2>의 (3)과 같이 연속이고 미분불가능한 점들이 주기적으로 나타나고, 라플라스 변환에서 중요하게 다루어지는 단위계단 함수들 또는 이들의 선형결합으로 표현되는 계단 함수의 그래프는 <그림 2>의 (4)와 같이 부분적으로 상수함수들이다. 극단적인 예로 가우스함수는 불연속점을 포함하는 모든 점에서 극댓값을 갖는다. 따라서 고등학교에서 잘 다루지는 않지만 이공계열 학생들이 자주 사용하는 (3)과 (4)와 같이 극값을 갖는 특수한 경우도 예를 통해 소개함으로써 이공계열 학생들의 전공학습에 도움을 주어야 한다.

다음은 $y = x^3$에서의 극값을 구하는 문제에서 다음과 같은 유형의 답이 나왔다.

(1) 미분만 구한 경우, $f'(x) = 3x^2$(12명, 6.1%)

(2) $f'(x) = 3x^2$, $x = 0$ 또는 극소값이 0(49명, 24.9%)

(3) 아무런 설명 없이 0(34명, 17.3%)

(4) 아무런 설명 없이 극값 없음(24명, 12.2%)

(5) $f'(x) = 3x^2$, $x = 0$ 극값 없음(17명, 8.6%)

(6) 기타(10명, 5.1%)

(7) 무응답(51명, 25.9%)

이 함수는 순증가 함수이므로 한 번 미분하여 0이 되는 점에서 극값을 갖지 않는 전형적인 예이다. 그러나 극값이 없다고 답한 학생은 (4), (5)번 유형을 답한 41명(20.8%)으로 극값이 0이라고 답한 (2)번, (3)번 유형의 학생 83명(42.1%)보다 더 적게 나왔다. 극값을 구할 때, 한 번 미분하여 0이 되는 점을 찾고 그 점에서의 함수의 증감을 조사하여야 하는데, 이를 간과하고 한 번 미분하여 0이 되는 점에서의 함수값이 극값이 된다고 생각한 결과이다. 이는 Radatz(1979)가 분류한 오류 유형 중 사실과 개념의 미숙에 기인한 오류, Hadar, Zaslavsky & Inbar(1987)가 분류한 오류 유형 중 곡해된 정리와 정의 유형과 기술적인 오류, 송순희, 오정현(1997)이 분류한 오류 유형 중 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련에서 오는 오류이다. 또, 극값을 구하지 못한 학생은 (1)번, (6)번, (7)번 유형으로 73명(37.1%)을 포함하면 모두 156명(79.2%)이 올바른 답을 찾지 못하였다.

<표 5> $y=x^3$에서의 극값을 구하는 문제에서의 학생들의 응답 유형

	가형	나형	특별	합계
(1)	6	4	2	12
(2)	25	19	5	49
(3)	13	16	5	34
(4)	13	9	2	24
(5)	13	2	2	17
(6)	4	5	1	10
(7)	8	33	10	51
합계	82	88	27	197

2. 2차 조사 결과 분석

다음은 대학에서 극값을 배운 후 불연속 함수의 극값에 대해 묻는 질문을 하였다.

"함수 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$가 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$ 로 정의되었을 때, f는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=\dfrac{1}{2}$를 갖는다는 명제가 참인지 거짓인지 말하고, 이유를 설명하시오(정동명, 조승제, 2004)."

위의 질문에서 참이라고 답한 학생은 11명(5.6%)이었고, 거짓이라고 답한 학생은 133명(67.5%)이고, 답을 쓰지 않은 학생이 53명(26.9%)이었다. 또, 참이라고 답한 학생 중에서 이유를 설명하지 못한 학생은 6명(3.0%)이었고, 극값을 정의를 이용하여 "주변(구간)에서 가장 큰 값"이라고 답한 학생은 5명(2.5%)에 불과했다. 거짓이라고 답한 학생들의 유형을 살펴보면 다음과 같다.

(1) $x=0$에서 연속이 아니므로 극값이 없다(34명, 17.3%).

(2) $x=0$에서 미분불가능하므로 극값이 없다(9명, 25.9%).

(3) $x=0$의 좌우에서 부호가 바뀌지 않는다(8명, 4.1%).

(4) $f(0)=0$이다. 또는 $f(0)=\dfrac{1}{2}$이 아니다(7명, 3.5%).

(5) $f(0)=0$가 극솟값이다(2명, 1.0%).

(6) $f(0)=\dfrac{1}{2}$는 극솟값이다(15명, 7.6%).

(7) 극댓값이 아니다. 또는 극댓값을 갖지 않는다(4명, 2.0%).

(8) 기타(54명, 27.4%)

학생들은 극값을 구할 때, 항상 미분을 사용하였으므로 미분가능하지 않으면 극값이 존재하지 않

는다고 생각한다. 따라서 연속하지 않은 함수는 미분가능하지 않기 때문에 많은 학생들이 연속이 아니거나 미분가능하지 않아 극값이 존재하지 않는다고 답하였다. 기타 답 중에서 거짓이라고만 답하고 이유를 설명하지 않은 경우(10명, 5.1%)와 그래프만 그린 경우(11명, 5.6%)가 있었고, $f(0)=\frac{1}{2}$은 극값이 아니라 함수값이라고 답한 학생도 4명(2.0%)이 있었다.

고등학교 과정에서 연속함수에서만 극값이 강조된다는 사실과 실제 응용문제에서 극값 정리를 활용할 수 있는 미분가능한 함수에 대한 문제가 주를 이루고 있다는 것을 인식해야 할 것이다. 대학과정에서는 일반함수에 대해서 극값이 근방의 개념을 활용하여 정의되는 만큼 고등학교 교과서와 미분적분학에서 표현되는 정의와 극값을 정의하는 함수의 범위의 차이점을 인식시켜주고 임계점에서 또한 극값을 가지는 경우(미분 불가능한 점 포함)와 갖지 않는 경우를 구별해 주어야 할 것이다. 이 부분이 중요한 이유는 이공계열 학생들의 전공학습에서 미분방정식, 푸리에 해석, 신호 이론 등에서 나타나는 함수들 중에서 미분불가능한 임계점에서 극값(최대, 최소문제)을 갖는 함수들이 많이 나타나기 때문이다. 수학적 논리에 익숙하지 못한 학생들은 개념 이미지에 많이 의존하기 때문에 연속함수가 아닌 그리고 미분가능하지 않은 여러 함수의 그래프를 제시해 주며 다른 상황에서도 극값을 가질 수 있다는 것을 강조해주는 것이 학생들의 오류를 최소화하는 한 방법이 될 것이다.

다음은 다항함수의 극값을 찾는 문항으로, 함수 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$의 극댓값과 극솟값을 찾는 문항이다. 이 문항에서 학생들이 답한 유형을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 미분계수가 0이 되는 점을 찾고, 그래프를 그려 극댓값과 극솟값을 찾은 유형(23명, 11.7%)

(2) 미분계수가 0이 되는 점을 찾아 극댓값과 극솟값이 되는 점의 x 좌표만 찾은 유형(22명, 11.2%)

(3) 미분계수가 0이 되는 점을 찾아 극댓값과 극솟값이 되는 점을 찾았으나 계산을 실수한 유형(7명, 3.6%)

(4) 극댓값과 극솟값의 구분 없이 미분계수가 0이 되는 점만 찾은 유형(11명, 5.6%)

(5) 인수분해를 하여 그래프의 개형을 그리고 도함수만 구한 경우(21명, 10.7%)

(6) 도함수만 구한 경우(58명, 29.4%)

(7) 그래프의 개형을 그리기 위해 인수분해만 한 경우(16명, 8.1%)

(8) 무응답(39명, 19.8%)

극댓값과 극솟값이 되는 점의 x 좌표만 구한 학생 22명(11.2%)과 미분계수가 0이 되는 점만 찾은 학생 11명(5.6%)은 극값의 정의에 대한 정확한 이해보다는 극값을 구하는 방법에 대해 기억하여 한번 미분하여 0이 되는 값만 찾은 것이다. 또한, 극값을 구하기 위해서 인수분해를 하여 그래프의 개형을 그리고 도함수만 구한 학생과 도함수만 구한 학생은 모두 79명(40.1%)으로, 학생들은 극값을 구하기 위해서는 일단 미분해야 한다는 사실은 기억하고 있으나 그 다음 어떻게 구해야 하는지를 기억하지 못한 것으로 나타났다.

<표 6> $f(x)=x^3-2x^2-x+2$에서의 극값을 구하는 문제에서의 학생들의 응답 유형

	가형	나형	특별	합계
(1)	10	9	4	23
(2)	15	6	1	22
(3)	6	1	0	7
(4)	3	6	2	11
(5)	9	10	2	21
(6)	25	23	10	58
(7)	6	10	0	16
(8)	8	23	8	39
합계	82	88	27	197

V. 결 론

본 연구는 이공계열 학생들에게 극값을 가르치는 교수자들에게 유용한 정보를 제공하기 위해 이공계열 학생들이 극값에 대해 어떻게 알고 있고, 어떠한 오류를 범하고 있는지를 알아보았다. 이를 위하여 이공계열 학생 197명을 대상으로 두 차례의 조사를 실시하여 학생들이 직접 기록한 질문지를 분석하였다. 본 연구를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 대학에서 극값을 지도할 때, 이미 배운 개념이라도 간단한 질문을 통해 학생들이 어느 정도 알고 있는지를 확인하고 다시 한 번 정확한 개념을 설명할 필요가 있다. 학생들은 이미 배운 내용이라도 자주 사용하지 않거나 시험(대학수학능력시험 등)에 관련이 없는 내용에 대해서는 정확하게 기억하지 못하는 경향이 있다. 실제로, 고등학교에서 이미 배운 극값의 정의에 대해 많은 학생(64.5%)들이 설명하지 못하였고, "기울기가 0이 되는 점 또는 $f'(x)=0$이 되는 점"이라고 답한 학생도 28명(14.2%)이 있었다. 따라서 수업을 진행하기 전에 학생들의 극값에 대한 사전지식을 파악하여 수업의 내용과 진행 방향을 설정하는데 참고하는 것도 좋은 방법이다.

둘째, 극값의 정의를 설명할 때, 그래프만 기억하지 않고 그래프에서 극값의 정의를 유추할 수 있도록 지도하고, 고등학교에서 다루지 않지만 이공계열 학생들에게 필요한 극값을 갖는 특수한 예(미분불가능한 점, 상수함수)에 대해서도 지도할 필요가 있다. 앞의 조사 결과에서 보듯이, 학생들은 극값의 정의를 설명하지 못하더라도 주어진 그래프에서 극값을 찾는 문제에서 많은 학생들이 아래로 오목하거나 위로 오목한 부분에서 극값을 갖는다고 답하였다. 이는 극값의 정의보다는 극값의 정의를 설명할 때 제시된 그래프가 더 강하게 인식된 것으로 보인다. 또한, 많은 학생들은 특수한 경우(미분불가능한 점, 상수함수)에서는 극값을 갖는다는 사실을 알지 못하였다.

셋째, 이공계열 학생들의 전공학습에서는 미분방정식, 푸리에 해석, 신호 이론 등에서 미분불가능한 임계점에서 극값(최대, 최소문제)을 갖는 함수들이 많이 다루어지고 있다. 따라서 연속함수가 아니거나 미분가능하지 않은 여러 함수의 그래프를 제시해 주며 다양한 상황에서도 극값을 가질 수 있

다는 점을 강조해주는 것이 학생들의 오류를 최소화하는 한 방법이 될 것이다. 고등학교에서는 연속함수에서만 극값을 구하는 문제를 다루지만 대학에서는 정의부터 근방의 개념을 활용하여 연속이라는 언급 없이 모든 함수를 대상으로 한다. 그러나 학생들은 극값을 구할 때 항상 미분을 사용하였으므로 미분가능하지 않으면 극값이 존재하지 않는다고 생각하고, 연속하지 않은 함수는 미분가능하지 않기 때문에 연속이 아니거나 미분가능하지 않아 극값이 존재하지 않는다고 생각하였다.

넷째, 학생들이 극값을 구할 때 왜 미분을 사용하고, 구한 극값이 극댓값인지 극솟값인지를 알기 위해 함수의 증감을 조사하는 이유가 무엇 때문인지에 대해 충분히 생각할 기회를 제공하여 극값에 대한 이해를 높이도록 지도하는 것이 중요하다. 또한, 미분가능한 함수가 미분계수는 0이지만, 극값을 갖지 않는 함수도 있다는 사실을 다양한 예를 통해 설명할 필요가 있다. 극값을 구하는 과정은 매우 간단함에도 불구하고 극값의 정의와 극값을 구하는 과정에 대한 정확한 이해보다는 극값을 구하는 방법을 단순히 기억하여 적용하는 연습에 치우치다보면 주어진 문제 상황에서 극값을 정확하게 구할 수 없는 경우가 발생한다. 예를 들어, 순증가 함수인 $y=x^3$과 같이 극값을 갖지 않는 함수도 한 번 미분하여 0이 되는 점이 있으므로 극값이 존재한다고 판단하는 학생이 극값이 없다고 답한 학생들보다 더 많이 나왔고, 다항함수의 극값을 찾는 문제에서 극댓값과 극솟값이 되는 점의 x 좌표만 구한 학생과 미분계수가 0이 되는 점만 찾은 학생이 있었고, 극값을 구하기 위해서 도함수만 구한 학생도 많았다. 이는 극값을 구할 때, 한 번 미분하여 0이 되는 점을 찾고 그 점에서의 함수의 증감을 조사하여야 하는데, 이를 간과하고 한 번 미분하여 0이 되는 점에서의 함수값이 극값이 된다고 생각한 결과이고, 극값에 대한 정확한 이해보다는 극값을 구하는 방법에 대해 기억하여 한 번 미분하여 0이 되는 값만 찾거나 일단 미분해야 한다는 사실만 기억하고 그 다음 어떻게 구해야 하는지를 모르는 경우이다.

참 고 문 헌

김병무 (2007). 문제풀이의 오류, 모순, 결점을 이용한 대학수학 학습지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **21(2)**, pp.125-152.

김부미 (2005). 경험적 구조주의에 의한 수학적 오류의 분류가능성 탐색, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> **15(4)**, pp.461-488.

김수미 (2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> **5(2)**, pp.209-221.

김정희 · 조완영 (2004). 고등학교 학생들의 미분개념의 이해 및 오류유형 분석, 대한수학교육학회지 <수학교육학논총> **26**, pp.489-508.

미분적분학교재편찬위원회 (2003). 미분적분학, 단국대학교출판부.

박규홍 외 5인 (2003). 수학 II, 서울: (주)교학사.

박두일 외 8인 (2003). 수학 II, 서울: (주)교학사.

박배훈 외 6인 (2003). 수학 II,. 경기도: 법문사.

송순희 · 오정현 (1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36(1)**, pp.11-22.

심상길 · 최재용 (2008). 함수 학습에 나타난 수학 학습부진아의 오류에 대한 사례 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **22(3)**, pp.275-288.

우정호 외 5인 (2003). 수학 II, 서울: 대한교과서(주)

이강섭 외 6인 (2003). 수학 II, 서울: (주)지학사.

임석훈 외 3인 (2003). 수학 II, 서울: (주)천재교육.

임재훈 외 9인 (2003). 수학 II, 서울: (주)두산.

정광식 외 2인 (2003). 수학 II, 서울: 동아서적(주).

정동명 · 조승제 (2004). 실해석학개론(2판), 서울: 경문사.

조태근 외 4인 (2003). 수학 II, 서울: (주)금성출판사.

최대봉 외 5인 (2003). 수학 II, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

최상기 외 3인 (2003). 수학 II, 서울: (주)고려출판.

최성재, 최희태, 김학범 (1996). 공학도를 위한 공업수학, 서울 : 청문각

최용준 외 1인 (2003). 수학 II, 서울: (주)천재교육.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (1982). *Introduction to Real Analysis*, NY; John Wiley & Sons, Inc.

Nitsa Movshovitz-Hadar, Orit Zaslavsky & Shlomo Inbar (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education* **18(1)**, pp.3-14.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education, *Journal for Research in Mathematics Education* **10(3)**, pp.163-172.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12(2)**, pp.151-169.

An Analysis on Errors of Students in Science and Engineering in Extremum Value of Functions

Shim, Sang Kil
Accreditation Center for Educational Development, Dankook University, Cheonan-si, Chung-nam 330-714, Korea
E-mail : skshim22@dankook.ac.kr

Choi, Jae Gil
Department of Mathematics, Dankook University, Cheonan-si, Chung-nam 330-714, Korea
E-mail : jgchoi@dankook.ac.kr

The purposes of this study are to analyze error that the students in science and engineering show in the process of thinking a extremum value. First, in view of examples of incorrect answers that appeared in a test by students in science and engineering, it has been found that the most frequent incorrect answers were due to a lack of understanding about necessary matters and concepts. In this regard, it is necessary to use various examples and pictures(graphs) to teach students in science and engineering. In addition, it has been found that it is more effective to use questions asking why it happens and why they think that way to help those having difficulties in understanding various concepts and principles.

* ZDM Classification : D75
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : students in science and engineering, extremum value, error analysis